

5.1. Za vsakega od naslednjih parov matrik A, B določi ali obstajajo $A + B, AB$ in BA . Tiste, ki obstajajo tudi izračunaj.

$$(i) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$(ii) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(iii) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.2. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi vse matrike $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, za katere velja

$$AB = I.$$

5.3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Določi vse matrike $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ oblike

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ x & y & z \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

za katere velja

$$AB - BA = A.$$

5.4. Poišči vse matrike velikosti 2×2 , ki zadoščajo:

$$A^2 = A.$$

5.5. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, za katero velja

$$AXA^T + X = 4I.$$

5.6. Dani sta matriki

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Določi matriko $A = BC^T - 2I$.
 (b) Izračunaj A^2 in A^3 .

5.7. Določi range matrik A in B v odvisnosti od parametra t

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 1 \\ -1 & t+1 & 1 & 1 \\ 0 & 2t+1 & t+1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & t \end{bmatrix}.$$

5.8. Poišči vse rešitve sistemov linearnih enačb:

(a)

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ x - 2y - t &= -1 \\ 2x + 4y + z - t &= 0 \\ -x + 2y + z + 2t &= 3 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x + 2y + z + 5t &= 3 \\ 3x + 6y - 2z + 5t &= 4 \\ x + 2y - 4z - 5t &= -2 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x - 2z - t &= -1 \\ -x + y + 3z &= 1 \\ x + y - z - t &= 1 \\ 2x + 2y - 2z - 3t &= 0 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 &= -3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

5.9. Poišči pogoj za parametre a, b, c , pri katerem je rešljiv sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} x + 5y + 3z &= a \\ x + 2y + z &= b \\ -2x - y &= c \end{aligned}$$

Poišči vse rešitve, kadar obstajajo.

5.10. Obravnavaj sistem enačb

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= a + 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -2a \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= a - 1 \end{aligned}$$

Rešitve:

5.1. (i) $AB = [0]$, $BA = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 2 & -4 & -6 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

(ii) $BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ostale matrike ne obstajajo.

5.2. $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

5.3. $x = 0, y = 3, z = 0$

5.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ali $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ali $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$, kjer je $c \in \mathbb{R}$ poljuben, ali $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$, kjer je $c \in \mathbb{R}$ poljuben, ali $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{a^2-a}{b} & 1-a \end{bmatrix}$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ poljuben in $b \neq 0$.

5.5. $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

5.6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

5.7. Če je $t = 0$, je $\text{rang}A = 2$, če je $t \neq 0$, je $\text{rang}A = 3$.

Če je $t = -1$, je $\text{rang}B = 2$, če je $t \neq -1$, je $\text{rang}B = 3$.

5.8. (a) t je parameter, $x = t - 1$, $y = 0$, $z = 2 - t$

(b) $x_1 = 11$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$, $x_4 = -3$, $x_5 = -4$

(c) y, t sta parametra, $x = 2 - 2y - 3t$, $z = 1 - 2t$

(d) z je parameter, $x = 1 + 2t$, $y = 2 - z$, $t = 2$

(e) x_2, x_4 sta parametra, $x_1 = 3 + x_2 - 2x_4$, $x_3 = -2$

5.9. Če je $a - 3b - c = 0$, je sistem rešljiv, z je parameter, $x = (5b - 2a + z)/3$, $y = (a - b - 2z)/3$

Če je $a - 3b - c \neq 0$, sistem ni rešljiv.

5.10. Če je $a = 1$, je sistem rešljiv, x_3 je parameter, $x_1 = 1 - x_3$, $x_2 = -2x_3$, $x_4 = -1$

Če je $a \neq 1$, sistem ni rešljiv.