Rešitve kolokvija iz Matematike 2 z dne 22. 11. 2011

Praktična matematika

1. Funkcija d ni metrika, ker je npr. $d\big((0,0),(0,1)\big) = 0$.

2. a) Ker za poljubna $m, n \in \mathbb{N}$ velja $\max\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\} > 0$, je res $d(m,n) \geq 0$ in $d(m,n) = 0 \Leftrightarrow m = n$. Simetrija je očitna. Dokažimo še trikotniško neenakost:

$$d(m,p) \leq d(m,n) + d(n,p)\,.$$

Če je $m = p$, je leva stran enaka nič in neenakost je očitna. Nadalje, če je $m = n$ ali $n = p$, velja enakost. Če pa so vsa tri stevila različna, velja:

$$\begin{aligned} d(m,p) &= \max\left\{\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{p}\right\} \leq \\ &\leq \max\Big\{\max\left\{\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{n}\right\}, \max\left\{\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{p}\right\}\Big\} \leq \\ &\leq \max\left\{\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{n}\right\} + \max\left\{\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{p}\right\} = \\ &= d(m,n) + d(n,p)\,. \end{aligned}$$

b) Naj bo $\varepsilon > 0$. Brž ko je $m, n > 1/\varepsilon$, je $d(m,n) < \varepsilon$, torej je zaporedje Cauchyjevo. Ni pa to zaporedje konvergentno: če je namreč $m \in \mathbb{N}$, je $d(m,n) = \frac{1}{m}$, brž ko je $n > m$, se pravi, da m ne more biti limita.

3. a) Če je d maksimum metrika, velja:

$$d(f,g) = \max_{x \in [0,1]} |x^2 - x - 1|\,.$$

Izraz na desni je enak maksimalni absolutni vrednosti funkcije $h(x) = x^2 - x - 1$ v robnih in stacionarnih točkah na $[0,1]$. Funkcija h ima stacionarno točko $1/2$ in velja $h(0) = -1$, $h(1/2) = -5/4$ in $h(1) = -1$. Torej je $d(f,g) = 5/4$.

b) Razdalja $d(f, g_a)$ je enaka maksimalni absolutni vrednosti funkcije $h_a(x) = x^2 - x - a$ v robnih in stacionarnih točkah na $[0,1]$. Tudi funkcija h ima stacionarno točko $1/2$ ter velja $h_a(0) = -a$, $h_a(1/2) = -1/4 - a$ in $h(1) = -a$. Torej velja:

$$d(f, g_a) = \max\Big\{|a|, \left|-\tfrac{1}{4} - a\right|\Big\} = \begin{cases} -a & ;\ a \leq -\frac{1}{8} \\ a + \frac{1}{4} & ;\ a \geq -\frac{1}{8} \end{cases}$$

in minimum je dosežen pri $a = -1/8$.

4. a) Velja $f'(x) = -\frac{1}{x}$, torej na $[3,4]$ velja $-\frac{1}{3} \leq f'(x) < 0$. To med drugim pomeni tudi, da je f padajoča funkcija. Nadalje velja $f(3) \doteq 3\text{'}901388 \in [3,4]$ in $f(4) \doteq 3\text{'}613076 \in [3,4]$. Ker je f padajoča, tudi za vsak $x \in [3,4]$ velja $3 \leq f(4) \leq f(x) \leq f(3) \leq 4$, torej f zares slika $[3,4]$ v $[3,4]$. Ker je tam $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$, je f na tem intervalu res skrčitev.

b) Če iteriramo $x_{n+1} = f(x_n)$, za $x_1 = 3$ dobimo:

$$3\,,\ 3\text{˙}901388\,,\ 3\text{˙}638668\,,\ 3\text{˙}708382\,,\ 3\text{˙}689404\,,\ 3\text{˙}694535\,,\ 3\text{˙}693145\ \ldots$$

od koder zaključimo, da je iskani koren v zahtevani natančnosti enak 3˙69.

5. Iz:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^\pi \pi\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}\,,$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^\pi x\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(n\pi) - \cos\frac{n\pi}{2}\right) = \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{n} - \frac{2}{\pi n^2} & ;\ n = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ \frac{4}{\pi n^2} & ;\ n = 2, 6, 10, 14, \ldots \\ \frac{1}{n} - \frac{2}{\pi n^2} & ;\ n = 3, 7, 11, 15, \ldots \\ 0 & ;\ n = 4, 8, 12, 16, \ldots \end{cases}\end{aligned}$$

dobimo:

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) = \frac{3\pi}{8} &- \\ &- \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)\cos x - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2\pi}\right)\cos(5x) - \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{5^2\pi}\right)\cos(9x) - \cdots \\ &+ \frac{1}{\pi}\cos(2x) + \frac{1}{3^2\pi}\cos(6x) + \frac{1}{5^2\pi}\cos(10x) + \cdots \\ &+ \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2\pi}\right)\cos(3x) + \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{7^2\pi}\right)\cos(7x) + \left(\frac{1}{11} - \frac{2}{11^2\pi}\right)\cos(11x) + \cdots\,,\end{aligned}$$

kjer je $\bar{f}$ periodična s periodo 2π in:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} -x & ;\ -\pi \le x < -\pi/2 \\ \pi/4 & ;\ x = -\pi/2 \\ 0 & ;\ x - \pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi/4 & ;\ x = \pi/2 \\ x & ;\ \pi/2 < x \le \pi \end{cases}.$$

Iz zgoraj zapisanega je razvidno, da je $\bar{f}(\pi/2) = \pi/4$. Graf: