Rešitve izpita iz Matematike 2 z dne 3. 9. 2012

Praktična matematika

1. Neposredno iz definicije razberemo, da je $d(m,m) = 0$ in $d(m,n) > 0$ za $m \neq 0$. Prav tako neposredno iz definicije (in komutativnosti seštevanja) sledi, da je d simetrična: $d(m,n) = d(n,m)$. Pri dokazu trikotniške neenakosti:

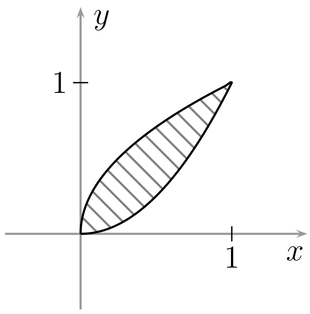
$$d(m,p) \leq d(m,n) + d(n,p)$$

pa se je dovolj omejiti na primer, ko so vsa tri števila različna – sicer neenakost sledi že iz pozitivnosti. Če so vsa tri števila različna, pa se neenakost prevede na:

$$m + p \leq m + n + n + p\,,$$

kar je tudi očitno res. Torej je d res metrika.

2. Definicijsko območje funkcije lahko zapišemo kot $D = \{(x,y)\ ;\ y \geq x^2,\ x \geq y^2\}$ in opazimo, da na njem velja še $0 \leq x, y \leq 1$. Skica:



Oglišči: $f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = 1/e$.

Rob $y = x^2$, $0 < x < 1$: $f(x,x^2) = x\,e^{-x^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,x^2) = (1-2x^2)e^{-x^2}$, stacionarna točka: $\big(\sqrt{2}/2, 1/2\big)$, velja $f\big(\sqrt{2}/2, 1/2\big) = 1/\sqrt{2e}$.

Rob $x = y^2$, $0 < x < 1$: $f(y^2,y) = y^2\,e^{-y}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(y^2,y) = (2y - y^2)e^{-y}$, stacionarni točki $(0,0)$ in $(4,2)$ ne pripadata temu delu roba (in prvo smo že obravnavali pri ogliščih).

Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{-y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x\,e^{-y}$, v notranjosti ni stacionarnih točk.

Ker je $e > 2$, je $1/\sqrt{2e} > 1/e$.

Torej je $\min\limits_D f = f(0,0) = 0$ in $\max\limits_D f = f(\sqrt{2}/2, 1/2) = 1/\sqrt{2e} \doteq 0{\cdot}429$.

3. Za izhodiščni parameter lahko postavimo kar $t = x$. Tedaj je:

$$\dot{x} = 1\,, \qquad \dot{y} = 2t\,, \qquad \dot{z} = 2t^2\,,$$

od koder dobimo $\dot{s}^2 = 1 + 4t^2 + 4t^4 = (1 + 2t^2)^2$, torej je $\dot{s} = \pm(1 + 2t^2)$, kar nam da:

$$s = s_0 \pm \left(t + \frac{2t^3}{3}\right) = s_0 \pm \left(x + \frac{2x^3}{3}\right).$$

4. S pomočjo sferičnih koordinat:

$$x = r\cos\varphi\cos\theta\,, \quad y = r\cos\varphi\sin\theta\,, \quad z = r\sin\varphi\,; \qquad J = r^2\cos\varphi$$

dobimo:

$$\begin{aligned} J &= \iiint_{\substack{0 \le y \le x \\ x^2+y^2+z^2 \le 1}} xy\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\ &= \iiint_{\substack{0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi/4 \\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2}} r^4\sqrt{1 - r^2}\cos\theta\sin\theta\cos^3\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

in prevedba na trikratni integral nam da $J = J_1 J_2 J_3$, kjer je:

$$J_1 = \int_0^1 r^4\sqrt{1 - r^2}\,\mathrm{d}r\,, \qquad J_2 = \int_0^{\pi/4} \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,, \qquad J_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Integrala J_2 in J_3 se da izračunati elementarno – s substitucijo $t = \sin\theta$ oz. $t = \sin\varphi$. Dobimo:

$$J_2 = \int_0^{\sqrt{2}/2} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\,, \qquad J_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\,.$$

V integral J_1 pa uvedemo substitucijo $t = r^2$. Dobimo:

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{3/2}(1 - t)^{1/2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{B}\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\,\Gamma(4)} = \frac{\pi}{32}\,,$$

torej je $J = \dfrac{\pi}{96}$.

5. Poli so natanko tam, kjer je imenovalec enak nič. Iz formule za rešitev kvadratne enačbe dobimo:

$$z_{1,2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4 - 16}}{2} = \bigl(-1 \pm \sqrt{5}\bigr)i\,,$$

torej lahko pišemo tudi:

$$f(z) := \frac{1}{z^2 + 2iz + 4} = \frac{1}{\bigl(z + \bigl(1 + \sqrt{5}\bigr)i\bigr)\bigl(z + \bigl(1 - \sqrt{5}\bigr)i\bigr)}\,.$$

Nad realno osjo je pol $\bigl(-1+\sqrt{5}\bigr)i$, in sicer prve stopnje. Torej je:

$$\operatorname{Res}\bigl(f;\bigl(-1\pm\sqrt{5}\bigr)i\bigr)=\lim_{z\to(-1+\sqrt{5})i}\bigl(z+\bigl(1-\sqrt{5}\bigr)i\bigr)f(z)=\left.\frac{1}{z+\bigl(1+\sqrt{5}\bigr)i}\right|_{z=(-1+\sqrt{5})i}=$$

$$=\frac{1}{2i\sqrt{5}}=-\frac{i\sqrt{5}}{10}\,.$$

Opomba. V kompleksnem sicer ni korektno uporabljati korenskega znaka ($\sqrt{\cdot}$) samega po sebi. Korektno pa ga je uporabljati skupaj z obema možnima predznakoma ($\pm\sqrt{\cdot}$), v kolikor le-ta dva nista povezana s kakšnimi drugimi predznaki.