Rešitve kolokvija iz Matematike 2 z dne 20. 4. 2011

Praktična matematika

1. Označimo $f(t,x) := \dfrac{e^{-tx}}{t^x}$. Integral razdelimo na dvoje. Ker za $0 \le t \le 1$ velja $\min\{e^{-x},1\} \le e^{-tx} \le \max\{e^{-x},1\}$, integral $\int_0^1 f(t,x)\,\mathrm{d}t$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira integral $\int_0^1 \mathrm{d}t/t^x$, le-ta pa konvergira za $x < 1$. Integral $\int_1^\infty f(t,x)\,\mathrm{d}t$ pa za $x \le 0$ zagotovo divergira, saj je integrand konstanten ali pa narašča proti neskončno. Za $x > 0$ pa omenjeni integral konvergira, ker gre eksponentna funkcija proti nič hitreje kot katera koli potenca.

Sklep: integral konvergira za $0 < x < 1$.

2. Najprej zaradi simetrije velja:

$$I := \int_{-3}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

S substitucijo $x^2 = 9t$ dobimo:

$$I = 9\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\,\mathrm{d}t = 9\,\mathrm{B}\big(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\big) = 9\,\frac{\Gamma\big(\tfrac{3}{2}\big)\,\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big)}{\Gamma(2)} = \frac{9\pi}{2}\,.$$

3. Krivulje omejujejo eno samo (omejeno) območje $1 \le xy \le 8$, $x \le y^2 \le 64x$. S substitucijo:

$$u = xy\,,\ v = \frac{y^2}{x}\,,\ x = u^{2/3}v^{-1/3}\,,\ y = u^{1/3}v^{1/3}\,,\ J = \frac{1}{3v}$$

dobimo:

$$\iint_{\substack{1\le xy\le 8\\ x\le y^2\le 64x}} \frac{y}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\iint_{\substack{1\le u\le 8\\ 1\le v\le 64}} v^{-1/2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_1^8 \mathrm{d}u \int_1^{64} v^{-1/2}\,\mathrm{d}v = \frac{98}{3}\,.$$

4. Dani integral najprej pretvorimo v dvojni integral:

$$\iint_{\substack{x\ge 0\\ 0\le y\le 1+e^{-x}}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Če želimo, da gre zunanji integral po y, notranji pa po x, moramo vse neenačbe, v katerih nastopata obe spremenljivki, rešiti na x. V našem primeru je to neenačba $y \le 1 + e^{-x}$. Če je $y \le 1$, to velja za vsak x, sicer pa velja za $x \le -\ln(y-1)$. Ta neenačba pa je združljiva s pogojem $x \ge 0$ le tedaj, ko je $-\ln(y-1) \ge 0$, to pa je tedaj, ko je $y \le 2$. Tako dobimo, da se naš integral prevede na naslednjo vsoto dvakratnih integralov:

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^{\ln(y-1)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

5. Masa danega telesa je sicer znana, a jo vseeno še enkrat izračunamo. Po uvedbi sferičnih koordinat:

$$x = r\cos\varphi\cos\theta\,, \quad y = r\cos\varphi\sin\theta\,, \quad z = r\sin\varphi\,, \quad J = r^2\cos\varphi$$

dobimo:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ x,y,z\ge 0}} \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho \iiint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le\pi/2\\ 0\le\varphi\le\pi/2}} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \rho\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\rho\,\pi}{6} \end{aligned}$$

Težišče ima koordinate (x^*, y^*, z^*), kjer je:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{m}\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ x,y,z\ge 0}} \rho\,x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\rho}{m}\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\rho\,\pi}{16m} = \frac{3}{8} \\ y^* &= \frac{1}{m}\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ x,y,z\ge 0}} \rho\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\rho}{m}\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\rho\,\pi}{16m} = \frac{3}{8} \\ z^* &= \frac{1}{m}\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ x,y,z\ge 0}} \rho\,z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\rho}{m}\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\rho\,\pi}{16m} = \frac{3}{8}\,. \end{aligned}$$

Opomba: da so vse tri koordinate enake, je jasno iz simetrije. Dovolj je torej izračunati samo eno koordinato.