1. Dana je funkcija
$$f(x,y) = \frac{y-8x}{x^2+4}.$$
Določi njeno definicijsko območje. Nariši njene nivojnice na nivojih $0, 2, -2$.

2. Naj bo
$$f(x,y) = \ln(y-x^2) - 2y^2.$$
Določi definicijsko območje in ga nariši.

3. Dana je funkcija
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y+xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{4}}}; & (x,y) \neq (0,0), \\ a; & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Določi število a tako, da bo f zvezna. Izračunaj parcialna odvoda f_x in f_y.

4. Dana je funkcija
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Pokaži, da je zvezna. Izračunaj njen parcialni odvod $f_x(x,y)$. Ali je ta parcialni odvod zvezen?

5. Dana je funkcija
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y+xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{4}}}; & (x,y) \neq (0,0), \\ a; & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Določi število a tako, da bo f zvezna. Izračunaj parcialna odvoda f_x in f_y.

6. Dana je funkcija $z = f(x,y)$, kjer sta x in y funkciji:
$$x = uv, \quad y = u^2 - v^2.$$
Pokaži
$$z_{uv} = f_x + x(f_{xx} - 4f_{yy}) + 2yf_{xy}.$$

7. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana s predpisom
$$g(x,y) = x^4 f\left(\frac{y}{x^2}\right).$$
Dokaži, da velja
$$xg_x + 2yg_y = 4g.$$

8. Izračunaj smerni odvod funkcije

$$f(x,y,z) = (x - y + z)\sin(x + yz - 1).$$

v točki $(1,0,1)$ v smeri vektorja $(-1,2,2)$.

9. Izračunaj smerni odvod funkcije

$$f(x,y) = (x - y + z)\sin(x + yz - 1).$$

v točki $(1,0,1)$ v smeri vektorja $(-1,2,2)$.

10. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija. Dokaži, da funkcija

$$u(x,y) = e^y f(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$$

zadošča diferencialni enačbi

$$(x^2 - y^2)u_x + xyu_y = xyu.$$

11. Funkcija $z = z(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ je dana v kartezičnih in polarnih koordinatah. Dokaži enakost

$$z_{xx} + z_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r^2}f_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}f_r.$$

12. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana s predpisom

$$g(x,y) = x^4 f\left(\frac{y}{x^2}\right).$$

Dokaži, da velja

$$xg_x + 2yg_y = 4g.$$

13. Razvij funkcijo

$$f(x,y) = \sin(xy).$$

v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,0)$. S pomočjo razvoja izračunaj $f_{xxxyyy}(0,0)$.

14. Dana je funkcija

$$f(x,y) = (x - y)e^{x+y-1}.$$

Razvij jo v Taylorjevo vrsto okoli točke $(1,0)$ do vključno členov drugega reda. S pomočjo dobljenega razvoja izračunaj približno vrednost $f(0.9, 0.2)$.

15. Razvij funkcijo

$$f(x,y) = xe^{3xy}$$

v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,0)$. S pomočjo razvoja izračunaj $f_{xxxyy}(0,0)$.

16. Funkcijo
$$f(x,y) = x\cos(xy^2)$$
razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,0)$ in izračunaj $f_{xxxyyyy}(0,0)$.

17. Razvij funkcijo
$$f(x,y) = (2-x^2)\sin(x-xy)$$
v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,1)$. S pomočjo razvoja izračunaj $f_{xxxyyy}(0,1)$.

18. Dana je funkcija
$$f(x,y) = ye^x.$$
Razvij jo v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,0)$ do vključno členov tretjega reda.

19. Funkcija
$$f(x,y) = \ln(x + x^2y - xy)$$
razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke $(1,0)$ do vključno členov drugega reda.

20. Razvij funkcijo
$$f(x,y) = \sin(xy).$$
v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,0)$. S pomočjo razvoja izračunaj $f_{xxxyyy}(0,0)$.

21. Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije
$$f(x,y) = xy(x+y-1).$$

22. Dana je funkcija
$$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}\,.$$
Določi definicijsko območje in lokalne ekstreme. Ali obstajajo tudi globalni ekstremi?

23. Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije
$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4.$$

24. Poišči stacionarne točke funkcije
$$f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$$
in jih klasificiraj.

25. Poišči in klasificiraj vse stacionarne točke funkcije
$$f(x,y) = x\cos x - xe^y.$$

26. Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = (x^2 + y)\sqrt{e^y}.$$

27. Poišči najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x,y) = xy$$

pri pogoju $x^2 + y^2 = 2a^2$.

28. Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + 4y$$

na krožnici $x^2 + y^2 = 4$.

29. Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3$$

na območju

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 20\}.$$

30. Poišči točki na elipsoidu

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 7$$

v katerih zavzame funkcija

$$f(x,y,z) = x - 2y - 2z + 1$$

največjo in najmanjšo vrednost.

31. Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x - y + 1$$

na trikotniku z oglišči $A(0,0), B(1,0)$ in $C(0,1)$.

32. Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2$$

na trikotniku omejenem s premicami $x = 0, y = 0, x + 2y = 6$.

33. Poišči največjo in najmanjšo vrednost, ki jo zavzame funkcija

$$f(x,y) = xy(x + y)$$

na ploskvi

$$x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 3.$$

34. Poišči globalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = 2x^3 + y^2 - 2xy$$

na območju $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq y \leq 3\}$.

35. V elipsoid

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 12$$

včrtamo kvader z robovi vzporednimi koordinatnim osem in z največjo prostornino. Določi tisto oglišče, ki leži v prvem oktantu.

36. Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x,y) = 3x^3 - 4xy^2 + 3y$$

na kvadratu z oglišči $A(0,0), B(1,0), C(1,1)$ in $D(0,1)$.

37. Funkcija $z(x,y)$ je dana implicitno z enačbo

$$ze^{xy} + e^z = 0.$$

Izračunaj parcialni odvod z_{xx} v točki $x = 1, y = -1, z = -1$.

38. Funkcija $z = z(x,y)$ je dana implicitno z enačbo

$$\cos(yz) + e^{xz} - xy^2 + z = 1.$$

V točki $(0,0)$ izračunaj parcialna odvoda z_x, z_y. S totalnim diferencialom izračunaj približno vrednost $z(0.1, -0.05)$.

39. Funkcija $z = z(x,y)$ je dana z implicitno enačbo

$$z^3 + yz - x^2 + y = 0.$$

Razvij jo v Taylorjevo vrsto okrog točke $(1,1)$ do vključno členov drugega reda.

40. Funkcija $z = z(x,y)$ je podana v okolici točke $(0,0)$ implicitno z enačbo

$$e^{xyz} - z = 0.$$

Izračunaj parcialne odvode $z_x, z_x, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$ v točki $(0,0)$ in zapiši Taylorjev polinom funkcije z do vključno členov z drugim odvodom.

41. Funkcija $z = z(x,y)$ je dana implicitno z enačbo

$$x^2 + y^2 + z^2 = e^z$$

v okolici točke $(1,0)$ pri čemer velja velja $z(1,0) = 0$. Razvij jo okoli točke (1, 0) v Taylorjevo vrsto do vključno členov drugega reda.

42. Funkcija $z = z(x, y)$ je dana z implicitno enačbo

$$z^3 + xz - x^2 + y = 0.$$

(a) Razvij jo v Taylorjevo vrsto okrog točke $(1, 1)$ do vključno členov drugega reda.
(b) S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj približno vrednost $z(0.98, 1.01)$.