

## 1.9 Naloge

1.1 Zapiši integral funkcije  $f$  po ravninskem območju  $D$

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

z dvakratnima integraloma v obeh vrstnih redih:

- i.  $D$  je trikotnik z oglišči  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$  in  $C(1, 1)$ ;
- ii.  $D$  je trapez z oglišči  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(2, 1)$  in  $D(0, 1)$ ;
- iii.  $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq y\}$ .

1.2 Zamenjaj vrstni red integracije:

- i.  $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$ ;
- ii.  $\int_{-6}^2 dx \int_{x^2/4-1}^{2-x} f(x, y) dy$ ;
- iii.  $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$ .

1.3 Izračunaj naslednje integrale:

- i.  $\int \int_D xy^2 dx dy$ , kjer je  $D$  območje, omejeno s parabolo  $y^2 = 4x$  in premico  $x = 1$ ;
- ii.  $\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$ , kjer je  $D$  paralelogram, omejen s premicami  $y = 1$ ,  $y = 3$ ,  $y = x$  in  $y = x + 1$ ;
- iii.  $\int \int_D |\cos(x + y)| dx dy$ , kjer je  $D$  kvadrat  $[0, \pi] \times [0, \pi]$ .

1.4 Izračunaj volumen telesa, omejenega z:

- i.  $z = x^2 + y^2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 1$  in  $z = 0$ ;
- ii.  $z = xy$ ,  $x + y + z = 1$  in  $z = 0$ ;
- iii.  $z = 1 - y^2$  in  $z = x^2$ .

1.5 Izračunaj integral:

- i.  $\int \int_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  po kolobarju  $D = \{(x, y) : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$ ;
- ii.  $\int \int_D (x + y) dx dy$  po območju  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq x + y\}$ ;

iii.  $\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$  po območju  $D = \{(x, y) : x^4 + y^4 \leq 1\}$ .

**1.6** Izračunaj ploščino lika, ki ga v prvem kvadrantu omejuje krivulja:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}, \quad a, b, c > 0.$$

Uvedi nove spremenljivke  $x = ar \cos \varphi$ ,  $y = br \sin \varphi$ .

**1.7** Izračunaj integral  $\int \int \int_G xy^2 z^3 dx dy dz$  po območju, omejenem z  $z = xy$ ,  $y = x$ ,  $x = 1$  in  $z = 0$ .

**1.8** Izračunaj integral:

- i.  $\int \int \int_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$  po območju  $G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$ ;
- ii.  $\int \int \int_G (x^2 + y^2) dV$  po območju  $G$ , podanem z  $x^2 + y^2 \leq 2z$  in  $z \leq 2$ ;
- iii.  $\int \int \int_G z dV$  po območju  $G$ , omejenemu s ploskvama  $x^2 + y^2 = 2z$  in  $x + y = z$ .

**1.9** Izračunaj prostornino območja, omejenega z:

- i.  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = x$  in  $z = x^4 y^4$ ;
- ii.  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$ ;
- iii.  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$ ,  $a > 0$ .

**1.10 I**

Izračunaj maso telesa omejenega s ploskvami  $2y + z = 2$ ,  $y + z = 1$ ,  $y = x^2$ ,  $x \geq 0$ , če je gostota telesa enaka  $\rho(x, y, z) = x$ .

**1.11** Določi težišče območja, omejenega z:

- i.  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $x, y \geq 0$ ;
- ii.  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = xyz$ ,  $x, y, z > 0$ .

**1.12** Poišči maso homogenega telesa z gostoto  $\rho$ , ki ga omejuje ploskev  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ ,  $a > 0$ . Izračunaj tudi vztrajnostne momente

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho dV, \quad I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho dV, \quad I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dV$$

telesa, glede na osi  $x$ ,  $y$  in  $z$ .