Rešitve kolokvija iz Matematike 2 z dne 13. 6. 2013

Praktična matematika

1. a) Iz $\dfrac{\vec r}{r^2} = \dfrac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$ dobimo:

$$\operatorname{div}\frac{\vec r}{r^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Izračunajmo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2+z^2} &= \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,,\\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2+z^2} &= \frac{z^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,,\\
\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{x^2+y^2+z^2} &= \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Po seštetju in krajšanju končno dobimo:

$$\operatorname{div}\frac{\vec r}{r^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{r^2}\,.$$

b) Če pišemo $\vec a = (u,v,w)$, lahko dano skalarno polje zapišemo v obliki:

$$\langle \vec r, \vec a\rangle - r^2 = ux + vy + wz - x^2 - y^2 - z^2\,.$$

Parcialni odvodi so:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\langle \vec r, \vec a\rangle - r^2\Big) = u - 2x\,,\quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\langle \vec r, \vec a\rangle - r^2\Big) = v - 2y\,,\quad \frac{\partial}{\partial z}\Big(\langle \vec r, \vec a\rangle - r^2\Big) = w - 2z\,.$$

Sledi:

$$\operatorname{grad}\big(\langle \vec r, \vec a\rangle - r^2\big) = \vec a - 2\vec r.$$

2. *Prvi način*: neposredno. Integral razdelimo na tri dele: naj gre K_1 premočrtno od $(1,0,0)$ proti $(0,1,0)$, K_2 premočrtno od $(0,1,0)$ proti $(0,0,1)$ in K_3 premočrtno od $(0,0,1)$ proti $(1,0,0)$. Na K_1 vpeljemo parametrizacijo:

$$\vec r = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{d}\vec r = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{d}t\,, \quad \vec R = \begin{bmatrix} t^2 \\ -t^2+2t-1 \\ 1-2t \end{bmatrix}; \quad t \text{ gre od } 0 \text{ do } 1\,,$$

iz katere sledi:

$$\int_{K_1} \vec R\,\mathrm{d}\vec r = \int_0^1 (-2t^2+2t-1)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\,.$$

Podobno dobimo še $\displaystyle\int_{K_2} \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{K_3} \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{2}{3}$. Dani integral je torej enak -2.

Drugi način: s pomočjo Stokesovega izreka. Dana krivulja omejuje trikotnik, ki ga določajo enačba in neenačbe:

$$x + y + z = 1\,, \quad x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,, \quad z \geq 0\,.$$

Parametriziramo ga lahko v obliki:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{bmatrix}\;; \qquad x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,, \quad x + y \leq 1\,.$$

Preverimo, ali izbrana parametrizacija porodi orientacijo, ki je skladna orientaciji roba. Velja:

$$\vec{r}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\,, \quad \vec{r}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\,, \quad \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\,, \quad \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\,.$$

Nadalje na K_1 (glej prvi način) velja:

$$\vec{r}_t = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\,, \quad \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\,.$$

Vektorski produkt $\vec{t} \times \vec{N} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ kaže stran od trikotnika, saj je za dovolj majhen $\varepsilon > 0$ točka $\vec{r} + \varepsilon\vec{t} \times \vec{N}$ od trikotnika oddaljena za red velikosti ε, medtem ko točka $\vec{r} - \varepsilon\vec{t} \times \vec{N}$ leži na trikotniku. Zato parametrizaciji trikotnika in njegovega roba določata skladni orientaciji teh dveh objektov.

Preden uporabimo Stokesov izrek, potrebujemo še rotor. Velja:

$$\operatorname{rot} \vec{R} = \begin{bmatrix} -2y - 2z \\ -2z - 2x \\ -2x - 2y \end{bmatrix}\,,$$

na izbranem trikotniku, ki ga označimo z S, pa je:

$$\operatorname{rot} \vec{R} = \begin{bmatrix} 2x - 2 \\ 2y - 2 \\ -2 \end{bmatrix}\,,$$

Torej je:

$$\int_K \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{R}, \vec{N} \rangle\,\mathrm{d}P = \iint_{\substack{x\geq0 \\ y\geq0 \\ x+y\leq1}} \left\langle \begin{bmatrix} 2x - 2 \\ 2y - 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = -\iint_{\substack{x\geq0 \\ y\geq0 \\ x+y\leq1}} 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= -2\,,$$

kar je isto kot prej.

