

1. kolokvij iz MATEMATIKE 2

MATEMATIKA VSŠ 24. 11. 1999

1. V množici \mathbb{R} je dan predpis

$$d(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|.$$

Pokaži, da je $M = (\mathbb{R}, d)$ metrični prostor.

2. V metričnem prostoru M iz 1. naloge nariši zaprto kroglo $\bar{K}(0, 2)$.
3. V metričnem prostoru M iz 1. naloge je dano zaporedje $x_n = n^2$. Pokaži, da je to zaporedje Cauchyjevo. Ali je konvergentno? Ali je M poln metrični prostor?
4. Dana je funkcija

$$f(x, y) = \frac{y - 8x}{x^2 + 4}.$$

Določi njeno definicijsko območje. Nariši njene nivojnice na nivojih $0, 2, -2$.

5. Dana je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Pokaži, da je zvezna. Izračunaj njen parcialni odvod $f_x(x, y)$. Ali je ta parcialni odvod zvezen?

6. Dana je funkcija $z = f(x, y)$, kjer sta x in y funkciji:

$$x = uv, \quad y = u^2 - v^2.$$

Pokaži

$$z_{uv} = f_x + x(f_{xx} - 4f_{yy}) + 2yf_{xy}.$$

7. Dana je funkcija

$$f(x, y) = (x - y)e^{x+y-1}.$$

Razvij jo v Taylorjevo vrsto okoli točke $(1, 0)$ do vključno členov drugega reda. S pomočjo dobljenega razvoja izračunaj približno vrednost $f(0.9, 0.2)$.