Rešitve izpita iz Matematike 2 z dne 29. 6. 2011

Praktična matematika

1. Najprej opazimo, da je funkcija f liha, zato je dovolj gledati sinusno Fourierovo vrsto:

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,,$$

kjer je:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\,.$$

Velja torej:

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & ;\ n = 1,3,5,\ldots \\ \frac{4}{n\pi} & ;\ n = 2,6,10\ldots \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}\,.$$

in zato:

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right) + \\ + \frac{2}{\pi}\left(\sin(2x) + \frac{\sin(6x)}{3} + \frac{\sin(10x)}{5} + \cdots\right)\,.$$

2. *Prvi način.* Nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$L = x^2 + 2y^4 - \lambda(x^2+y^2)$$

in dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 8y^3 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 &= 1\,. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo, da mora biti bodisi $x = 0$ bodisi $\lambda = 1$. Če je $x = 0$, iz tretje enačbe sledi $y = \pm 1$, kar je konsistentno z drugo enačbo pri $\lambda = 4$. Če je $\lambda = 1$, pa iz druge enačbe dobimo $y = 0$ (od koder sledi $x = \pm 1$) ali $y = \pm\frac{1}{2}$ (od

koder sledi $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, pri čemer je predznak neodvisen od predznaka spremenljivke y). Kandidati za ekstrem so zbrani v naslednji tabeli:

x	y	$f(x,y)$
0	1	2
0	-1	2
1	0	1
-1	0	1

x	y	$f(x,y)$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$

,

iz katere razberemo, da je minimum funkcije enak $\frac{7}{8}$, maksimum pa 2.

Drugi način. Iz izražave $y^2 = 1 - x^2$ dobimo:

$$f(x,y) = 2 - 3x^2 + 2x^4 =: g(x)\,,$$

torej je potrebno poiskati le ekstremne vrednosti funkcije ene spremenljivke, t. j. funkcije g na intervalu $[-1,1]$. Iz $g'(x) = -6x + 8x^3$ dobimo naslednje kandidate za ekstrem:

x	$g(x)$
-1	1
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{7}{8}$
0	2
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{7}{8}$
1	1

.

Torej je minimum enak $\frac{7}{8}$, maksimum pa 2.

3. a) Najprej iz $x = 2$ sledi $\rho\cos\varphi = 1$, nato pa iz $y = 1$ dobimo še $\rho\sin\varphi = 0$. Ker je $\rho\cos\varphi = 1$, je $\rho \neq 0$, torej je $\sin\varphi = 0$, torej $\cos\varphi = \pm 1$ in $\rho = \pm 1$ (predznak se ujema s predznakom v prejšnji enačbi), zato je $z = \rho^2 = 1$. Točka $T(2,1,1)$ je dosežena pri naslednjih vrednostih parametrov:

$$\rho = 1\,, \quad \varphi = 2k\pi \quad \text{in še} \quad \rho = -1\,, \quad \varphi = (2k+1)\pi\,; \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

b) Iz prvih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_\rho = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi \\ \cos\varphi + \sin\varphi \\ 2\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 2 \\ \pm 1 \\ \pm 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -2\rho\sin\varphi \\ \rho(\cos\varphi - \sin\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ker se vsi predznaki $\pm$ ujemajo s predznakom parametra ρ, dobimo, da so koeficienti prve fundamentalne forme v naši točki enaki:

$$E = 9\,, \quad F = \pm 1\,, \quad G = 1$$

in koeficient pri diferencialu ploščine je enak $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{8}$. Nadalje iz drugih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_{\rho\rho}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix},\ \vec{r}_{\rho\varphi}=\begin{bmatrix}-2\sin\varphi\\ \cos\varphi-\sin\varphi\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \pm1\\ 0\end{bmatrix},\ \vec{r}_{\varphi\varphi}=\begin{bmatrix}-2\rho\cos\varphi\\ -\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

dobimo še koeficiente druge fundamentalne forme:

$$L=\pm\sqrt{2}\,,\quad M=0\,,\quad N=\pm\sqrt{2}\,.$$

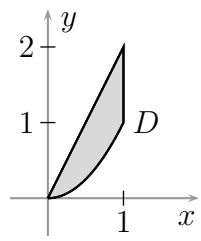
Predznaki v $\pm$ se spet ujemajo s predznakom parametra ρ. Iz:

$$\det\left(\begin{bmatrix}L & M\\ M & N\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix}\right)=8\lambda^2\mp10\sqrt{2}\,\lambda+2$$

dobimo, da sta glavni ukrivljenosti pri $\rho=1$ enaki $\frac{\sqrt{2}}{8}\big(5\pm\sqrt{17}\big)$, pri $\rho=-1$ pa $\frac{\sqrt{2}}{8}\big(-5\pm\sqrt{17}\big)$.

4. Dani integral najprej izrazimo kot dvojni integral:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$



kjer je:

$$\begin{aligned}D&=\{(x,y)\ ;\ 0\le x\le1,\ x^2\le y\le 2x\}=\\ &=\Big\{(x,y)\ ;\ 0\le y\le1,\ \frac{y}{2}\le x\le\sqrt{y}\Big\}\cup\Big\{(x,y)\ ;\ 1\le y\le2,\ \frac{y}{2}\le x\le1\Big\}\end{aligned}$$

(glej sliko). Po zamenjavi vrstnega reda se torej dani integral izraža kot:

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y/2}^{\sqrt{y}}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{y/2}^{1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

5. Naj bo:

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2+2z+5)}\,.$$

Iz ocene:

$$|zf(z)|\le\frac{|z|}{(|z|^2-1)(|z|^2-2|z|-5)}\,,$$

ki zagotovo velja velja za $|z|\ge4$, najprej dobimo, da je $\lim_{|z|\to\infty}zf(z)=0$. Nadalje iz razcepa:

$$(z^2+1)(z^2+2z+5)=(z-i)(z+i)(z+1-2i)(z+1+2i)$$

dobimo, da ima f štiri pole stopnje 1, od katerih dva (i in $-1+2i$) ležita na zgornji polravnini. Torej je:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= 2\pi i\Big[\mathrm{Res}(f,i)+\mathrm{Res}(f,1+2i)\Big] = \\
&= 2\pi i\left[\left.\frac{1}{(z+i)(z+1-2i)(z+1+2i)}\right|_{z=i} + \right. \\
&\qquad \left. + \left.\frac{1}{(z+i)(z-i)(z+1+2i))}\right|_{z=-1+2i}\right] = \\
&= \pi\left(\frac{1}{4+2i}-\frac{1}{4+8i}\right) = \\
&= \frac{3\pi}{20}\,.
\end{aligned}$$