

1. kolokvij iz Matematike 2

3. 12. 2004

Vpisna številka:

Ime in priimek:

Vrsta:

Sedež:

1. [5 %] V množici $M = \mathbb{R}$ je dan predpis

$$d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) := |x^2 - y^2|.$$

Pokaži, da (M, d) ni metrični prostor.

2. [15 %] V množici $N = [0, \infty)$ je dan predpis

$$d: N \times N \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) := |x^2 - y^2|.$$

Pokaži, da je (N, d) metrični prostor. V tem metričnem prostoru določi odprto kroglo $K(1, 3)$.

3. [20 %] Dana je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{2 + x^2} + \frac{5}{3}.$$

S pomočjo izreka o fiksni točki pokaži, da ima enačba $f(x) = x$ natanko eno rešitev $x = 2$.

Nasvet: Pokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

4. [20 %] Dana je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y + xy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{4}}}; & (x, y) \neq (0, 0), \\ a; & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Določi število a tako, da bo f zvezna. Izračunaj parcialna odvoda f_x in f_y .

5. [10 %] Izračunaj smerni odvod funkcije

$$f(x, y, z) = (x - y + z) \sin(x + yz - 1).$$

v točki $(1, 0, 1)$ v smeri vektorja $(-1, 2, 2)$.

6. [15 %] Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana s predpisom

$$g(x, y) = x^4 f\left(\frac{y}{x^2}\right).$$

Dokaži, da velja

$$xg_x + 2yg_y = 4g.$$

7. [15 %] Razvij funkcijo

$$f(x, y) = \sin(xy).$$

v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0, 0)$. S pomočjo razvoja izračunaj $f_{xxxyyy}(0, 0)$.