VAJE IZ MATEMATIKE 2

za smer Praktična matematika

Martin Raič

Datum zadnje spremembe: 22. maj 2014

Kazalo

1. Ponovitev elementarnih integralov

Ponovitev tehnik integriranja (substitucija, per partes) pri nedoločenih in določenih integralih. Pasti pri substituciji v določeni integral in pri posplošenih integralih.

V nalogah od 1. do 12. izračunajte integrale.

1. $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{2+3x}\,\mathrm{d}x.$

3. $\displaystyle\int (x^2+x)e^{-2x+7}\,\mathrm{d}x.$

4. $\displaystyle\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x.$

5. Izračunajte določeni integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\sin x - \tfrac{1}{2}\right|\mathrm{d}x.$

6. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}.$

7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

8. $\displaystyle\int_0^2 \frac{(x^3-4x+2)\cos(x^4-8x^2+8x+3)}{x^4-8x^2+8x+3}\,\mathrm{d}x.$

Naj bo R racionalna funkcija. Z naslednjimi substitucijami v integrale:

$$\int R\big(x,\sqrt{a^2-x^2}\big)\,\mathrm{d}x: \quad x = a\sin t\,, \quad t = \arcsin\frac{x}{a}\,, \quad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t \quad (a \ge 0)$$

$$\int R\big(x,\sqrt{x^2+a^2}\big)\,\mathrm{d}x: \quad x = a\,\mathrm{sh}\,t\,, \quad t = \mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}\,, \quad \sqrt{x^2+a^2} = a\,\mathrm{ch}\,t \quad (a \ge 0)$$

$$\int R\big(x,\sqrt{x^2-a^2}\big)\,\mathrm{d}x: \quad x = a\,\mathrm{ch}\,t\,, \quad t = \mathrm{Arch}\,\frac{x}{a}\,, \quad \sqrt{x^2-a^2} = a\,\mathrm{sh}\,t \quad (x \ge a \ge 0)$$

$$\int R\big(x,\sqrt{x^2+b}\big)\,\mathrm{d}x: \quad x = \frac{t}{2} - \frac{b}{2t}\,, \quad t = x + \sqrt{x^2+b}\,, \quad \sqrt{x^2+b} = \frac{t}{2} + \frac{b}{2t} \quad (x \ge \sqrt{-b} \text{ pri } b < 0)$$

se le-ti prevedejo na integrale trigonometrijskih, eksponentnih oz. racionalnih funkcij.

9. $\displaystyle\int \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x.$

10. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + 9}\,\mathrm{d}x.$

11. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 9}\,\mathrm{d}x.$

12. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{16 + 9\cos^2 x}.$

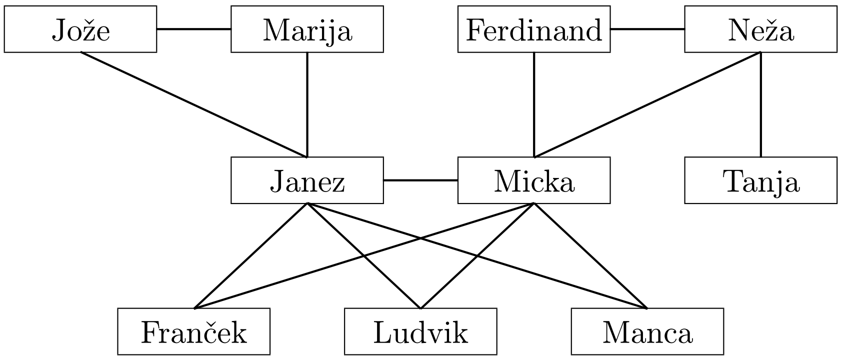
2. Metrični prostori

Preverjanje aksiomov metrike. Krogle. Odprtost, zaprtost.

Aksiomi metrike:

$$d(x,y) \geq 0$$
$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$
$$d(y,x) = d(x,y)$$
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

1. Dana je naslednja mreža poznanstev:



Iz množice ljudi iz zgornje mreže naredimo metrični prostor, in sicer tako, da je razdalja d med dvema človekoma najmanjše število poznanstev, ki so potrebna, da pridemo od enega do drugega. Izračunajte razdalje:

$$d(\text{Janez}, \text{Micka}), \quad d(\text{Janez}, \text{Janez}), \quad d(\text{Franček}, \text{Marija}),$$
$$d(\text{Franček}, \text{Manca}), \quad d(\text{Franček}, \text{Tanja})$$

in preverite, da d izpolnjuje aksiome metrike.

2. Kateri izmed podanih predpisov predstavljajo metriko na $\mathbb{R}$:

   a) $d_1(x,y) := 2|x-y|$?
   b) $d_2(x,y) := |x^2 - y^2|$?
   c) $d_3(x,y) := \min\{2, |x-y|\}$?
   d) $d_4(x,y) := \max\{2, |x-y|\}$?

   Odgovore utemeljite!

Uveljavljene metrike na $\mathbb{R}^n$

$$d_p\big((x_1, \dots x_n), (y_1, \dots y_n)\big) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right]^{1/p}$$
$$d_\infty\big((x_1, \dots x_n), (y_1, \dots y_n)\big) = \max\big\{|x_1 - y_1|, \dots |x_n - y_n|\big\}$$

Metriki d_1 pravimo **manhattanska**, *metriki d_2* **evklidska**, *metriki d_∞ pa* **maksimum** *metrika.*

3. V evklidski in manhattanski metriki na $\mathbb{R}^2$ določite množico točk, ki so enako oddaljene od točk $T_1(1,0)$ in $T_2(0,1)$.

4. V evklidski, manhattanski in maksimum metriki na $\mathbb{R}^2$ poiščite točko na premici $y = 2x + 1$, ki je najbližje izhodišču.

Odprta krogla: $K(x, r) = \{y \; ; \; d(x, y) < r\}$.
Zaprta krogla: $\bar{K}(x, r) = \{y \; ; \; d(x, y) \le r\}$.

5. Pokažite, da predpis $d(x, y) := |x^2 - y^2|$ predstavlja metriko na $[0, \infty)$. Določite odprti in zaprti krogli okoli točke 2 s polmeroma 3 in 5.

