# Rešitve kolokvija iz Matematike 2 z dne 25. 1. 2011

Praktična matematika

**1.** a) Če vstavimo $x = 0$ in $y = 8$, dobimo $z^3 = 8$, torej $z = 2$. Če zvezo zapišemo v obliki $F(x, y, z) = 0$, kjer je $F(x, y, z) = z^3 + xz - y$, je očitno, da je $F$ diferenciabilna funkcija. Nadalje je $F_z(x, y, z) = 3z^2 + x$ in $F_z(0, 8, 2) = 12 \neq 0$, torej se da po izreku o implicitni funkciji spremenljivka $z$ v okolici točke $x = 0, y = 8, z = 2$ res izraziti kot diferenciabilna funkcija spremenljivk $x$ in $y$.

b) Zvezo kar parcialno odvajamo po $x$ in $y$, pri čemer pa $z$ obravnavamo kot funkcijo spremenljivk $x$ in $y$. Dobimo:

| V splošnem: | V naši točki: | |
|---|---|---|
| $3z^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + z + x \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0\,,$ | $12 \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2 = 0\,,$ | $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{6}\,,$ |
| $3z^2 \dfrac{\partial z}{\partial y} + x \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1\,,$ | $12 \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1\,,$ | $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{12}\,.$ |

**2.** $f_x(x, y) = 3x^2 - 6y - 39, \quad f_y(x, y) = 2y - 6x + 18.$
Stacionarni točki: $T_1(1, -6), \quad T_2(5, 6).$
$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{xy}(x, y) = -6, \quad f_{yy}(x, y) = 2.$
V $T_1$ je $H = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ in $K = -24$, torej tam ni ekstrema.
V $T_2$ pa je $H = \begin{bmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ in $K = 24$, torej je tam lokalni minimum.

**3.** *Prvi način.* Iščemo maksimum spremenljivke $x$ pri pogoju (vezi):

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\,,$$

torej nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$L = x - \lambda(x^2 + y^2)^2 + 2\lambda(x^2 - y^2)\,.$$

Velja $\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 4\lambda x(x^2 + y^2) + 2\lambda x$ in $\frac{\partial L}{\partial y} = -4\lambda y(x^2 + y^2) - 2\lambda y$. Iz $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ dobimo $-2\lambda y(2x^2 + 2y^2 + 1) = 0$. Zadnji faktor ne more biti nič, torej je bodisi $\lambda = 0$ bodisi $y = 0$. Za $\lambda = 0$ ne more biti $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, za $y = 0$ pa iz vezi dobimo $x^4 - 2x^2 = 0$, kar je res za $x = 0$ in $x = \pm\sqrt{2}$. Maksimalna vrednost koordinate $x$ bo torej $\sqrt{2}$.

*Drugi način.* Spremenljivko $x$ proglasimo za odvisno, spremenljivko $y$ pa za neodvisno (torej si predstavljamo, da ima krivulja enačbo $x = x(y)$). Tedaj bo $x$ maksimalen, če se bodisi ne da lokalno izraziti kot diferenciabilna funkcija spremenljivke $y$ bodisi je $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = 0$. Iz:

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)\,, \quad F_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2) - 4x$$

ugotovimo, da se $x$ ne da lokalno izraziti, kvečjemu če je $x = 0$ (sledi $y = 0$) ali pa $x^2 + y^2 = 1$ (to pa je v točkah $T_1\big(\sqrt{3}/2, 1/2\big)$, $T_2\big(\sqrt{3}/2, -1/2\big)$, $T_3\big(-\sqrt{3}/2, 1/2\big)$ in $T_4\big(-\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2\big)$).
Kjer se $x$ da izraziti kot diferenciabilna funkcija spremenljivke $y$, pa odvajamo po $y$:

$$4(x^2 + y^2)\left(x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + y\right) - 4x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + 4y = 0\,,$$

torej je:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{(x^2 + y^2 + 1)y}{(x^2 + y^2 - 1)x}$$

Desna stran je enaka nič, če je $y = 0$, od koder tako kot pri prvem načinu dobimo $x = \pm\sqrt{2}$. Ko to primerjamo z ostalimi kandidati, vidimo, da je maksimalna vrednost koordinate $x$ enaka $\sqrt{2}$.

**4.** Velja:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{x^2}\,, \quad \kappa = \frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\,.$$

Pri $x = 1$ je torej $\kappa = -2^{-3/2} = -1/\big(2\sqrt{2}\big)$. Sicer pa iz:

$$\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}x} = \frac{2x^2 - 1}{(x^2+1)^{5/2}}$$

dobimo, da je ukrivljenost (po absolutni vrednosti) maksimalna pri $x = \sqrt{2}/2$.

**5.** Ker je $x = 2t = 1$, je $t = \frac{1}{2}$. Nadalje gremo lahko na vsaj dva načina.

*Prvi način*: z uporabo splošnih formul za fleksijsko in torzijsko ukrivljenost. Velja:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} &= (2, 2t, t^2) = \big(2, 1, \tfrac{1}{4}\big)\,,\\
\ddot{\mathbf{r}} &= (0, 2, 2t) = (0, 2, 1)\,,\\
\dddot{\mathbf{r}} &= (0, 0, 2) = (0, 0, 2)\,.
\end{aligned}$$

Nadalje je:

$$\|\dot{\mathbf{r}}\| = \tfrac{9}{4}\,, \quad \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \big(\tfrac{1}{2}, -2, 4\big)\,, \quad \|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\| = \tfrac{9}{2}\,.$$

Fleksijska ukrivljenost: $\kappa = \dfrac{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3} = \dfrac{32}{81}$.

