# Rešitve kolokvija iz Matematike 2 z dne 17. 1. 2012

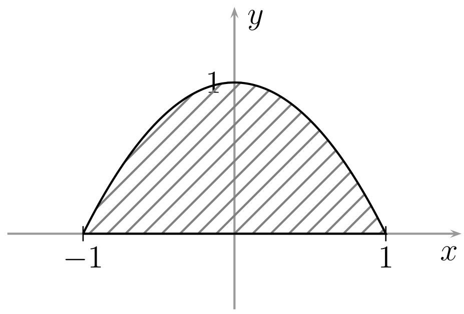
Praktična matematika

**1.** Iz:

$$\cos(x+y^2) = 1 - \frac{(x+y^2)^2}{2} + \frac{(x+y^2)^4}{24} - \cdots$$

dobimo $T_4(x,y) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - xy^2 - \dfrac{y^4}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

**2.** Skica definicijskega območja:




*Oglišči*: $f(-1,0) = -1, \quad f(1,0) = 1.$
*Rob* $y = 0$: $f(x,0) = x$, tam ni ekstremov.
*Rob* $x = 1 - x^2$, $-1 < y < 1$: $f(x, 1-x^2) = x\,e^{1-x^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,1-x^2) = (1-2x^2)e^{1-x^2}$,
$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2e}}{2}, \quad f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2e}}{2}.$
*Notranjost*: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^y, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x\,e^y$, stacionarnih točk v notranjosti ni.
Ker je $e > 2$, je tudi $\dfrac{\sqrt{2e}}{2} > \dfrac{\sqrt{2 \cdot 2}}{2} = 1$, zato je:

$$\min_D f = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2e}}{2} \qquad \text{in} \qquad \max_D f = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2e}}{2}.$$

**3.** Pri $x = 0$ in $y = 2$ je $z = -4$. Nasploh pa je zveza oblike $F(x,y,z) = 0$, kjer je $F(x,y,z) = x\,e^{y+z} + 2y + z$. Velja:

$$F_x(x,y,z) = e^{y+z}, \qquad F_y(x,y,z) = x\,e^{y+z} + 2, \qquad F_z(x,y,z) = x\,e^{y+z} + 1,$$
$$F_x(0,2,-4) = e^{-2}, \qquad F_y(0,2,-4) = 2, \qquad F_z(0,2,-4) = 1.$$

Ker je $F$ parcialno zvezno odvedljiva funkcija in ker je $F_z(0,2,-4) \neq 0$, lahko po izreku o implicitni funkciji v okolici točke $(0,2,-4)$ eksplicitno izrazimo $z = f(x,y)$ in velja:

$$f_x(0,2) = -\frac{F_x(0,2,-4)}{F_z(0,2,-4)} = -e^{-2}\,, \qquad f_y(0,2) = -\frac{F_y(0,2,-4)}{F_z(0,2,-4)} = -2\,.$$

**4.** Naravni parameter usmerimo recimo tako, da bo:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,,$$

od koder sledi:

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2} + C\,.$$

Če postavimo npr. $C = 0$, dobimo naravno parametrizacijo:

$$x = s^{2/3} - \frac{4}{9}\,, \qquad y = \left(s^{2/3} - \frac{4}{9}\right)^{3/2}\,.$$

**5.** Najprej izračunamo koordinate in odvode:

| | V splošnem | Pri $t = 1$ |
|---|---|---|
| $\vec{r}$ | $(t^2, \ln t, -3t)$ | $(1, 0, -3)$ |
| $\dot{\vec{r}}$ | $(2t, 1/t, -3)$ | $(2, 1, -3)$ |
| $\ddot{\vec{r}}$ | $(2, -1/t^2, 0)$ | $(2, -1, 0)$ |
| $\dddot{\vec{r}}$ | $(0, 2/t^3, 0)$ | $(0, 2, 0)$ |

Pritisnjena ravnina je pravokotna na vektor $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = (-3, -6, -4)$ in njena enačba je $3x + 6y + 4z + 9 = 0$.

Fleksijska ukrivljenost: $\kappa = \dfrac{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\|}{\|\dot{\vec{r}}\|^3} = \dfrac{\sqrt{61}}{14\sqrt{14}}$.

Torzijska ukrivljenost: $\omega = \dfrac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}\,]}{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\|^2} = -\dfrac{12}{61}$.

**6.** Velja $\vec{r}_u = (1, 2u, v)$ in $\vec{r}_v = (2v, 1, u)$. Pri $u = 1$ in $v = 2$ je:

$$\vec{r} = (5,3,2)\,, \quad \vec{r}_u = (1,2,2)\,, \quad \vec{r}_v = (4,1,1)\,.$$

Tangentna ravnina je pravokotna na vektor $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (0, 7, -7)$ in njena enačba je $y - z = 1$.