6. Pokažite, da predpis:

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := |x_1 - x_2| + |y_1^3 - y_2^3|$$

predstavlja metriko na $\mathbb{R}^2$. V tej metriki skicirajte odprto kroglo $K\big((1,0), 1\big)$.

7. *Poštarsko metriko* na ravnini definiramo po predpisu:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} \|\vec{x} - \vec{y}\| & ; \text{če sta } \vec{x} \text{ in } \vec{y} \text{ vzporedna} \\ \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| & ; \text{sicer} \end{cases},$$

kjer je $\|\cdot\|$ evklidska norma. Pokažite, da je to res metrika, in določite krogli okrog točk $A(4,3)$ in $B(2,1)$ s polmerom 3.

8. Naj bo A poljubna množica. *Primerjalna metrika* na množici:

$$A^{\mathbb{N}} = \big\{(a_1, a_2, a_3, \dots) \; ; \; a_1, a_2, a_3, \dots \in A\big\}$$

vseh zaporedij elementov množice A je definirana tako, da je razdalja med zaporedjema $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ in $(b_1, b_2, b_3, \dots)$ enaka $1/k$, kjer je k prvi indeks, za katerega je $a_k \ne b_k$; razdalja med enakima zaporedjema je seveda eneka nič. Pokažite, da je to res metrika, ter določite odprto in zaprto kroglo okoli danega zaporedja s polmerom $1/5$.

Naj bo A podmnožica metričnega prostora.

- **Notranjost** *množice A sestavljajo tiste točke a, za katere obstaja krogla $K(a, r)$, ki je vsebovana v A.*
- **Zunanjost** *množice A sestavljajo tiste točke a, za katere obstaja krogla $K(a, r)$, ki ima z A prazen presek. Zunanjost množice A je torej notranjost njenega komplementa.*
- **Rob** *množice A sestavljajo točke, ki niso niti notranje niti zunanje, t. j. točke a, pri katerih vsaka krogla $K(a, r)$ vsebuje tako točke, ki so v A, kot točke, ki niso v A.*
- *Množica A je* **odprta**, *če so vse njene točke notranje, torej če ne vsebuje nobene svoje robne točke.*
- *Množica je* **zaprta**, *če vsebuje vse svoje robne točke.*

9. Na realni osi, opremljeni z običajno metriko, gledamo množice: $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{1/n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$, $A_3 = A_2 \cup \{0\}$, $A_4 = \mathbb{Z} \cup (1, 2)$, $A_5 = \mathbb{Z} \cup (3/2, 2)$ in $A_6 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $A_7 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $A_8 = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Za vsako od njih določite notranjost in rob ter še, ali je odprta in ali je zaprta. Določite to še za interval $(0, \infty)$, ki ga gledamo kot podmnožico metričnega prostora $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ z običajno metriko.

Zaporedje $x_1, x_2, x_3, \ldots$ v metričnem prostoru (M, d) **konvergira** *proti točki x, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_0$ velja $d(x_n, x) < \varepsilon$. Z drugimi besedami, to je natanko tedaj, ko je $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.*
Pravimo, da je x **limita** *zaporedja x_n, in pišemo $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Zaporedje $x_1, x_2, x_3, \ldots$ v metričnem prostoru (M, d) je **Cauchyjevo**, *če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za poljubna $m, n \geq n_0$ velja $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Vsako konvergentno zaporedje je Cauchyjevo.
Metrični prostor je **poln**, *če je vsako Cauchyjevo zaporedje konvergentno.*

10. Naj bo $\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 > \ldots$ in $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$. Ali je zaporedje točk $x_n = (\cos \varphi_n, \sin \varphi_n)$ konvergentno oz. Cauchyjevo:

    a) v evklidski metriki?

    b) v poštarski metriki?

Metrike na funkcijskih prostorih

Naj bo $p \geq 1$ in $a < b$. **Integralska metrika** *d_p na prostoru $\mathcal{C}[a,b]$ zveznih funkcij na intervalu $[a,b]$ je definirana po predpisu:*

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} .$$

Definiramo tudi d_∞, in sicer je to po dogovoru maksimum metrika:

$$d_\infty(f,g) = \max_{a \leq x \leq b} \left|f(x) - g(x)\right| .$$

Če funkcijsko zaporedje konvergira v maksimum metriki, konvergira tudi po točkah. V tej metriki je dani prostor tudi poln.

Za $1 \leq p < q \leq \infty$ je metrika d_q enakomerno močnejša od metrike d_p, kar pomeni, da za vsak $r > 0$ obstaja tak $s > 0$, da je $K_q(f,s) \subseteq K_p(f,r)$ za vse funkcije f; s K_p in K_q smo označili odprti krogli v ustreznih metrikah. Od tod sledi, da je vsako zaporedje, ki je konvergentno oz. Cauchyjevo v d_q, konvergentno oz. Cauchyjevo tudi v d_p.

11. Dano je zaporedje funkcij $f_n(x) = \dfrac{nx}{2nx+1}$. Ali je to zaporedje konvergentno oz. Cauchyjevo:

    a) v prostoru zveznih funkcij na $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, opremljenem z maksimum metriko?
    b) v prostoru zveznih funkcij na $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, opremljenem z integralsko metriko d_1?
    c) v prostoru zveznih funkcij na $[0,1]$, opremljenem z maksimum metriko?
    d) v prostoru zveznih funkcij na $[0,1]$, opremljenem z integralsko metriko d_1?

12. Dano je zaporedje funkcij $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^{nx}}$ in naj bo $0 < a < 1$. Določite, ali je zaporedje konvergentno oz. Cauchyjevo:

    a) v prostoru zveznih funkcij na $[a,1]$, opremljenem z maksimum metriko?
    b) v prostoru zveznih funkcij na $[-1,-a]$, opremljenem z maksimum metriko?
    c) v prostoru zveznih funkcij na $[-1,1]$, opremljenem z integralsko metriko d_1?

13. Dano je zaporedje funkcij na prostoru $\mathcal{C}[0,1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^3 x & ; x \leq 1/n^2 \\ 0 & ; x \geq 1/n^2 \end{cases} .$$

    Dokažite, da to zaporedje v metriki d_1 konvergira proti 0 (čeprav po točkah ne konvergira). Dokažite še, da to zaporedje v metriki d_2 ne konvergira proti 0.