3. Integral lahko izračunamo kar tako kot v realnem, saj ima integrand primitivno funkcijo – s substitucijo $w = z^2 + 1$, $\mathrm{d}w = 2z\,\mathrm{d}z$, dobimo:

$$\int \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}w}{w^2} = -\frac{1}{2w} + C = -\frac{1}{2(z^2+1)} + C\,.$$

Za vrednost iskanega integrala je pomembno le še to, da gre integracijska krivulja K od $-2i$ do $2i$. Velja torej:

$$\int_K \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)} = -\left.\frac{1}{2(z^2+1)}\right|_{-2i}^{2i} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0\,.$$

Opomba. Integral bi lahko izračunali tudi z vpeljavo substitucije v določeni integral. Dobili bi integral po novi krivulji, ki bi šla od -3 do -3 in bi bila torej sklenjena. In čeprav bi šla okoli pola, je integral enak nič, ker ima novi integrand $w \mapsto 1/(2w^2)$ primitivno funkcijo $w \mapsto -1/(2w)$.

4. Števec ima v izhodišču ničlo druge stopnje. Iz Taylorjeve vrste:

$$z - \sin z = \frac{z^3}{6} - \frac{z^5}{120} + \cdots$$

pa dobimo, da ima imenovalec ničlo tretje stopnje. Torej ima funkcija f pol prve stopnje. Zato glavni del Laurentove vrste sestavlja le člen $c_{-1}z^{-1}$, kjer je:

$$c_{-1} = \lim_{z\to 0} z\,f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^3}{z - \sin z} = \lim_{z\to 0}\frac{z^3}{\frac{z^3}{6} - \cdots} = -6\,.$$

5. Označimo $f(z) = z^2/(z^4+16)$. Ker je $\lim_{|z|\to\infty} z\,f(z) = 0$, je integral enak vsoti ostankov (residuov) funkcije f na zgornji polravnini, pomnoženi z $2\pi i$. Ker je $z^4 + 16 = 0$ pri $z^2 = \pm 4i$, torej pri $z = \sqrt{2}(1+i)$, $z = \sqrt{2}(1-i)$, $z = \sqrt{2}(-1+i)$ in $z = \sqrt{2}(-1-i)$, je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+16}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\Big[\mathrm{Res}\big(f, \sqrt{2}(1+i)\big) + \mathrm{Res}\big(f, \sqrt{2}(-1+i)\big)\Big]\,.$$

Ker ima imenovalec $\big(z-\sqrt{2}(1+i)\big)\big(z-\sqrt{2}(1-i)\big)\big(z-\sqrt{2}(-1+i)\big)\big(z-\sqrt{2}(-1-i)\big)$ same enostavne ničle, so vsi poli prve stopnje. Torej velja:

$$\mathrm{Res}\big(f, \sqrt{2}(1+i)\big) = \left.\frac{z^2}{\big(z-\sqrt{2}(-1+i)\big)\big(z-\sqrt{2}(1-i)\big)\big(z-\sqrt{2}(-1-i)\big)}\right|_{z=1+i} = \\ = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{16}$$

in:

$$\mathrm{Res}\big(f, \sqrt{2}(-1+i)\big) = \left.\frac{z^2}{\big(z-\sqrt{2}(1+i)\big)\big(z-\sqrt{2}(1-i)\big)\big(z-\sqrt{2}(-1-i)\big)}\right|_{z=1+i} = \\ = \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{16}\,.$$

Sledi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+16}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\left(\frac{\sqrt{2}(1-i)}{16} + \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{16}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\,.$$