Rešitve kolokvija iz Matematike 2 z dne 22. 1. 2013

Praktična matematika

1. Najprej iz verižnega pravila dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = e^{2v}\,\frac{\partial z}{\partial x} + (1+e^{2v})\,\frac{\partial z}{\partial y}\,,\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 2u\,e^{2v}\,\frac{\partial z}{\partial x} + 2u\,e^{2v}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,.\end{aligned}$$

Zdaj moramo to izraziti še z x in y. Velja $u = y - x$, torej $e^{2v} = x/(y-x)$. Sledi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{x}{y-x}\,\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{y-x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,,\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= 2x\,\frac{\partial z}{\partial x} + 2x\,\frac{\partial z}{\partial y}\,.\end{aligned}$$

2. Iz parcialnih odvodov:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 + 3x^2$$

dobimo, da je v notranjosti ekstremov ni. Ekstreme na robu, ki ima enačbo $x^2 + (y-2)^2 = 1$, lahko poiščemo na vsaj dva načina.

Prvi način: vse izrazimo z y. Glede na to, da je $x = \pm\sqrt{1-(y-2)^2}$, rob razpade na dva dela, ki se stikata v dveh ogliščih, kjer velja:

$$f(0,1) = 2\,, \qquad f(0,3) = 6\,.$$

V notranjosti obeh dobljenih delov roba pa velja:

$$z = f(x,y) = \Big(2 + 3\big(1-(y-2)^2\big)\Big)y = -3y^3 + 12y^2 - 7y$$

Poiskati moramo stacionarne točke te funkcije za $1 < y < 3$. Iz $\mathrm{d}z/\mathrm{d}y = -9y^2 + 24y - 7$ dobimo $y = 1/3$ in $y = 7/3$. Ker mora biti $1 \le y \le 3$, v poštev pride le $y = 7/3$. Za to vrednost spremenljivke y najprej izračunamo $x = \pm 2\sqrt{2}/3$, nato pa še $z = 98/9$.

Minimum naše funkcije je torej 2, maksimum pa $98/9 \doteq 10{\cdot}889$.

Drugi način: z Lagrangeovimi multiplikatorji. Nastavimo:

$$L = (2+3x^2)y - \lambda\big(x^2 + (y-2)^2\big)$$

in dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned}6xy - 2\lambda x &= 0\,,\\ 2 + 3x^2 - 2\lambda(y-2) &= 0\,,\\ x^2 + (y-2)^2 &= 1\,.\end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo, da mora biti bodisi $x = 0$ bodisi $\lambda = 3y$. Če je $x = 0$, iz tretje enačbe dobimo, da mora biti bodisi $y = 1$ bodisi $y = 3$, če je $\lambda = 3y$, pa iz druge enačbe dobimo $2 + 3x^2 - 6y(y-2) = 0$. Ko od tega odštejemo trikratnik tretje enačbe, dobimo $2 - 6y(y-2) - 3(y-2)^2 = -3$ oziroma $5 - (y-2)(9y-6) = 0$ oziroma $-9y^2 + 24y - 7 = 0$, kar nam spet da $y = 1/3$ in $y = 7/3$. Dobimo torej natančno iste kandidate za ekstreme kot pri prvem načinu.

3. Velja:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \left(e^t,\ 2\,e^{3t/2},\ 2\,e^{2t}\right), \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right\| = \sqrt{e^{2t} + 4\,e^{3t} + 4\,e^{4t}} = e^t + 2\,e^{2t}\,.$$

Sledi:

$$\vec{r}\,' = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{e^t + 2\,e^{2t}}\left(e^t,\ 2\,e^{3t/2},\ 2\,e^{2t}\right) = \left(\frac{1}{1 + 2\,e^t},\ \frac{2\,e^{t/2}}{1 + 2\,e^t},\ \frac{2\,e^t}{1 + 2\,e^t}\right).$$

4. Najprej iz druge enačbe izrazimo $y = 1 - x^2$. Ko to vstavimo v prvo enačbo, dobimo:

$$(1 + x)(1 - x^2) = (1 - x)z\,.$$

Ker je $x \neq 1$, lahko delimo z $1 - x$ in dobimo iskano parametrizacijo:

$$y = 1 - x^2\,, \qquad z = (1 + x)^2\,.$$

Pri $x = -2$ je $y = -3$ in $z = 1$. Nadalje, če s piko označimo odvod po x, velja:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}} &= (1, -2x, 2(1 + x)) = (1, 4, -2)\,,\\
\ddot{\vec{r}} &= (0, -2, 2)\,,\\
\dddot{\vec{r}} &= (0, 0, 0)\,.
\end{aligned}$$

V naši točki torej velja:

$$\kappa = \frac{\left\|(1, 4, -2) \times (0, -2, 2)\right\|}{\left\|(1, 4, -2)\right\|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{21\sqrt{7}} \doteq 0\text{˙}0509\,.$$

Ker je povsod $\dddot{\vec{r}} = 0$, je torzijska ukrivljenost ω povsod enaka nič. Naša krivulja je torej ravninska. Iz parametrizacije se da razbrati, da leži na ravnini $-2x + y + z = 2$.

5. Najprej izrazimo $z = 3 - e^{xy-6}$, torej v dani točki velja $z = 2$. Nato izračunamo še:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -y\,e^{xy-6}\,, & p &= -3\,,\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -x\,e^{xy-6}\,, & q &= -2\,,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -y^2\,e^{xy-6}\,, & r &= -9\,,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= -(1 + xy)\,e^{xy-6}\,, & s &= -7\,,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -x^2\,e^{xy-6}\,, & t &= -4\,.
\end{aligned}$$

Tangentna ravnina: $3X + 2Y + Z = 14$.
Velja $EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2 = 14$, $L = -\dfrac{9}{\sqrt{14}}$, $M = -\dfrac{7}{\sqrt{14}}$ in $N = -\dfrac{4}{\sqrt{14}}$.
Gaussova ukrivljenost: $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\dfrac{13}{196} \doteq -0^{\cdot}0663$.