

16.1. Izračunaj determinanto velikosti $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nasvet: lahko si pomagaš tako, da najprej izračunaš determinanto za $n = 2, 3, 4, \dots$

16.2. Izračunaj determinanto velikosti $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & 0 & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & n-2 & 0 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & n \end{vmatrix}.$$

16.3. Izračunaj determinanto velikosti $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

16.4. Reši sistem enačb po Cramerjevem pravilu

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ -4x - 2y + z &= 0 \\ 2x + 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

16.5. Reši sistem enačb po Cramerjevem pravilu

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

16.6. Poišči prirejenko in inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

16.7. Izračunaj prirejenko in inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

16.8. Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne podprostore matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ali je matrika A podobna kakšni diagonalni matriki?

16.9. Poišči lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

in določi njihove geometrične večkratnosti. Ali je matrika A podobna kakšni diagonalni matriki?

16.10. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj njene lastne vrednosti in lastne vektorje. Ali je matrika A podobna kakšni diagonalni matriki?

Rešitve:

16.1. 2^{n-1}

16.2. $(n-1)!$

16.3. $(-1)^{n-1}(n-1)$

16.4. $x = 1, y = -1, z = 2$

16.5. $x_1 = 13/55, x_2 = 14/55, x_3 = 4/55, x_4 = -8/55$

16.6. $\tilde{A} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 9 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & -5 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/11 & 2/11 & -4/11 \\ 3/11 & -1/11 & 2/11 \\ -9/11 & 3/11 & 5/11 \end{bmatrix}$

16.7. $\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16.8. $\lambda_{1,2,3} = 2, \lambda_4 = -1,$

$$L_2 = \text{Lin} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, L_{-1} = \text{Lin} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \text{ ne.}$$

16.9. $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 2, g(1) = g(0) = g(2) = 1, \text{ ne.}$

16.10. $\lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 1,$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ da.}$$