Banachovo skrčitveno načelo

Preslikava $f\colon M \to M$ je **skrčitev** *glede na metriko d, če obstaja tak $q < 1$, da je $d\big(f(x), f(y)\big) \le q\, d(x, y)$ za vse $x, y \in M$.*

Če je f skrčitev na polnem metričnem prostoru, ima enačba $f(x) = x$ natanko eno rešitev x^*. Le-to dobimo kot limito zaporedja:

$$x_1\,, \quad x_2 = f(x_1)\,, \quad x_3 = f(x_2)\,, \ldots$$

za poljuben začetni približek x_1. Brž ko izračunamo vsaj dva približka, lahko ocenimo tudi napako:

$$d(x_n, x^*) \le \frac{q}{1-q}\, d(x_{n-1}, x_n)\,.$$

Brž ko je M zaprt interval, zaprt poltrak ali cela realna os, je to v običajni metriki poln prostor. Odvedljiva preslikava $f\colon M \to M$ je skrčitev, brž ko je zvezna na M, odvedljiva v notranjosti intervala M in ko obstaja tak $q < 1$, da je $|f'(x)| \le q$ za vsak x iz notranjosti množice M.

Če je tudi $f'(x) \ge 0$ za vse x, zaporedje približkov bodisi narašča proti x^* bodisi pada proti x^*. Če pa je $f'(x) \le 0$ za vse x, pa x^* leži med poljubnima zaporednima približkoma.

14. Izračunajte vse rešitve enačbe $x = \operatorname{arctg} x + 3$ na 5 decimalk natančno.

15. Izračunajte vse rešitve enačbe $x = 3 + \dfrac{1}{x^4}$ na 7 decimalk natančno.

16. Izračunajte vse rešitve enačbe $x = \ln x + 2$ na 5 decimalk natančno.

Enačbo

$$F(x) = 0$$

lahko s pomočjo Banachovega skrčitvenega načela rešujemo tako, da jo zapišemo kot:

$$x - k\,F(x) = x\,,$$

kjer je k primerno izbrano število. Postopek deluje, če za vse x na intervalu, kjer iščemo ničlo, velja $|1 - k\,F'(x)| \le q$, kjer je $q < 1$. Tak k se da vedno dobiti, če se odvod giblje na omejenem zaprtem intervalu, ki ne vsebuje ničle (v takem primeru je funkcija seveda strogo monotona).

17. Na 5 decimalk natančno rešite enačbo $x^3 + x^2 = 3$.

3. Fourierove vrste

Razvoj v trigonometrijsko Fourierovo vrsto. Sinusna in kosinusna Fourierova vrsta. Parsevalova enačba.

Za vsako funkcijo f, ki je integrabilna na intervalu $(-\pi, \pi)$, lahko definiramo **klasično (trigonometrijsko) Fourierovo vrsto**:

$$\bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,,$$

kjer je:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\,; \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Funkcija $\bar{f}$ je periodična s periodo 2π in ni nujno (povsod) definirana (vrsta lahko divergira).
Če je f odsekoma zvezno odvedljiva na intervalu $(-\pi, \pi)$ (t. j. interval se da razdeliti na podintervale, kjer je f v notranjosti zvezno odvedljiva, f' pa ima v krajiščih levo oz. desno limito), je $\bar{f}$ povsod definirana: v točkah iz $(-\pi, \pi)$, kjer je f zvezna, je $\bar{f} = f$, sicer pa velja:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2}\left[\lim_{y\uparrow x} f(y) + \lim_{y\downarrow x} f(y)\right]$$

in še:

$$\bar{f}(-\pi) = \bar{f}(\pi) = \frac{1}{2}\left[\lim_{y\uparrow \pi} f(y) + \lim_{y\downarrow -\pi} f(y)\right]\,.$$

Velja **Parsevalova enačba**:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x)\big]^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\,.$$

V nalogah od 1. do 7. razvijte funkcije v Fourierove vrste, zapišite njihove dejanske vsote na intervalu $[-\pi, \pi]$ in narišite njihove grafe na celi realni osi. Če je navedeno, zapišite številske vrste, ki nastanejo, ko vstavimo ustrezne vrednosti. Zapišite še številsko vrsto, ki nastane iz Parsevalove enačbe.

1. $f(x) = \pi + x$, vstavite $x = \pi/2$.

2. $f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$, vstavite $x = \pi/2$.

Če je f liha, so vsi koeficienti a_n enaki 0.
Če je f soda, so vsi koeficienti b_n enaki 0.

3. $f(x) = x^2$, vstavite $x = 0$ in $x = \pi$.

4. $f(x) = e^{ax}$, vstavite $x = 0$ in $x = \pi$.

5. $f(x) = \sin^2 x$.

6. $f(x) = \cos(ax)$, $a \notin \mathbb{Z}$. Vstavite $x = 0$ in $x = \pi$.

7. $f(x) = \sin(ax)$, $a \notin \mathbb{Z}$. Vstavite $x = \pi/2$.

Za vsako funkcijo f, ki je integrabilna na intervalu $(0, \pi)$, lahko definiramo **kosinusno Fourierovo vrsto**:

$$\bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\,,$$

kjer je:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\,; \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Funkcija $\bar{f}$ je soda, periodična s periodo 2π in ni nujno povsod definirana.
Če je f odsekoma zvezno odvedljiva na intervalu $(0, \pi)$, je $\bar{f}$ povsod definirana: v točkah iz $(0, \pi)$, kjer je f zvezna, je $\bar{f} = f$, sicer pa velja:

$$\bar{f}(x) = \frac{\lim_{y\uparrow x} f(y) + \lim_{y\downarrow x} f(y)}{2} \quad \textit{in še} \quad \bar{f}(0) = \lim_{y\downarrow 0} f(y)\,, \quad \bar{f}(\pi) = \lim_{y\uparrow \pi} f(y)\,.$$

Velja **Parsevalova enačba**:

$$\int_0^{\pi} \big[f(x)\big]^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi a_0^2}{4} + \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,.$$

8. Razvijte funkcijo $f(x) = x$ v kosinusno Fourierovo vrsto na intervalu $(0, \pi)$. Zapišite njeno vsoto na intervalu $[-\pi, \pi]$ in narišite graf na celi realni osi. Zapišite še številsko vrsto, ki nastane iz Parsevalove enačbe.

