Metričn prostor

i. Na množici $\mathbb{R}^2$ je dan predpis

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1^3 - x_2^3| + |y_1^5 - y_2^5|.$$

Pokaži, da je d metrika.

Skiciraj kroglo $K((1,0),1)$.

ii. V množici $M = \mathbb{R}$ je dan predpis

$$d : M \times M \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) = |x^2 - y^2|.$$

Pokaži, da (M,d) ni metrični prostor.

iii. V množici $N = [0,\infty)$ je dan predpis

$$d : N \times N \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) = |x^2 - y^2|.$$

Pokaži, da je (N,d) metrični prostor. V tem metričnem prostoru določi odprto kroglo $K(1,3)$

iv. V množici $M = \mathbb{R}$ je dan predpis

$$d : M \times M, \quad d(x,y) = |x^2 - y^2| + |x - y|.$$

Pokaži, da je (M,d) metrični prostor. V tem metričnem prostoru določi odprto kroglo $K(0,2)$.

v. Utemelji ali sta naslednji množici odprti, zaprti ali nič od tega (v običajni evklidski metriki) v $\mathbb{R}$.

(a) $\mathbb{Z} \cup (1,2]$,

(b) $\mathbb{Q} \cap (0,1)$.

vi. Dana je enačba

$$2x - \cos x = 0.$$

(a) S pomočjo izreka o fiksni točki pokaži, da ima enačba eno samo pozitivno rešitev.

(b) To pozitivno rešitev poišči na dve decimalki natančno.

vii. Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{2 + x^2} + \frac{5}{3}.$$

S pomočjo izreka o fiksni točki pokaži, da ima enačba $f(x) = x$ natanko eno rešitev $x = 2$.

Nasvet: Pokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

viii. Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + 3.$$

S pomočjo izreka o fiksni točki pokaži, da ima enačba $f(x) = x$ natanko eno rešitev.

Nasvet: Pokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

ix. Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+3} + \frac{\pi}{4}.$$

S pomočjo izreka o fiksni točki pokaži, da ima enačba $f(x) = x$ natanko eno rešitev.

Nasvet: Pokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{3}.$$

x. Čim bolj natančno reši enačbo

$$\frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{x} = \frac{3}{4}$$

na $(0, \infty)$. Koliko je vseh rešitev?