

21.1. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči ortonormirano bazo prostora \mathbb{R}^3 , sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A .

21.2. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči ortonormirano bazo prostora \mathbb{R}^4 , sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A .

21.3. Naj bo $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sebi adjungirana linearna preslikava, ki ima lastno vrednost -2 . Za vsak vektor u , ki leži na ravnini $x + z = 0$ velja $Au = 2u$. Poišči njeno matriko v standardni bazi prostora \mathbb{R}^3 .

21.4. Sebi adjungirana linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ima dvojno lastno vrednost 2 in velja

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči njeno matriko v standardni bazi prostora \mathbb{R}^3 .

21.5. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sebi adjungirana preslikava, ki ima lastno vrednost 3. Za vsak vektor v , ki leži na ravnini $x + y = 0$, velja $Av = -v$. Poišči matriko preslikave \mathcal{A} v standardni bazi prostora \mathbb{R}^3 .

21.6. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

Ali je matrika A sebi adjungirana, ali je normalna, ali je unitarna?

21.7. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

Ugotovi, ali je sebi adjungirana, ali je unitarna, ali je normalna.

21.8. Dana je matrika

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2i & 2 \\ 2i & -1 & 2i \\ 2 & -2i & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

Ugotovi, ali je sebi adjungirana, ali je unitarna, ali je normalna.

21.9. Določi število $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$$

normalna. Ali je tako dobljena matrika sebi adjungirana, ali je ortogonalna?

21.10. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

(a) Poišči vse vrednosti parametrov a in b tako, da bo matrika sebi adjungirana.

(b) Poišči vse vrednosti parametrov a in b tako, da bo matrika normalna.

21.11. Dana je matrika

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ 1 & 2 & * \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dopolni matriko tako, da bo ortogonalna. Ali je tako dobljena matrika A sebi adjungirana? Ali je normalna?

21.12. Določi manjkajoča števila v matriki A tako, da bo unitarna.

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2i & * & * \\ 2i & -i & * \\ 1 & -2 & -2i \end{bmatrix}.$$

Ali je tako dobljena matrika sebi adjungirana, ali je normalna?

Rešitve:

$$21.1. \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

$$21.2. \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{3} \\ 3/2\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$$

21.3.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

21.4.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

21.5.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

21.6. je sebi adjungirana, je normalna, je unitarna

21.7. je sebi adjungirana, ni unitarna, je normalna

21.8. je sebi adjungirana, je unitarna, je normalna

21.9. $a = 0$, ni sebi adjungirana, ni ortogonalna21.10. (a) $a = 2$, b poljuben(b) $a = 2$, b poljuben ali $a = -2$, $b = 1$

21.11. $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, ni sebi adjungirana, je normalna

21.12. $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2i & 2i & 1 \\ 2i & -i & -2 \\ 1 & -2 & -2i \end{bmatrix}$, ni sebi adjungirana, je normalna