9. Razvijte funkcijo $f(x) = \sin x$ v kosinusno Fourierovo vrsto na intervalu $(0, \pi)$. Zapišite njeno vsoto na intervalu $[-\pi, \pi]$ in narišite graf na celi realni osi.

Za vsako funkcijo f, ki je integrabilna na intervalu $(0, \pi)$, lahko definiramo **sinusno Fourierovo vrsto**:

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,,$$

kjer je:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x\,; \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Funkcija $\bar{f}$ je liha, periodična s periodo 2π in ni nujno povsod definirana.
Če je f odsekoma zvezno odvedljiva na intervalu $(0, \pi)$, je $\bar{f}$ povsod definirana: v točkah iz $(0, \pi)$, kjer je f zvezna, je $\bar{f} = f$, sicer pa velja:

$$\bar{f}(x) = \frac{\lim_{y \uparrow x} \bar{f}(y) + \lim_{y \downarrow x} \bar{f}(y)}{2} \quad \text{in še} \quad \bar{f}(0) = \bar{f}(\pi) = 0\,.$$

Velja **Parsevalova enačba**:

$$\int_0^{\pi} \big[f(x)\big]^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\,.$$

10. Razvijte funkcijo $f(x) = \cos x$ v sinusno Fourierovo vrsto na intervalu $(0, \pi)$. Zapišite njeno vsoto na intervalu $[-\pi, \pi]$ in narišite graf na celi realni osi.

Trigonometrijska Fourierova vrsta na simetričnem intervalu poljubne dolžine. *Če je f integrabilna na intervalu $(-l, l)$, je trigonometrijska Fourierova vrsta na tem intervalu oblike:*

$$\bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,,$$

kjer je:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\,; \quad n \in \mathbb{N}$$

Funkcija $\bar{f}$ je periodična s periodo $2l$ in ni nujno povsod definirana.
Če je f odsekoma zvezno odvedljiva na intervalu $(-l, l)$, je $\bar{f}$ povsod definirana in velja:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\lim_{y\uparrow x} f(y) + \lim_{y\downarrow x} f(y)\right] & ; -l < x < l \\ \frac{1}{2}\left[\lim_{y\uparrow l} f(y) + \lim_{y\downarrow -l} f(y)\right] & ; x \in \{-l, l\} \end{cases}.$$

V notranjih točkah, kjer je f zvezna, je seveda $\bar{f} = f$.
Velja **Parsevalova enačba**:

$$\int_{-l}^{l} \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{l}{2}\,a_0^2 + l\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\,.$$

Funkcijo lahko razvijemo tudi po samih kosinusih ali samih sinusih na intervalu $(0, l)$.

11. Razvijte funkcijo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \le 0 \\ x & ; x \ge 0 \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu $[-1, 1]$.

Trigonometrijska Fourierova vrsta na poljubnem intervalu. *Če je f integrabilna na intervalu (a, b), je trigonometrijska Fourierova vrsta na tem intervalu oblike:*

$$\bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n x}{b-a} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n x}{b-a} \,,$$

kjer je:

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \,, \qquad a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{b-a} \,\mathrm{d}x \,,$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n x}{b-a} \,\mathrm{d}x \,; \quad n \in \mathbb{N}$$

Funkcija $\bar{f}$ je periodična s periodo $b - a$ in ni nujno povsod definirana.
Če je f odsekoma zvezno odvedljiva na intervalu (a, b), je $\bar{f}$ povsod definirana in velja:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big[\lim_{y\uparrow x} f(y) + \lim_{y\downarrow x} f(y)\big] & ; \, a < x < b \\ \frac{1}{2}\big[\lim_{y\downarrow a} f(y) + \lim_{y\uparrow b} f(y)\big] & ; \, x \in \{a, b\} \end{cases} .$$

V notranjih točkah, kjer je f zvezna, je seveda $\bar{f} = f$.
Velja **Parsevalova enačba**:

$$\int_a^b \big[f(x)\big]^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{4} a_0^2 + \frac{b-a}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \,.$$

12. Razvijte funkcijo $f(x) = x$ v Fourierovo vrsto na intervalu $(1, 2)$. Zapišite dejansko vsoto te vrste na $[1, 2]$.

13. Funkcijo $f(x) = x^2$ razvijemo v trigonometrijsko Fourierovo vrsto na intervalu $(1, 3)$. Določite dejanski vrednosti te vrste v 8 in 9.

4. Funkcije več spremenljivk

1. Določite in narišite definicijsko območje funkcije $f(x,y) = \sqrt{y^2 - 4x + 8}$.
2. Določite in narišite definicijsko območje funkcije $f(x,y) = \dfrac{\ln(1 - |x| - |y|)}{xy}$.
3. Narišite nekaj nivojnic ploskve $z = x^2 - y$.
4. Narišite nekaj nivojnic ploskve $z = (x^2 - 1)y$.
5. Narišite nekaj nivojnic ploskve $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Katera geometrijska ploskev je to?

Zveznost funkcij več spremenljivk

Funkcija f dveh spremenljivk je zvezna v točki (a,b), če velja $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$, t. j. če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako točko (x,y), ki je točki (a,b) bližje kot δ, velja $\bigl|f(x,y) - f(a,b)\bigr| < \varepsilon$.

Ekvivalentno, f je zvezna v (a,b) natanko tedaj, ko za vsako pot $x = x(t), y = y(t)$, $x(t_0) = a, y(t_0) = b$, velja $\lim_{t\to t_0} f\bigl(x(t), y(t)\bigr) = f(a,b)$. Dovolj je vzeti en interval s krajiščem in gledati vse poti, definirane na njem.

Analogno velja za funkcije več kot dveh spremenljivk.

Vse elementarne funkcije so zvezne povsod, kjer so definirane.