Torzijska ukrivljenost: $\omega = \dfrac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|^2} = \dfrac{32}{81}$.

*Drugi način*: po definiciji ukrivljenosti. Podobno kot prej izračunamo:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} &= (2, 2t, t^2)\,, & \dot{\mathbf{r}}\big|_{t=1/2} &= \big(2, 1, \tfrac{1}{4}\big)\,,\\
\|\dot{\mathbf{r}}\| &= \sqrt{4 + 4t^2 + 4t^4} = 2 + t^2\,, & \|\dot{\mathbf{r}}\|\big|_{t=1/2} &= \tfrac{9}{4}\,.
\end{aligned}$$

Iz $\|\dot{\mathbf{r}}\|$ bi lahko dobili naravni parameter $s = 2t + t^3/3$, vendar pa je izražava z naravnim parametrom težka. Vseeno pa lahko odvod katere koli spremenljivke, recimo $u$, po naravnem parametru izrazimo z odvodom po $t$ s pomočjo verižnega pravila:

$$u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{u}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} .$$

Tako dobimo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \mathbf{r}' = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} = \left(\frac{2}{2+t^2}, \frac{2t}{2+t^2}, \frac{t^2}{2+t^2}\right), \\
\dot{\mathbf{t}} &= \left(-\frac{4t}{(2+t^2)^2}, \frac{4-2t^2}{(2+t^2)^2}, \frac{4t}{(2+t^2)^2}\right), & \dot{\mathbf{t}}\Big|_{t=1/2} &= \frac{8}{81}(4,-7,4), \\
\kappa &= \|\mathbf{t}'\| = \frac{\dot{\mathbf{t}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|}, & \kappa\Big|_{t=1/2} &= \frac{32}{81}.
\end{aligned}$$

Nadalje je:

$$\begin{aligned}
\|\dot{\mathbf{t}}\| &= \frac{\sqrt{16+16t^2+4t^4}}{(2+t^2)^2} = \frac{2}{2+t}, \\
\mathbf{n} &= \frac{\dot{\mathbf{t}}}{\|\dot{\mathbf{t}}\|} = \left(-\frac{2t}{2+t^2}, \frac{2-t^2}{2+t^2}, \frac{2t}{2+t^2}\right), & \mathbf{n}\Big|_{t=1/2} &= \frac{1}{9}(4,7,4), \\
\mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \left(\frac{t^2}{2+t^2}, -\frac{2t}{2+t^2}, \frac{2}{2+t^2}\right), & \mathbf{b}\Big|_{t=1/2} &= \frac{1}{9}(1,-4,8),
\end{aligned}$$

pri čemer bi lahko binormalo dobili tudi po formuli $\mathbf{b} = \dfrac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}$. Končno je:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{b}} &= \left(\frac{4t}{(2+t^2)^2}, \frac{2t^2-4}{(2+t^2)^2}, -\frac{4t}{(2+t^2)^2}\right), & \dot{\mathbf{b}}\Big|_{t=1/2} &= \frac{8}{81}(4,-7,-4), \\
\mathbf{b}' &= \frac{\dot{\mathbf{b}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|}, & \mathbf{b}'\Big|_{t=1/2} &= \frac{32}{729}(4,-7,-4) = \\
& & &= -\frac{32}{81}\mathbf{n}\Big|_{t=1/2},
\end{aligned}$$

od koder dobimo še torzijsko ukrivljenost: $\omega\big|_{t=1/2} = 32/81$.

**6.** Ploskev je podana v eksplicitni obliki, kar pomeni, da je parametrizirana kar z $x$ in $y$. Velja torej:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= (x, y, x^3y^2), \\
\mathbf{r}_x &= (1, 0, 3x^2y^2), & \mathbf{r}_x\Big|_{x=y=1} &= (1,0,3), \\
\mathbf{r}_y &= (0, 1, 2x^3y), & \mathbf{r}_y\Big|_{x=y=1} &= (0,1,2),
\end{aligned}$$

od koder dobimo $E = 10$, $F = 6$, $G = 5$ in še $EG - F^2 = 14$. Nadalje iz:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{xx} &= (0, 0, 6xy^2)\,, & \mathbf{r}_{xx}\big|_{x=y=1} &= (0, 0, 6)\,, \\
\mathbf{r}_{xy} &= (0, 0, 6x^2y)\,, & \mathbf{r}_{xy}\big|_{x=y=1} &= (0, 0, 6)\,, \\
\mathbf{r}_{yy} &= (0, 0, 2x^3)\,, & \mathbf{r}_{yy}\big|_{x=y=1} &= (0, 0, 2)
\end{aligned}
$$

dobimo $L = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$, $M = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$ in $N = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

Gaussova ukrivljenost: $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\dfrac{6}{49}$.