Rešitve izpita iz Matematike 2 z dne 12. 9. 2013

Praktična matematika

1. Najprej izračunamo:

$$f_x(x,y) = -2x\,, \qquad f_y(x,y) = 1\,.$$

Ker odvod po y nikoli ni enak nič, v notranjosti ni stacionarnih točk. Ekstreme na robu pa je možno poiskati na vsaj dva načina.

Prvi način: s pomočjo Lagrangeovih multiplikatorjev. Nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$F = y - x^2 - \lambda(x^2 + y^2)$$

Velja:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2(1+\lambda)x\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - 2\lambda y\,.$$

Torej je bodisi $x = 0$ bodisi $\lambda = -1$. V prvem primeru je $y = \pm 1$, torej izračunamo $f(0,1) = 1$ in $f(0,-1) = -1$. V drugem primeru, ko je $\lambda = -1$, pa dobimo $y = -1/2$ in posledično $x = \pm\sqrt{3}/2$. Torej izračunamo $f\big(-\sqrt{3}/2, -1/2\big) = f\big(\sqrt{3}/2, -1/2\big) = -5/4$. Če torej z D označimo enotski krog, velja:

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}\,,$$
$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = f(0,1) = 1\,.$$

Drugi način: na robu neposredno izrazimo $x^2 = 1-y^2$, torej iščemo ekstreme funkcije $g(y) = y - 1 + y^2$ za $-1 \le y \le 1$. Velja $g(-1) = -1$ in $g(1) = 1$. Iz odvoda $g'(y) = 1 + 2y$ dobimo stacionarno točko $y = -1/2$, torej izračunamo še $g(-1/2) = -5/4$, se pravi, da je $\min_{-1\le y\le 1} g(y) = g(-1/2) = -5/4$ in $\max_{-1\le y\le 1} g(y) = g(1) = 1$. To se ujema z ekstremi, dobljenimi pri prvem načinu.

2. Velja:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= 2x\,, & p &= 4\,,\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= 2y\,, & q &= 8\,,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2\,, & r &= 2\,,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= 0\,, & s &= 0\,,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 2\,, & t &= 2\,.
\end{aligned}$$

Sledi $EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2 = 81$, $L = 2/9$, $M = 0$ in $N = 2/9$.

Gaussova ukrivljenost: $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = \dfrac{4}{6561} \doteq 6{\dot{}}097 \cdot 10^{-4}$.

3. V cilindričnih koordinatah:

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta\,, \quad z = z$$

telo določajo neenačbe:

$$\sqrt{r} < z < 6 - r\,, \qquad 0 \le \theta < 2\pi\,.$$

Neenačba $\sqrt{r} < 6 - r$ velja za $0 \le r < 4$. Tako dobimo ekvivalentna različico teh neenačb, primerno za integriranje:

$$0 \le \theta < 2\pi\,, \quad 0 \le r < 4\,, \quad \sqrt{r} < z < 6 - r\,.$$

Sledi:

$$V = \iiint\limits_{\substack{0\le\theta<2\pi\\0\le r<4\\\sqrt{r}<z<6-r}} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4\left(6 - r - \sqrt{r}\right)\mathrm{d}r = \frac{64\,\pi}{3}\,.$$

Ker je telo simetrično tako v koordinati x kot tudi koordinati y, sta ustrezni koordinati težišča obe enaki nič. Torej je potrebno izračunati le še koordinato z, zanjo pa integral:

$$\iiint\limits_{\substack{0\le\theta<2\pi\\0\le r<4\\\sqrt{r}<z<6-r}} z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4\int_{\sqrt{r}}^{6-r} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r = \pi\int_0^4\Big[(6-r)^2 - r\Big]\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{184\,\pi}{3}\,.$$

Torej je težišče točka $T\left(0, 0, \dfrac{23}{8}\right)$.

4. a) $i/2$, $-i/2$.

b) Krivulja ovije singularnost $i/2$ v nasprotni smeri urinega kazalca, singularnost $-i/2$ pa v smeri urinega kazalca. Če krivuljo označimo s K, sledi:

$$\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(f, \frac{i}{2}\right) - \mathrm{Res}\left(f, -\frac{i}{2}\right)\right]\,.$$

Velja:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left(f, \frac{i}{2}\right) &= \lim_{z\to i/2}\left(z - \frac{i}{2}\right) f(z) = \\ &= \lim_{z\to i/2}\left(z - \frac{i}{2}\right)\frac{1}{4\left(z - \frac{i}{2}\right)\left(z + \frac{i}{2}\right)} = \\ &= \left.\frac{1}{2(2z+i)}\right|_{z=i/2} = \\ &= -\frac{i}{4}\end{aligned}$$

in podobno:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f, -\frac{i}{2}\right) &= \lim_{z \to -i/2} \left(z + \frac{i}{2}\right) f(z) = \\
&= \lim_{z \to -i/2} \left(z + \frac{i}{2}\right) \frac{1}{4\left(z - \frac{i}{2}\right)\left(z + \frac{i}{2}\right)} = \\
&= \left. \frac{1}{2(2z - i)} \right|_{z = -i/2} = \\
&= \frac{i}{4} \, .
\end{aligned}
$$

Torej je $\oint_K f(z) \, \mathrm{d}z = \pi$.