Zlepek dveh funkcij je zvezen v dani točki iz unije definicijskih območij, brž ko sta funkciji zvezni, točka pa je bodisi notranja bodisi zunanja točka katerega od definicijskih območij ali pa pripada obema definicijskima območjema (seveda se morata funkciji na preseku ujemati).

6. Za funkcijo:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ x^2 + y^2 \le 1 \\ x + y & ; \ \text{sicer} \end{cases}$$

raziščite, v katerih točkah je zvezna.

7. Dana je funkcija:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & ; \ x^2 + y^2 \ge 4 \\ a & ; \ \text{sicer} \end{cases} .$$

Dokažite, da obstaja taka konstanta a, da je f povsod zvezna. Določite jo.

Funkcija f dveh spremenljivk je zvezna v točki (a, b) natanko tedaj, ko obstaja taka funkcija $g\colon\ (0, \delta) \to [0, \infty)$ z $\lim_{r \downarrow 0} g(r) = 0$, da velja:

$$\bigl|f(x, y) - f(a, b)\bigr| \le g\bigl(\sqrt{x^2 + y^2}\bigr)\,,$$

brž ko so zgornji izrazi definirani. Karakterizacijo lahko razširimo tudi na več spremenljivk.

Za funkcije v nalogah od 8. do 10. raziščite, ali se dajo zvezno razširiti na celo ravnino.

8. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

9. $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

10. $f(x, y) = \dfrac{x^2 y \sin y}{x^2 + y^2}$

11. Izračunajte limito $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x + y)}{x + y + x^2 - y^2}$.

Parcialni odvodi

Parcialni odvod funkcije več spremenljivk po določeni spremenljivki pomeni, da po tisti spremenljivki odvajamo, preostale spremenljivke pa obravnavamo kot konstante. Pisava parcialnih odvodov funkcij temelji na tem, da se za vsako spremenljivko (t. j. mesto funkcijskega argumenta) dogovorimo, katera črka jo označuje. Če je npr. f funkcija dveh spremenljivk in se dogovorimo, da prvo označimo z x, drugo pa z y, parcialni odvod po prvi spremenljivki označimo z f_x ali $\frac{\partial f}{\partial x}$, parcialni odvod po drugi spremenljivki pa z f_y ali $\frac{\partial f}{\partial y}$. Dogovor navadno sprejmemo kar skupaj z definicijo funkcije: če funkcijo definiramo z $f(x, y) = \cdots$, privzamemo, da f_x označuje odvod po prvi, f_y pa po drugi spremenljivki. Kasneje pa lahko za argumente vstavimo tudi kaj drugega, kar pomeni, da so vsi izrazi $f_x(x, y)$, $f_x(42, 34)$ in $f_x(u, v)$ smiselni. Vrednost slednjega je enaka vrednosti izraza $g'(u)$, kjer je g funkcija, definirana po predpisu $g(x) = f(x, v)$. Tako definirani parcialni odvodi dane funkcije ali izraza so parcialni odvodi **prvega reda**.

12. Izračunajte parcialne odvode prvega reda funkcije $f(x, y) = x^2 + 3xy + \dfrac{2}{y}$.

13. Izračunajte parcialne odvode prvega reda funkcije $f(x, y) = e^{x^2} + 3 \ln y - \dfrac{x}{y}$.

Parcialno lahko odvajamo tudi izraze. Za ta namen moramo izraz predstaviti kot funkcijo. Pri tem se moramo dogovoriti, funkcija katerih spremenljivk je dani izraz (t. j. katere spremenljivke so **neodvisne***) in katere spremenljivke so* **odvisne** *(glej 15. nalogo). Parcialni odvod izraza u po spremenljivki x označujemo z $\frac{\partial u}{\partial x}$ ali $\frac{\partial}{\partial x} u$.*
Če v izrazu nastopa funkcija, se lahko zgodi, da je v argumentu spremenljivka, ki ni enako označena kot mesto funkcijskega argumenta za parcialno odvajanje. Če je npr. f funkcija dveh spremenljivk in je prva po dogovoru označena z x, druga pa z y, je $\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = \frac{\partial}{\partial y} f(y, x)$. Navadno se takšnim situacijam izogibamo.

14. Naj bo $z = \sqrt{x} + 2x^2 y + \ln(y + 1)$. Izračunajte $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ in $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

15. Med spremenljivkami u, x in y velja zveza $u = xy$.

    a) Poiščite parcialna odvoda $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ in $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

    b) Naj bo $z = x + y$. Izrazite u z x in z ter glede na ta par spremenljivk poiščite parcialna odvoda $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ in $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Pri parcialnih odvodih se moramo ves čas zavedati, v kakšni funkcijski zvezi so spremenljivke. Imenovalec v parcialnem odvodu se ne nanaša le na spremenljivko, po kateri odvajamo, temveč tudi na vse ostale spremenljivke, katerih funkcija je odvajana spremenljivka.

Posredno odvajanje (verižno pravilo za funkcije ene spremenljivke, zapisano za parcialne odvode). *Če je u funkcija spremenljivke z, le-ta pa je nadaljnja funkcija spremenljivk x in y, velja:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Podobno velja tudi za funkcije več spremenljivk.
Če u in njena parcialna odvoda jemljemo kot funkcijo spremenljivk x in y, moramo seveda pri odvodu $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$ gledati ustrezni kompozitum.

16. Naj bo:

$$u = \ln\left(\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\right).$$

Izračunajte $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ in $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

17. Naj bo:

$$u = \operatorname{arctg} \frac{2xy}{x^2 - y^2} \,.$$

Izračunajte $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ in $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

18. Naj bo spremenljivka u odvedljiva funkcija spremenljivke $z = x^2 + y^2$. Izračunajte $y\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\,\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Posredno odvajanje (totalni odvod). *Če je w funkcija spremenljivk x in y, le-ti pa sta nadaljnji funkciji spremenljivke t, velja:*

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \,.$$

Izrazu na levi pravimo **totalni odvod**.

19. Naj bo $w = x^3 y + x y^3$ ter naj bo nadalje $x = \cos t$ in $y = \sin t$. Izračunajte $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ neposredno in še s pomočjo verižnega pravila.

