Rešitve izpita iz Matematike 2 z dne 20. 6. 2011

Praktična matematika

1. Označimo $f(x) = 100 \ln x$. Očitno je f naraščajoča; ker je $f(600) \doteq 639\text{'}69$ in $f(650) \doteq 647\text{'}70$, funkcija preslika interval $I := [600, 650]$ vase. Ker za $x \in I$ velja $0 \le f'(x) = 100/x \le 1/6$, je f na I skrčitev, torej na I obstaja natanko ena rešitev enačbe $f(x) = x$, ki jo dobimo z iteracijo. Iz zaporedja približkov:

$$650\,,\ 647\text{'}6972\,,\ 647\text{'}3423\,,\ 647\text{'}2875\,,\ 647\text{'}279\,,\ 647\text{'}2778\,,\ 647\text{'}2775\,,\ 647\text{'}2775$$

dobimo rešitev v predpisani natančnosti $647\text{'}28$.

2. Velja:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 3t^2 - 1 \\ 3t^2 - 2 \\ 6t^2 - 4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 6t \\ 6t \\ 12t - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \dddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

in nadalje:

$$\|\dot{\vec{r}}\| = 3\,, \quad \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = 2\sqrt{17}\,,$$

$$(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -14 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \|(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}\| = 6\sqrt{17}\,.$$

Glavna normala: $\dfrac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}}{\|(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}\|} = \dfrac{1}{3\sqrt{17}} \begin{bmatrix} -7 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Fleksijska ukrivljenost: $\kappa = \dfrac{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3} = \dfrac{2\sqrt{17}}{27}$.

Torzijska ukrivljenost: $\omega = \dfrac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|^2} = \dfrac{6}{17}$.

3. Najprej izračunajmo kvadrat ploščinskega elementa:

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2\,.$$

Masa je torej enaka:

$$m = \iint_{z \le 2} \sigma \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{x^2 + y^2 \le 1} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Po uvedbi polarnih koordinat $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $J = r$ dobimo:

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\,.$$

S substitucijo $t = 1 + 4r^2$ dobimo:

$$m = \frac{\pi}{16}\int_1^5 (t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{60}\right)\pi\,.$$

4. Če z B označimo kroglo in z $\vec{R} = (X, Y, Z)$ dano vektorsko polje, po Gaussovem izreku velja:

$$I := \iint_{\partial B}\langle\vec{R},\vec{n}\rangle\,\mathrm{d}S = \iiint_B \operatorname{div}\vec{R}\,\mathrm{d}V = \iiint_B 2(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Po uvedbi sferičnih koordinat:

$$x = r\cos\varphi\cos\theta\,,\quad y = r\cos\varphi\sin\theta\,,\quad z = r\sin\varphi\,,\quad J = r^2\cos\varphi$$

dobimo:

$$I = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{8\pi}{5}\,.$$

5. Ker ima funkcija $z \mapsto e^z - 1$ v izhodišču ničlo prve stopnje, ima funkcija f tam pol druge stopnje. Koeficienta glavnega dela Laurentove vrste sta torej enaka:

$$\begin{aligned} c_{-2} &= \lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = 1\,,\\ c_{-1} &= \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big[z^2 f(z)\big] = \lim_{z\to 0}\frac{e^z - 1 - z\,e^z}{(e^z-1)^2} = -\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Z drugimi besedami, glavni del Laurentove vrste je enak $\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{2z}$.