

1. Poišči definicijsko območje funkcije, podane z integralom

$$f(y) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2}.$$

2. Naj bo realna funkcija g podana z integralom

$$g(y) = \int_0^y \frac{\log(1 + xy)}{x} dx.$$

Izračunaj odvod $g'(y)$ povsod, kjer obstaja.

3. Poišči tisti linearni približek $p(x) = ax + b$ za funkcijo $f(x) = x^2$, za katerega ima integral

$$g(a, b) = \int_1^3 (p(x) - f(x))^2 dx$$

najmanjšo vrednost.

4. Z odvajanjem po parametru ali z zamenjavo vrstnega reda integracije izračunaj integral:

$$f(a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad b > a > 0.$$

5. Z odvajanjem po parametru ali z zamenjavo vrstnega reda integracije izračunaj integral:

$$f(a, b) = \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

6. Dani sta funkciji $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(t) = \int_0^1 \log(x^2 + t^2) dx,$$

$$g(t) = 2t \operatorname{arctg} \frac{1}{t} + \log(1 + t^2).$$

Dokaži, da je $f'(t) = g'(t)$.

7. S prevedbo na funkcijo Γ izračunaj integral

$$\int_0^{\infty} x^5 e^{-x^4} dx.$$

8. S prevedbo na funkcijo Γ izračunaj integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^3} dx.$$

9. Izračunaj integral

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\log \frac{1}{t}\right)^3} dt.$$

Nasvet: uvedi novo spremenljivko $x = \log t$ in integral prevedi na funkcijo Γ .

10. S prevedbo na funkcijo B izračunaj integral

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

11. Izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-x^n} dx.$$

12. Izračunaj naslednje integrale:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx, \quad \text{b) } \int_0^{\pi/2} \sin^8 x dx, \quad \text{c) } \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x dx, \\ \text{č) } \int_0^{\pi} \sin^5 x dx, \quad \text{d) } \int_0^{2\pi} \sin^7 x dx, \quad \text{e) } \int_0^{2\pi} \cos^4 x dx. \end{aligned}$$

13. S prevedbo na funkcijo beta ali gama izračunaj naslednje integrale:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}; \quad \text{b) } \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^p dx, \quad p > 0; \quad \text{c) } \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^p x dx, \quad 0 < p < 1.$$

14. Z zamenjavo vrstnega reda integriranja izračunaj

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^4} - e^{-bx^4}}{x^4} dx, \quad b > a > 0.$$