

3. DOMAČA NALOGA

3.1 Določi D_f in skiciraj nivojnice funkcij

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x^2 + y^2}{x + y} \text{ in } g(x, y) = \sqrt{\sin x \sin y}.$$

3.2 Funkcijo

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

imenujemo toplotno jedro.

- (1) Določi definicijsko območje funkcije.
- (2) Preveri, da funkcija ustreza enačbi $f_t = f_{xx}$.
- (3) Izračunaj limite $\lim_{t \rightarrow 0} f(x, t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, t)$.
- (4) Za vsak fiksen x izračunaj ekstreme funkcije $g(t) = f(x, t)$ in skiciraj njen graf.
- (5) Za vsak fiksen t izračunaj ekstreme funkcije $h(x) = f(x, t)$ in skiciraj njen graf.
- (6) Skiciraj nivojnice funkcije f (izrazi x s t).
- (7) Skiciraj graf funkcije f .

3.3 Preveri, da naslednje funkcije rešijo diferencialne enačbe.

(1) Funkcija

$$u(x, y) = \frac{-(x^2 + y^2 - 2) + \sqrt{(x^2 + y^2 - 2)^2 - 16xy}}{4}$$

reši enačbo

$$(xy^2 + xu)u_x - (yx^2 + yu)u_y + (x^2 - y^2)u = 0.$$

(2) Funkciji $u(x, y) = -2\sqrt{x - y + 1} + 4$, $u(x, y) = 2\sqrt{x - y + 1}$ rešita enačbo

$$u_x u_y - x u_x^2 + y u_y^2 = -1.$$

(3) Funkcija

$$u(x, y, z) = (2x + y) \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

reši enačbo

$$xz u_x + yz u_y - (x^2 + y^2) u_z = 0.$$

(4) Funkcija $u = h(\sqrt{x^2 + y^2}) \exp(\operatorname{arctg}(x^{-1}y))$ reši enačbo $xu_y - yu_x = u$.

(5) Funkcija $u = xe^y$ reši enačbo $xu_x - u_y = 0$.