

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
22. november 2011

1. [10 točk] Funkcija $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je podana po predpisu:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2|x_1 - x_2|.$$

Ali je d metrika na \mathbb{R}^2 ?

2. [20 točk + 5 točk bonusa] Dana je funkcija dveh spremenljivk:

$$d(m, n) = \begin{cases} \max\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\} & ; m \neq n \\ 0 & ; m = n \end{cases}.$$

- a) Dokažite, da je d metrika na množici naravnih števil.
b) [bonus] Določite, ali je zaporedje $1, 2, 3, \dots$ v tej metriki Cauchyjevo in ali je konvergentno. Če velja slednje, določite njegovo limito.
3. [20 točk + 5 točk bonusa] Dana je funkcija $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ki deluje po predpisu $f(x) = x^2 - x$.

- a) Izračunajte razdaljo med funkcijo f in funkcijo $g(x) = 1$, in sicer v maksimum metriki na prostoru zveznih funkcij na $[0, 1]$.
b) [bonus] Katera funkcija $g_a(x) = a$ je v tej metriki najbližje funkciji f ?

4. [25 točk] Dana je funkcija $f(x) = 5 - \ln x$, ki jo gledamo na intervalu $[3, 4]$.

- a) [10 točk] Dokažite, da funkcija f dani interval preslika vase in da je na njem skrčitev.
b) [15 točk] Rešite enačbo $f(x) = x$ na dve decimalki natančno.

5. [25 točk] Dana je funkcija $f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x \leq \pi/2 \\ x & ; \pi/2 < x < \pi \end{cases}$.

- a) [15 točk] Razvijte funkcijo f v kosinusno Fourierovo vrsto na intervalu $(0, \pi)$.
b) [10 točk] Označimo vsoto dobljene Fourierove vrste z \bar{f} . Narišite graf te funkcije na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$. Posebej izračunajte še $\bar{f}(\pi/2)$.