

# 1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika  
16. november 2010

1. [15] Preslikava  $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  je podana po predpisu:

$$d(x, y) = |x^3 - y^3|.$$

- a) Pokažite, da je  $d$  metrika na  $\mathbb{R}$ .  
b) Določite odprto kroglo okoli točke 1 s polmerom 9.

2. [15] Poiščite točko na premici  $y = 1 - 3x$ , ki je v metriki na  $\mathbb{R}^2$ :

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

najbližje izhodišču.

3. [15] Za vsako od množic  $A = (-1, \infty) \setminus \{0, 1\}$  in  $B = \mathbb{Q} \cup [0, 1]$  določite, ali je v običajni metriki na  $\mathbb{R}$  odprta, zaprta ali nič od tega.

4. [20] Dokažite, da ima enačba:

$$x = \frac{1}{x^3} + 3$$

na intervalu  $[3, 4]$  natanko eno rešitev. Rešitev tudi izračunajte na 4 decimalke natančno.

*Namig za dokaz in utemeljitev:* pokažite, da funkcija  $f(x) = \frac{1}{x^3} + 3$  interval  $[3, 4]$  preslika vase in da je na njem (v običajni metriki) skrčitev.

5. [20] Razvijte funkcijo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu  $[-\pi, \pi]$ .

6. [15] Funkcijo  $f(x) = x + 2$  razvijemo v Fourierovo vrsto na intervalu  $[1, 4]$ . Označimo z  $\bar{f}(x)$  dejansko vsoto te vrste. Izračunajte  $\bar{f}(5)$  in  $\bar{f}(7)$ .