Rešitve izpita iz Matematike 2 z dne 22. 8. 2011

Praktična matematika

1. a) Očitno f slika $[0,\infty)$ v $[0,\infty)$. Nadalje velja $f'(x) = -\frac{16}{(8+x)^3}$. Za $x \in [0,\infty)$ je torej $-\frac{16}{8^3} = -\frac{1}{32} \le f'(x) < 0$, torej je f na tem intervalu res skrčitev.
b) Ker je f skrčitev, edino rešitev zahtevane enačbe dobimo kot limito kot limito rekurzivno podanega zaporedja $x_{n+1} = f(x_n)$. Če postavimo $x_1 = 0$, dobimo zaporedje približkov:

$$0{\cdot}5\,,\ 0{\cdot}3950617\,,\ 0{\cdot}4141523\,,\ 0{\cdot}4105777\,,\ 0{\cdot}4112435\,,\ 0{\cdot}4111194\,,$$

od koder zaključimo, da je rešitev v predpisani natančnosti $0{\cdot}411$.

2. Za kandidate za ekstrem v notranjosti izračunajmo prve parcialne odvode:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 3\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 4\,,$$

iz katerih dobimo točko $(1/2, 2/3)$ in izračunamo $f(1/2, 2/3) = -25/12$. Na robu pa gledamo vezani ekstrem z Lagrangeovo funkcijo $L(x, y; \lambda) = 3x^2 - 3x + 3y^2 - 4y - \lambda(x^2 + y^2)$. Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 6x - 3 - 2\lambda x &= 0 \\ 6y - 4 - 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1\,, \end{aligned}$$

čigar rešitev sta točki $(-3/5, -4/5)$ in $(3/5, 4/5)$. Velja $f(-3/5, -4/5) = 28/5$ in $f(3/5, 4/5) = 2/5$. Torej velja:

$$\min_{x^2+y^2 \le 1} f(x,y) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{25}{12}\,, \quad \max_{x^2+y^2 \le 1} f(x,y) = f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -\frac{28}{5}\,.$$

3. Ploskev je podana v eksplicitni obliki, kar pomeni, da je parametrizirana kar z x in y. Velja torej:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \big(x, y, x^2(4 - y^2)\big)\,, & & \\ \mathbf{r}_x &= \big(1, 0, 2x(4 - y^2)\big)\,, & \mathbf{r}_x\big|_{x=1,y=0} &= (1, 0, 8)\,, \\ \mathbf{r}_y &= (0, 1, -2x^2 y)\,, & \mathbf{r}_y\big|_{x=1,y=0} &= (0, 1, 0)\,, \end{aligned}$$

od koder dobimo $E = 65$, $F = 0$, $G = 1$ in še $EG - F^2 = 65$. Nadalje iz:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{xx} &= (0, 0, 8 - 2y^2)\,, & \mathbf{r}_{xx}\big|_{x=y=1} &= (0, 0, 8)\,, \\ \mathbf{r}_{xy} &= (0, 0, 4xy)\,, & \mathbf{r}_{xy}\big|_{x=y=1} &= (0, 0, 0)\,, \\ \mathbf{r}_{yy} &= (0, 0, -4x^2)\,, & \mathbf{r}_{yy}\big|_{x=y=1} &= (0, 0, -2) \end{aligned}$$

dobimo $L = \dfrac{8}{\sqrt{65}}$, $M = 0$ in $N = -\dfrac{2}{\sqrt{65}}$.

Gaussova ukrivljenost: $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\dfrac{16}{4225}$.

4. Z uvedbo cilindričnih koordinat:

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta\,, \quad z = z\,, \quad J = r$$

dobimo:

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_{2 \le z\, e^{x^2+y^2} \le 3} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \\
&= \iiint_{\substack{r \ge 0 \\ 0 \le \theta < 2\pi \\ 0 \le 2 \le z\, e^{r^2} \le 3}} r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}z = \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^\infty r \int_{2\, e^{-r^2}}^{3\, e^{-r^2}} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}r = \\
&= 2\pi \int_0^\infty r\, e^{-r^2}\, \mathrm{d}r\,.
\end{aligned}$$

S substitucijo $t = r^2$ končno dobimo $V = \pi \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\, \mathrm{d}t = \pi$.

5. Substitucija $z = e^{it}$, $\cos t = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$, nam da:

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{\cos t\, \mathrm{d}t}{4\cos t - 5} = \frac{1}{i} \oint_K f(z)\, \mathrm{d}z\,,$$

kjer je K pozitivno orientirana enotska krožnica, funkcija f pa je definirana po predpisu:

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{2z(2z^2 - 5z + 2)} = \frac{z^2 + 1}{2z(2z - 1)(z - 2)}\,.$$

Funkcija f ima tri singularnosti, 0, 1/2 in 2. Le prvi dve ležita znotraj enotskega kroga, zato velja:

$$I = 2\pi\Big[\mathrm{Res}\big(f, 0\big) + \mathrm{Res}\big(f, \tfrac{1}{2}\big)\Big]\,.$$

Ker gre obakrat za pol prve stopnje, je:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\big(f, 0\big) &= \lim_{z \to 0} z\, f(z) = \left.\frac{z^2 + 1}{2(2z - 1)(z - 2)}\right|_{z=0} = \frac{1}{4}\,, \\
\mathrm{Res}\big(f, \tfrac{1}{2}\big) &= \lim_{z \to 1/2} \big(z - \tfrac{1}{2}\big)\, f(z) = \left.\frac{z^2 + 1}{4z(z - 2)}\right|_{z=1/2} = -\frac{5}{12}\,.
\end{aligned}$$

Sledi $I = -\pi/3$.