Rešitve kolokvija iz Matematike 2 z dne 16. 11. 2010

Praktična matematika

1. a) Očitno je $d(x,y) \geq 0$ in velja $d(x,y) = 0$ natanko tedaj, ko je $x^3 = y^3$, to pa je natanko tedaj, ko je $x = y$. Nadalje je $d(y,x) = |y^3 - x^3| = |x^3 - y^3| = d(x,y)$. Končno velja še:

$$d(x,z) = |x^3 - z^3| = |x^3 - y^3 + y^3 - z^3| \leq |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| = d(x,y) + d(y,z)\,,$$

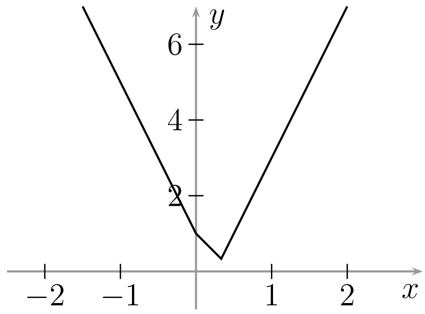
torej je d res metrika.

b) Želeno odprto kroglo tvorijo vsa števila x, za katera je $|x^3 - 1^3| < 9$, torej $-9 < x^3 - 1 < 9$, torej $-8 < x^3 < 10$, kar pomeni, da je to interval $\bigl(-2, \sqrt[3]{10}\bigr)$.

2. Točke na dani premici lahko opišemo kot pare $(x, 1-3x)$ in velja:

$$d_1\bigl((x, 1-3x), (0,0)\bigr) = |x| + |1-3x|\,.$$

Izraz, kakršen je na desni, zavzame ekstrem kvečjemu v točkah preloma (kjer pride katera od linearnih funkcij pod absolutno vrednostjo na nič), med dvema točkama preloma, kjer ima enako vrednost, ali na poltraku, kjer je konstanten. Iz grafa in tabele:



x	$\|x\| + \|1-3x\|$
$-\infty$	∞
0	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
∞	∞

odčitamo, da je minimum dosežen pri $x = \frac{1}{3}$, torej v točki $T\bigl(\frac{1}{3}, 0\bigr)$.

3. Množica A je odprta, ker je unija odprtih intervalov: $A = (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$. Ni pa zaprta, ker točka 0 ne pripada A, medtem ko se v vsaki okolici točke 0 nahaja točka, ki pripada A.

Množica B ni odprta, ker je $0 \in B$, medtem ko se v vsaki okolici točke 0 nahaja točka, ki ni v B. Prav tako ni zaprta, ker $\sqrt{B} \notin B$, medtem ko se v vsaki okolici točke $\sqrt{2}$ nahaja točka, ki je v B.

4. Naj bo:

$$f(x) = \frac{1}{x^3} + 3\,.$$

Velja $f'(x) = -3x^{-4}$ in za $x \in [3,4]$ je $-3/3^4 \leq f'(x) \leq 0$. Torej je f na tem intervalu padajoča. Nadalje je $f(3) = 3\frac{1}{27} \in [3,4]$ in $f(4) = 3\frac{1}{64} \in [3,4]$; ker je f padajoča, mora potemtakem interval $[3,4]$ spet preslikati v $[3,4]$. Torej je f

tam skrčitev, zato ima enačba $f(x) = x$ natanko eno rešitev, ki jo dobimo kot limito rekurzivno podanega zaporedja $x_{n+1} = f(x_n)$. Če postavimo $x_1 = 3$, dobimo zaporedje približkov:

$$3{\dot{}}037037\,,\ 3{\dot{}}035698\,,\ 3{\dot{}}035746\,,\ 3{\dot{}}035744\,,\ 3{\dot{}}035744\,,$$

od koder zaključimo, da je rešitev v predpisani natančnosti 3˙0357.

5. Iz:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \cos(nx)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} = \begin{cases} 1/(n\pi) & ;\ n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ 0 & ;\ n = 2, 4, 6, 8, \dots \\ -1/(n\pi) & ;\ n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}\,,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \sin(nx)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1-\cos(n\pi/2)}{n\pi} = \begin{cases} 1/(n\pi) & ;\ n = 1, 3, 5, 7, 9 \dots \\ 2/(n\pi) & ;\ n = 2, 6, 10, 14, \dots \\ 0 & ;\ n = 4, 8, 12, 16, \dots \end{cases}\,,$$

dobimo:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) = \frac{1}{4} &+ \frac{1}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\cos(5x)}{5} - \cdots\right) + \\ &+ \frac{1}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right) + \\ &+ \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(6x)}{6} + \frac{\sin(10x)}{10} + \cdots\right)\,, \end{aligned}$$

kjer je $\bar{f}$ periodična s periodo 2π in:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 1 & ;\ 0 < x < \pi/2 \\ 1/2 & ;\ x \in \{0, \pi/2\} \\ 0 & ;\ x \in [-\pi, 0) \cup (\pi/2, \pi] \end{cases}\,.$$

6. $\bar{f}(5) = \bar{f}(5-3) = \bar{f}(2) = f(2) = 4$,
$\bar{f}(7) = \bar{f}(7-3) = \bar{f}(4) = \frac{1}{2}\big[f(1) + f(4)\big] = \frac{9}{2}$.