Rešitve kolokvija iz Matematike 2 z dne 5. 6. 2012

Praktična matematika

1. Najprej iz:

$$\operatorname{rot}\vec{R} = \begin{bmatrix} (2a-b)x^3 \\ (b-6)x^2 \\ (3-a)x^2 \end{bmatrix} e^{ay+bz}$$

dobimo, da je polje potencialno natanko tedaj, ko je $a = 3$ in $b = 6$. Njegov potencial je enak:

$$\frac{x^3}{3}\, e^{3y+6z} + C\,.$$

2. Nalogo najhitreje rešimo z uporabo Gaussovega izreka. Ni namreč težko izračunati $\operatorname{div}\vec{R} = 2$. Če našo kocko označimo s Q, potem velja:

$$\iint_{\partial Q} \vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P = \iiint_Q \operatorname{div}\vec{R}\,\mathrm{d}V = 2\,V(Q) = 2\,.$$

Nalogo pa lahko rešimo tudi neposredno. Kocka ima šest osnovnih ploskev:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y,z)\,;\, 1 \le x, y \le 2,\ z = 1\}\,, & A_2 &= \{(x,y,z)\,;\, 1 \le x, y \le 2,\ z = 2\}\,, \\ A_3 &= \{(x,y,z)\,;\, 1 \le x, z \le 2,\ y = 1\}\,, & A_4 &= \{(x,y,z)\,;\, 1 \le x, z \le 2,\ y = 2\}\,, \\ A_5 &= \{(x,y,z)\,;\, 1 \le y, z \le 2,\ x = 1\}\,, & A_6 &= \{(x,y,z)\,;\, 1 \le y, z \le 2,\ x = 2\}\,. \end{aligned}$$

Ploskvi A_1 in A_2 lahko parametriziramo kar z x in y. Na ploskvi A_1 normala kaže navzdol, zato je $\vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, torej je:

$$\iint_{A_1} \vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P = -\iint_{1\le x,y\le 2} (x+y)\ln(x+y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Na ploskvi A_2 pa normala kaže navzgor, zato je $\vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, torej je:

$$\iint_{A_2} \vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P = \iint_{1\le x,y\le 2} (x+y)\ln(x+y+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Izračunajmo:

$$\begin{aligned}
\iint_{1\le x,y\le 2} (x+y)\ln(x+y+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_1^2\int_1^2 (x+y)\ln(x+y+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_1^2 \left(\frac{(x+y)^2-a^2}{2}\ln(x+y+a) - \frac{(x+y)^2}{4} + a(x+y)\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}\mathrm{d}y = \\
&= \int_1^2 \Bigg(\frac{(y+2)^2-a^2}{2}\ln(y+a+2) - \frac{(y+1)^2-a^2}{2}\ln(y+a+1) - \\
&\quad - \frac{2y+3}{4} + a\Bigg)\mathrm{d}y = \\
&= \Bigg(\frac{(y+2)^3-3a^2(y+2)-2a^3}{6}\ln(y+a+2) - \\
&\quad - \frac{(y+1)^3-3a^2(y+1)-2a^3}{6}\ln(y+a+1) - \\
&\quad - \frac{(y+a)^2}{6} - \frac{y+a}{2} - \frac{7}{18} + \frac{a^2}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{3y}{4} + ay\Bigg)\Bigg|_1^2 = \\
&= \frac{32-6a^2-a^3}{3}\ln(a+4) - \frac{27-9a^2-2a^3}{3}\ln(a+3) + \\
&\quad + \frac{4-3a^2-a^3}{3}\ln(a+2) + \frac{2a}{3} - \frac{5}{2}\,.
\end{aligned}$$

Sledi:

$$\iint_{A_1} \vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P = -\frac{25}{3}\ln 5 + \frac{16}{3}\ln 4 + \frac{11}{6}\,, \qquad \iint_{A_2} \vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P = \frac{25}{3}\ln 5 - \frac{16}{3}\ln 4 - \frac{7}{6}\,,$$

torej je:

$$\iint_{A_1} \vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P + \iint_{A_2} \vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P = \frac{2}{3}\,.$$

Podobno je tudi:

$$\iint_{A_3} \vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P + \iint_{A_4} \vec{R}\vec{N}\mathrm{d}P = \iint_{A_5} \vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P + \iint_{A_6} \vec{R}\vec{N}\mathrm{d}P = \frac{2}{3}\,.$$

Sledi $\displaystyle\iint_{\partial Q} \vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P = 2$, tako kot prej.

3. Vrtež razdelimo na tri korake in na vsakem koraku spremljamo, kako se preslika točka z.

Prvi korak: premik za $-(1+2i)$. Točka z se preslika v $z_1 := z - 1 - 2i$.

Drugi korak: vrtež za 120° v smeri urinega kazalca, kar je za kot $-2\pi/3$ v pozitivni

smeri. Točka z se zdaj preslika v:

$$z_2 := \left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) z_1 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) z_1 =$$
$$= -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}\right) z + \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right).$$

Tretji korak: premik za $1 + 2i$. Točka z se zdaj preslika v:

$$z_2 + 1 + 2i = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}\right) z + \frac{3}{2} - \sqrt{3} + \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right).$$

4. Singularnost je tam, kjer je imenovalec enak nič, torej $\cos z = 1$. To velja za $z = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Edina singularnost v enotskem krogu je torej izhodišče. Iz Taylorjevega razvoja:

$$1 - \cos z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \cdots$$

sledi, da ima imenovalec ničlo druge stopnje, števec pa ima seveda ničlo prve stopnje. Torej ima funkcija f v izhodišču pol prve stopnje. Glavni del Laurentov vrste torej vsebuje le člen z residuom, ki je enak:

$$c_{-1} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{1 - \cos z} = 2\,.$$

Glavni del Laurentove vrste je torej $2/z$.

5. Velja:

$$J := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{4 + x^2} = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

kjer je $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{4 + x^2} = \dfrac{e^{iz}}{(z - 2i)(z + 2i)}$. Za $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ velja:

$$\left|e^{iz}\right| = \left|e^{-y+ix}\right| = e^{-y}\left|e^{ix}\right| = e^{-y} \leq 1\,,$$

torej za $|z| > 2$ velja:

$$|zf(z)| \leq \frac{|z|}{|z|^2 - 4}\,,$$

od koder sledi $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ \mathrm{Im}\, z\geq 0}} zf(z) = 0$.

Funkcija f ima dva pola stopnje 1, in sicer v $2i$ in $-2i$. Torej bo:

$$J = \mathrm{Re}\Big[2\pi i\,\mathrm{Res}(f, 2i)\Big]\,.$$