Rešitve izpita iz Matematike 2 z dne 6. 9. 2011

Praktična matematika

1. Ker je funkcija liha, je dovolj razviti v sinusno Fourierovo vrsto:

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,,$$

kjer je:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos(n\pi)\Big)$$

oziroma:

$$b_n = \begin{cases} 2/(n\pi) & ;\ n = 1, 3, 5, \ldots \\ -4/(n\pi) & ;\ n = 2, 6, 10, \ldots \\ 0 & ;\ n = 4, 8, 12, \ldots \end{cases}.$$

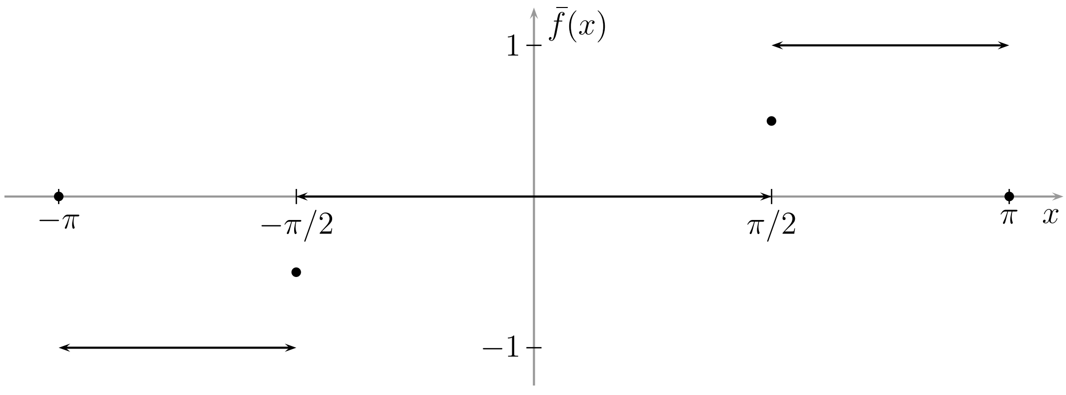
Z drugimi besedami,

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right) - \\ - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(8x)}{8} + \frac{\sin(12x)}{12} + \cdots\right).$$

Velja:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x = -\pi \\ -1 & ;\ -\pi < x < -\pi/2 \\ -1/2 & ;\ x = -\pi/2 \\ 0 & ;\ -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1/2 & ;\ x = -\pi/2 \\ 1 & ;\ \pi/2 < x < \pi \\ 0 & ;\ x = \pi \end{cases}.$$

Graf:



2. Oglišča: $f(0,0)=f(1,0)=0, \quad f(0,2)=2\,e^{-2}\doteq 0{\cdot}271$.
Rob AB: $f(x,0)=0$.
Rob AC: $f(0,y)=y\,e^{-y}, \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(0,y)=(1-y)\,e^{-y}, \quad f(0,1)=e^{-1}\doteq 0{\cdot}368$.
Rob BC: $f(x,2-2x)=(2-2x)e^{x-2}, \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,2-2x)=-2x\,e^{x-2}$.
Notranjost: $f_x(x,y)=-y\,e^{-x-y}, \quad f_y(x,y)=(1-y)\,e^{-x-y}$,
tam ni stacionarnih točk.
Sklep: če z Δ označimo naš trikotnik, velja:

$$\min_{\Delta} f = f(x,0)=0 \ \ (0\le x\le 1)\,, \quad \max_{\Delta} f = f(0,1)=e^{-1}\,.$$

3. Najprej izračunamo:

$$\dot{\mathbf{r}}=\left(\frac{1}{t},2,2t\right), \quad \ddot{\mathbf{r}}=\left(-\frac{1}{t^2},0,2\right), \quad \dddot{\mathbf{r}}=\left(\frac{2}{t^3},0,0\right).$$

Od tod dobimo:

$$\|\dot{\mathbf{r}}\|=\frac{1}{t}+2t\,, \quad \dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}=\left(4,-\frac{4}{t},\frac{2}{t^2}\right), \quad \|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\|=4+\frac{2}{t^2}\,,$$

torej je fleksijska ukrivljenost enaka:

$$\kappa=\frac{\|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}=\frac{2t}{(1+2t^2)^2}\,.$$

Iz odvoda:

$$\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}t}=\frac{2(1-6t^2)}{(1+2t^2)^3}$$

dobimo stacionarni točki $t=\pm\sqrt{6}$, toda le $\sqrt{6}$ je v definicijskem območju krivulje. Ker je $\lim_{t\to 0}\kappa=\lim_{t\to\infty}\kappa=0$, mora biti tam maksimum. Torzijska ukrivljenost je tam enaka:

$$\omega=\frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}},\dddot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\|^2}=\frac{t}{(1+2t^2)^2}=\frac{\sqrt{6}}{169}\,.$$

4. Označimo:

$$J:=\iiint_K \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

Prvi način: s sferičnimi koordinatami. Po prevedbi na trikratni integral dobimo:

$$J=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=2\pi\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi^2}{4}\,.$$

Drugi način: s cilindričnimi koordinatami. Po prevedbi na trikratni integral dobimo:

$$J=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^1 z^2\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta=2\pi\int_{-1}^1 z^2\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z$$

Slednji integral lahko izračunamo na več načinov. S substitucijo $z = \sin t$ se prevede na:

$$J = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(1 - \sin(4t)\big) \, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} \,,$$

lahko pa po upoštevanju sodosti uvedemo tudi substitucijo $w = z^2$ in dobimo:

$$J = 4\pi \int_0^1 z^2 \sqrt{1 - z^2} \, \mathrm{d}z = 2\pi \int_0^1 w^{1/2}(1 - w)^{1/2} = 2\pi \, \mathrm{B}\big(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\big) = 2\pi \, \frac{\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)^2}{\Gamma(3)} = \frac{\pi^2}{4} \,.$$

Pri prevedbi trojnega na trikratni integral pa je smiseln še en vrstni red integracije, pri katerem dobimo:

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-z^2}} z^2 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \frac{4\pi}{3} \int_0^1 (1 - r^2)^{3/2} \, \mathrm{d}r$$

in tudi tega lahko izračunamo na enega izmed prej prikazanih načinov.

5. Iz:

$$\operatorname{rot} \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ (a+2)(y+z)^a \\ -(a+2)(y+z)^a \end{bmatrix}$$

razberemo, da je polje potencialno natanko tedaj, ko je $a = -2$. Njegov potencial je polje $u(x, y, z) = \dfrac{x}{y + z}$.