Rešitve kolokvija iz Matematike 2 z dne 27. 11. 2012

Praktična matematika

1. Očitno je $d\big((x,y),(x,y)\big) = 0$. Če je $d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |x_1 + y_1 - x_2 - y_2| = 0$, to pomeni, da je $|x_1 - x_2| = 0$ in $|x_1 + y_1 - x_2 - y_2| = 0$, od koder najprej dobimo $x_1 = x_2$, nato pa še $y_1 = y_2$.
Simetrija sledi iz sodosti absolutne vrednosti:

$$\begin{aligned} d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) &= |x_1 - x_2| + |x_1 + y_1 - x_2 - y_2| = \\ &= |-(x_1 - x_2)| + |-(x_1 + y_1 - x_2 - y_2)| = \\ &= |x_2 - x_1| + |x_2 + y_2 - x_1 - y_1| = \\ &= d\big((x_2,y_2),(x_1,y_1)\big)\,. \end{aligned}$$

Za dokaz trikotniške neenakosti pa upoštevamo trikotniško neenakost za absolutno vrednost:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_3| &= |(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)| \le |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| \\ |x_1 + y_1 - x_3 - y_3| &= |(x_1 + y_1 - x_2 - y_2) + (x_2 + y_2 - x_3 - y_3)| \le \\ &\le |x_1 + y_1 - x_2 - y_2| + |x_1 + y_1 - x_3 - y_3| \end{aligned}$$

in ko seštejemo obe oceni, dobimo želeno trikotniško neenakost $d\big((x_1,y_1),(x_3,y_3)\big) \le d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) + d\big((x_2,y_2),(x_3,y_3)\big)$.
Iskana krogla je množica točk (x,y), ki zadoščajo neenačbi $|x-3| + |x+y-5| < 2$, ki jo lahko zapišemo tudi v obliki $|x-3| < 2 - |x+y-5|$, ta pa je ekvivalentna sistemu neenačb:

$$x - 3 < 2 - |x+y-5|\,, \quad 3 - x < 2 - |x+y-5|$$

oziroma:

$$|x+y-5| < 5 - x\,, \quad |x+y-5| < x - 1\,,$$

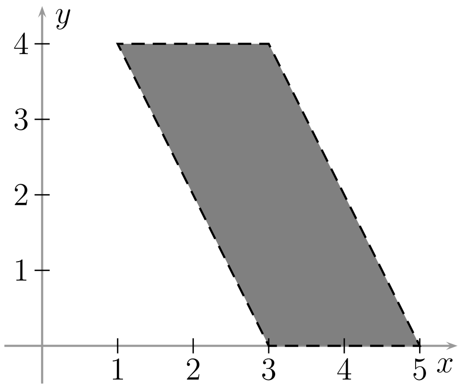
kar je spet ekvivalentno sistemu:

$$\begin{aligned} x + y - 5 &< 5 - x \\ 5 - x - y &< 5 - x \\ x + y - 5 &< x - 1 \\ 5 - x - y &< x - 1\,, \end{aligned}$$

tega pa lahko zapišemo v obliki:

$$0 < y < 4 \quad \text{in} \quad 6 < 2x + y < 10$$

Slika:



2. Notranjost: $(-\infty, 0)$, rob: $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

3. a) Rešitve dane enačbe ustrezajo ničlam funkcije $g(x) = f(x) - x$. Ker je g elementarna, je zvezna in ker je $g'(x) = -2\,e^{-x} - 1 < 0$, je g strogo padajoča. Nadalje je $g(0) = 2 > 0$ in $g(3) \doteq -0{\cdot}9 < 0$, zato ima g na intervalu $(0, 2)$ natanko eno ničlo, na intervalih $(-\infty, 0]$ in $[3, \infty)$ pa nobene: na prvem je $g(x) \geq g(0) > 0$, na drugem pa je $g(x) \leq g(3) < 0$. Torej ima g na celi realni osi natanko eno ničlo oz. dana enačba natanko eno rešitev.

b) Tak metrični prostor je npr. interval $[1, \infty)$. Za poljuben $x \geq 1$ namreč velja $f(x) \geq 2 \geq 1$ in še $|f'(x)| = 2\,e^{-x} \leq 2\,e^{-1} \doteq 0{\cdot}736 < 1$.

c) Za začetni približek $x_0 = 1$ dobimo naslednje zaporedje približkov:

$$1\,,\ 2{\cdot}73576\,,\ 2{\cdot}12969\,,\ 2{\cdot}23775\,,\ 2{\cdot}21340\,,\ 2{\cdot}21866\,,\ 2{\cdot}21751\,,\ 2{\cdot}21776\,.$$

Ker je $f'(x) = -2\,e^{-x} < 0$, rešitev enačbe leži med poljubnima zaporednima približkoma, torej v zahtevani natančnosti znaša $2{\cdot}218$.

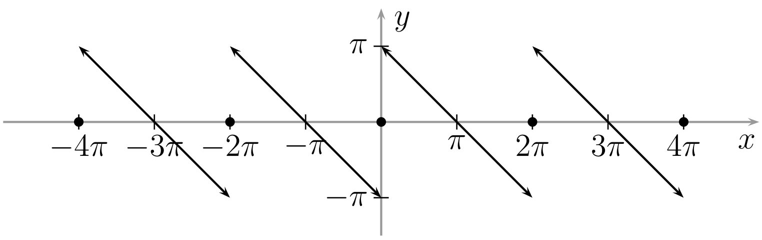
4. Iz:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}$$

dobimo:

$$f(x) = 2\left[\sin x + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \cdots\right].$$

Graf:



5. Velja:

$$\bar{f}(0) = \bar{f}(4) = f(4) = 5\,,$$
$$\bar{f}(1) = \bar{f}(3) = \bar{f}(5) = \frac{1}{2}\big(\lim_{x\downarrow 3} f(x) + \lim_{x\uparrow 5} f(x)\big) = \frac{1}{2}\big(f(3) + f(5)\big) = 5\,.$$

6. $f_x(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$

$g_x(x,y) = \left(3 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}\right) e^{1/x}, \quad g_y(x,y) = 2y\, e^{1/x},$

$h_x(x,y) = \dfrac{1}{x}, \quad h_y(x,y) = -\operatorname{tg} y.$