19.1. Podprostor V in vektor $\vec{v}$ prostora $\mathbb{R}^4$ (opremljenega s standardnim skalarnim produktom) sta dana takole:

$$V = \mathcal{L}in\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\4\end{bmatrix}.$$

Poišči ortonormirano bazo za V in izračunaj pravokotno projekcijo vektorja $\vec{v}$ na podprostor V.

19.2. V prostoru $\mathbb{R}^3$ z običajnim skalarnim produktom je dan podprostor

$$W = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}.$$

Poišči ortonormirano bazo prostora W. Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$ na podprostor W.

19.3. Pokaži, da je

$$\left\langle \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right\rangle = 2xa + xb + ya + yb$$

skalarni produkt na vektorskem prostoru $\mathbb{R}^2$. Poišči kako ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^2$.

19.4. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 opremljenim s skalarnim produktom

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$$

sta dana podprostor V in polinom p

$$V = \mathcal{L}in\{x^2 - 1, x - 1\}, \qquad p(x) = x^2.$$

Poišči ortonormirano bazo za V in izračunaj pravokotno projekcijo polinoma p na podprostor V.

19.5. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$$

in podprostor

$$U = \mathcal{L}\{x^2 - 1,\ x^2 - 2x + 1\}.$$

Poišči kako ortonormirano bazo prostora U in jo dopolni do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

19.6. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + \int_0^1 p'(x)q'(x)dx.$$

Poišči kako ortonormirano bazo podprostora

$$V = \{p \in \mathbb{R}_3[x]; p(x) = ax + bx^3,\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

19.7. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + 3p(1)q(1).$$

Poišči kakšno ortonormirano bazo podprostora

$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[x]; p(1) = p'(-1)\}.$$

19.8. Vektorski prostor $\mathbb{R}_2[x]$ je opremljen s skalarnim produktom

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Naj bo $V = \mathcal{L}in\{1 + x\}$. Poišči $V^\perp$!

Rešitve:

19.1. $ONB_V = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}, \quad proj_V \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

19.2. $ONB_W = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}, \quad proj_W \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

19.3. $ONB = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$

19.4. $ONB_V = \left\{x^2 - 1, \frac{1}{2}(x - x^2)\right\}, \quad proj_V p = \frac{1}{2}(x^2 - x)$

19.5. $ONB_V = \left\{x^2 - 1, \frac{1}{2}(x^2 - x)\right\}, \quad ONB_{\mathbb{R}_2[x]} = \left\{x^2 - 1, \frac{1}{2}(x^2 - x), \frac{1}{2}(x^2 + x)\right\}$

19.6. $ONB_V = \left\{x, \frac{\sqrt{5}}{2}(x^3 - x)\right\}$

19.7. $ONB_V = \left\{\frac{1}{2}x, \frac{1}{\sqrt{21}}(x^2 + x - 3)\right\}$

19.8. $V^\perp = \mathcal{L}in\left\{2 - 3x, 5x^2 - 2x - 2\right\}$