20. Naj se spremenljivka w izraža s spremenljivkama x in y, le-ti pa nadalje s t po formulah:

$$x = e^t + e^{-t} \,, \quad y = e^t - e^{-t} \,.$$

Izrazite $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ z $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ in $\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

Posredno odvajanje (zamenjava koordinat). *Če je w funkcija spremenljivk x in y, le-ti pa sta nadaljnji funkciji več spremenljivk (recimo dveh, u in v), velja:*

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \,.$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} \,.$$

21. Spremenljivka z naj bo funkcija spremenljivk r in θ, ki predstavljata *polarne koordinate*: kartezijske koordinate, t. j. x in y, se z njimi izražajo s formulama:

$$x = r\cos\theta \,, \quad y = r\sin\theta \,.$$

Izrazite parcialna odvoda po polarnih koordinatah s kartezijskimi koordinatami in parcialnima odvodoma, t. j. $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ in $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ izrazite z x, y, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ in $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Totalni diferencial: *Če je u funkcija spremenljivk x in y, se njen totalni diferencial izraža s formulo:*

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,.$$

Zgornja zveza predstavlja približno (ali, natančneje, ustrezno limitno) zvezo med majhnimi spremembami spremenljivk u, x in y.

22. Dana je funkcija $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$. Zapišite njen totalni diferencial in z njegovo pomočjo približno izračunajte $\dfrac{\sqrt[3]{8{\cdot}06}}{\sqrt{24{\cdot}5}}$.

Pravila za odvajanje v diferencialni obliki

Če je a konstanta, u in v spremenljivki, f pa funkcija, velja:

$$\mathrm{d}a = 0\,, \qquad \mathrm{d}(au) = a\,\mathrm{d}u\,, \qquad \mathrm{d}(u^m) = mu^{m-1}\,\mathrm{d}u\,,$$
$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u\,, \qquad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}\,,$$
$$\mathrm{d}\big(f(u)\big) = f'(u)\,\mathrm{d}u$$

23. Izračunajte totalni diferencial izraza $u = \arcsin\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Gradient *spremenljivke u kot funkcije recimo spremenljivk x, y in z je vektor iz njenih parcialnih odvodov po kartezijskih koordinatah:*

$$\operatorname{grad} u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}\,.$$

Totalni diferencial lahko torej zapišemo kot skalarni produkt gradienta z vektorjem $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$.
Smerni odvod *po enotskem vektorju $\vec{v}$ se izraža s formulo:*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{v}} = \langle \operatorname{grad} u, \vec{v} \rangle\,.$$

Smerni odvod v smeri danega vektorja je smerni odvod po ustreznem normiranem vektorju.

24. Naj bo $u = xy + xz + yz$.

a) Zapišite gradient spremenljivke u kot funkcije spremenljivk x, y in z in še totalni diferencial $\mathrm{d}u$.

b) Izračunajte smerni odvod te spremenljivke pri $x = 5, y = -4, z = 12$ v smeri vektorja $(3, 4, 12)$.

Višji parcialni odvodi

Parcialne odvode prvega reda lahko nadalje parcialno odvajamo: parcialni odvodi reda n (n-tega reda) so parcialni odvodi prvega reda parcialnih odvodov reda $n - 1$.
Parcialni odvod po y parcialnega odvoda po x (kjer sta spremenljivki x in y lahko različni ali enaki) označimo z f_{xy} ali $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ (za funkcijo) oziroma z $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ ali $\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u$ (za izraz). V jeziku operatorjev je torej $\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}$.
Brž ko sta f_{xy} in f_{yx} oba zvezna, sta enaka.
Podobno označujemo parcialne odvode višjih redov. Pri tem lahko namesto $\underbrace{\partial x\,\partial x \cdots \partial x}_{k}$ pišemo ∂x^k.

25. Izračunajte vse parcialne odvode prvega in drugega reda funkcije:

$$f(x, y) = x^3 e^{x+5y}\,.$$

26. Dana je funkcija $f(x, y, z) = \sin(xy^z)$. Izračunajte f_{xyz}.

27. Dana je funkcija:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}\,.$$

Dokažite, da je f povsod zvezna ter da povsod obstajata prva dva parcialna odvoda in sta zvezna (t. j. f je *zvezno diferenciabilna*). Nadalje dokažite še, da mešana odvoda:

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right) \quad \text{in} \quad f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right)$$

v točki $(0, 0)$ obstajata, a nista enaka. Kaj sledi?

Taylorjeva vrsta za funkcije več spremenljivk

Poseben primer razvoja drugega reda za funkcijo dveh spremenljivk:

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k + \\ + \frac{1}{2!}f_{xx}(a,b)h^2 + \frac{1}{1!\,1!}f_{xy}(a,b)hk + \frac{1}{2!}f_{yy}(a,b)k^2 + R_2\,,$$

kjer je:

$$R_2 = \frac{1}{3!}f_{xxx}(a+\vartheta h, b+\vartheta k)h^3 + \frac{1}{2!\,1!}f_{xxy}(a+\vartheta h, b+\vartheta k)h^2k + \\ + \frac{1}{1!\,2!}f_{xyy}(a+\vartheta h, b+\vartheta k)hk^2 + \frac{1}{3!}f_{yyy}(a+\vartheta h, b+\vartheta k)k^3$$

za primeren $\vartheta \in [0,1]$.

28. Dana je funkcija $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$. Zapišite Taylorjev razvoj drugega reda (brez eksplicitne oblike ostanka) in z njegovo pomočjo približno izračunajte $\dfrac{\sqrt[3]{8{\cdot}06}}{\sqrt{24{\cdot}5}}$.

29. Dana je funkcija $f(x,y) = \ln(1+xy^2)$. Izračunajte $f_{xxyyyy}(0,0)$ in $f_{xxxxyy}(0,0)$.

30. Dana je funkcija $f(x,y) = \sin(x+y^2)$. Izračunajte $f_{xyyyy}(0,0)$.

Globalni ekstremi

Na zaprtem in omejenem območju vsaka zvezna funkcija f vedno doseže globalni minimum in maksimum. Če to območje omejuje končno mnogo krivulj oblike $x = x(t)$, $y = y(t)$, se lahko to zgodi kvečjemu:

- *v ogliščih;*
- *na delih roba, kjer funkcija $t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$ ni odvedljiva ali pa ima stacionarno točko, t. j. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(x(t), y(t)\big) = 0$;*
- *v notranjosti, kjer funkcija f ni odvedljiva ali pa ima stacionarno točko, t. j. $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$.*

31. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = xy\,e^{-x-y}$ na območju:

$$D = \big\{(x,y)\ ;\ x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 3\big\}$$

32. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ na območju:

$$D = \big\{(x,y)\ ;\ x^2 \le y \le x\big\}$$

33. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = (2+3x^2)y$ na krogu s središčem v $(0,2)$ in polmerom 1.

34. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = (x^2 + y^2 + 4)e^{-x/2}$ na območju:
$$D = \left\{(x,y)\ ;\ (x+1)^2 + y^2 \leq 16, x \geq -1\right\}.$$

Lokalni ekstremi

Funkcija doseže v točki **a lokalni minimum**, *če obstaja taka okolica točke* **a**, *da za vsak* **x** *iz te okolice, ki ni enak* **a**, *velja* $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$.
Funkcija doseže v točki **a lokalni maksimum**, *če obstaja taka okolica točke* **a**, *da za vsak* **x** *iz te okolice, ki ni enak* **a**, *velja* $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$.
Vsi lokalni ekstremi parcialno odvedljive funkcije v notranjih točkah definicijskega območja so **stacionarne točke**, *t. j. vsi prvi parcialni odvodi morajo biti enaki nič. Če ima torej funkcija* f *dveh spremenljivk v notranji točki* (a,b), *kjer je parcialno odvedljiva, lokalni ekstrem, mora biti* $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.
Pri klasifikaciji lokalnih ekstremov si lahko pomagamo s **Hessejevo matriko** *in njeno determinanto:*

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}, \quad K = \det H = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 .$$

Naj bo f *dvakrat parcialno zvezno odvedljiva in naj bo v* (a,b) *stacionarna točka.*

- *Če velja* $K(a,b) > 0$ *in* $f_{xx}(a,b) > 0$, *je tam lokalni minimum.*
- *Če velja* $K(a,b) > 0$ *in* $f_{xx}(a,b) > 0$, *je tam lokalni minimum.*
- *Če velja* $K(a,b) < 0$, *tam ni lokalnega ekstrema (pojavi se "sedlo").*
- *Če je* $K(a,b) = 0$, *se lahko pri isti Hessejevi matriki zgodi tako, da ekstrem je, kot tudi, da ga ni. Zato take primere obravnavamo z drugačnimi prijemi.*

V nalogah od 35. do 39. je potrebno poiskati in klasificirati lokalne ekstreme funkcij.

35. $f(x,y) = (x+y)e^{x-y}$.

36. $f(x,y) = x^4 + 4xy + y^4 + 1$.

37. $f(x,y) = e^{-x}(x - y^2)$.

Klasifikacija lokalnih ekstremov funkcij več kot dveh spremenljivk

Dana naj bo funkcija n spremenljivk. V stacionarni točki izračunamo naslednje poddeterminante Hessejeve matrike:

$$K_r = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_rx_1} & \cdots & f_{x_rx_r} \end{vmatrix}$$

- *Če je $K_r > 0$ za vse $r = 1, 2, \ldots n$, gre za minimum.*
- *Če je $K_r < 0$ za vse lihe r in $K_r > 0$ za vse sode r, gre za maksimum.*
- *Če za določen m velja $K_m \neq 0$ in determinante $K_1, \ldots K_m$ ne ustrezajo nobenemu od prejšnjih dveh vzorcev, ekstrema ni.*
- *Prav tako ni ekstrema, če ima Hessejeva matrika neničelna diagonalca z nasprotnima predznakoma. Splošneje, ekstrema ni, brž ko ima Hessejeva matrika dve neničelni lastni vrednosti z nasprotnima predznakoma.*
- *Pri formiranju Hessejeve matrike lahko vzamemo poljuben vrstni red spremenljivk.*
- *Če se po nobeni od prejšnjih točk ne moremo opredeliti, ali ekstrem je ali ga ni, se lahko pri isti Hessejevi matriki zgodi oboje.*

38. Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije
$f(x, y, z) = (3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz)e^{-x}$.

39. $f(x, y) = x^2y^2$.

Strategija iskanja vezanega ekstrema *funkcije* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *pri pogojih:*

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) &= a_1 \,, \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) &= a_2 \,, \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) &= a_m \,, \end{aligned}$$

kjer privzamemo, da so funkcije $f, g_1, \ldots, g_m$ *dovolj lepe.*
Najprej definiramo **Lagrangeovo funkcijo**:

$$F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \ldots - \lambda_m g_m \,.$$

Nato rešimo sistem $m + n$ *enačb:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \,, \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_m}(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \,, \\ g_1(x_1, \ldots, x_n) &= a_1 \,, \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) &= a_m \,, \end{aligned}$$

pri čemer so neznanke števila $x_1, \ldots, x_n$ *in* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. *Dobljene* n*-terice* $(x_1, \ldots, x_n)$ *so kandidati za vezan ekstrem funkcije*
(v kolikor je možno, se izognemo računanju števil $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$*).*

40. Kateri kvader z dano telesno diagonalo ima največji volumen?

41. Na ravninski krivulji, podani z enačbo:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

poiščite točko, ki leži najbolj *levo.*

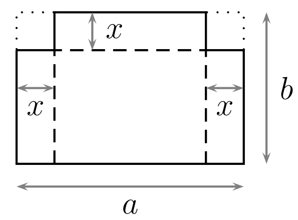
Tako kot pri funkcijah ene spremenljivke tudi funkcija več spremenljivk zavzame ekstremne vrednosti kvečjemu v:
- *robnih točkah definicijskega območja;*
- *točkah neodvedljivosti;*
- *stacionarnih točkah.*

Rob navadno razdelimo na več krivulj, pri čemer moramo posebej obravnavati oglišča.

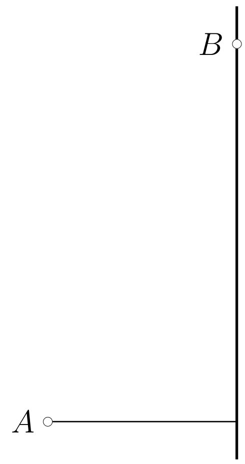
42. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y, z) = xyz$ na območju, določenem z neenačbo $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 1$.

43. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = x^2 y$ na krogu s središčem v $(0, 2)$ in polmerom 1.

44. Iz sosednih vogalov pravokotnika z dano ploščino S izrežemo dva enaka kvadratka. Nato iz dobljenega lika sestavimo kvader brez dveh ploskev (glej sliko). Določite razmerje stranic kvadrata (a in b) ter izrezanega kvadratka (x), pri katerem bo imel dobljeni kvader največjo prostornino.



45. V puščavi sta kraja A in B. Kraj A leži ob lokalni, kraj B pa ob glavni cesti. Le-ti se sekata pod pravim kotom, in sicer 5 km od kraja A in 10 km od kraja B (glej sliko).
Po lokalni cesti je možno voziti 50 km/h, po glavni cesti 80 km/h, možno pa je voziti tudi po puščavi s hitrostjo 40 km/h. Kako naj čim hitreje pridemo iz kraja A v kraj B?



Izrek o inverzni preslikavi

Naj bosta f in g zvezno diferenciabilni funkciji dveh spremenljivk, naj bo $x = f(z, w)$ in $y = g(z, w)$ in naj to velja tudi za $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ in $w = w_0$. Če je Jacobijeva matrika parcialnih odvodov funkcij f in g v tej točki obrnljiva, se v okolici te točke spremenljivki z in w enolično izražata z x in y in velja:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{bmatrix}^{-1} .$$

Podobno velja tudi za več spremenljivk.

46. Pokažite, da ima sistem enačb:

$$\begin{aligned} (1 + w^2) \ln z &= x \\ z^3 + zw &= y \end{aligned}$$

v okolici točke $x = 0, y = 5$ enolično rešitev. V tej točki izračunajte parcialne odvode $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ in $\frac{\partial w}{\partial y}$. Nato približno rešite sistem za $x = 0{\cdot}17$ in $y = 5{\cdot}1$.

Izrek o implicitni funkciji

Naj bo množica točk v ravnini dana z enačbo $F(x, y) = a$ in naj ji pripada tudi točka (x_0, y_0). Če je F v okolici te točke parcialno zvezno odvedljiva in je $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, lahko dano množico točk v neki okolici točke (x_0, y_0) zapišemo v eksplicitni obliki $y = f(x)$ (kjer je seveda $f(x_0) = y_0$). Poleg tega je f pri x_0 odvedljiva in velja:

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}\,.$$

Podobno velja tudi za funkcije več spremenljivk (če je x večrazsežna, je posplošitev premočrtna – le f' zamenjamo z ustreznimi parcialnimi odvodi; sicer pa je potrebna uporaba matričnega računa.

47. Dana je enačba $y^5 + xy = 32$.
   a) Rešite enačbo na y pri $x = 0$.
   b) Pokažite, da obstaja taka okolica izhodišča, da je enačba za vse x iz te okolice enolično rešljiva na y. Tako postane y funkcija spremenljivke x. Zapišite Taylorjev razvoj te funkcije do vključno drugih odvodov.
   c) Približno rešite enačbo na y pri $x = 1$.

48. Dana je enačba $e^{xz} - y - z = 0$.
   a) Rešite enačbo na z pri $x = y = 0$.
   b) Če se z kot rešitev te enačbe izraža kot funkcija spremenljivk x in y, zapišite njena parcialna odvoda pri $x = y = 0$.
   c) Približno rešite enačbo na z pri $x = 0{\cdot}1, y = 0{\cdot}2$.

49. Dan je sistem enačb:

$$\begin{aligned} y^3 + xz^2 &= 8\,, \\ xy^2 + z^2 &= 9\,. \end{aligned}$$

   a) Rešite sistem na y in z pri $x = 0$ in $z > 0$.
   b) Če se y in z kot rešitvi tega sistema izražata kot funkcija spremenljivke x, zapišite njuna odvoda pri $x = 0$ in $z > 0$.
   c) Približno rešite sistem na y in z pri $x = 0{\cdot}1$, $z > 0$.

50. Poiščite in klasificirajte stacionarne točke funkcije $z = z(x, y)$, določene z zvezo $e^{xz} - xy - z = 3$.

5. Krivulje

1. Dana je ravninska krivulja:

$$x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad y = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,; \qquad -1 \le t \le 1\,.$$

Zapišite jo v eksplicitni obliki. Katera znana krivulja je to?

Naklonski kot ravninske krivulje

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + k\pi = \operatorname{arctg}\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} + k\pi = \operatorname{arctg}\frac{\dot{y}}{\dot{x}} + k\pi = \operatorname{arcctg}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + k^*\pi$$

Celo število k (oz. k^*) lahko sicer izberemo poljubno. A če gledamo α v fiksni točki, kot navadno določimo tako, da leži na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; če pa gledamo spreminjanje kota s točko na krivulji (oz. parametrom), pa kot določimo tako, da se spreminja zvezno.

Tangenta in normala na ravninsko krivuljo

Če z (x, y) označimo točko na krivulji, z (X, Y) pa točko na tangenti oz. normali skozi točko (x, y), se enačbi teh dveh premic lahko zapišeta takole:

Tangenta:	*Normala:*
$(Y - y)\dot{x} = (X - x)\dot{y}$	$(X - x)\dot{x} + (Y - y)\dot{y} = 0$

2. Dana je krivulja:

$$x = t^2\,, \quad y = t - \frac{t^3}{3}\,.$$

Narišite jo ter izračunajte njen naklonski kot, tangento in normalo pri $t = \sqrt{3}$ in $t = 0$.

Orientacija, naravni parameter, tangentni in normalni vektor, ukrivljenost in krivinski polmer ravninske krivulje

Na vsaki krivulji (ki, če jo definiramo zgolj kot množico točk v ravnini, ne sme sekati same sebe) lahko definiramo dve **orientaciji**, *t. j. linearni urejenosti točk. Vsaka parametrizacija nam krivuljo tudi orientira. Če je krivulja parametrizirana s t in u in je povsod $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t > 0$, parametrizaciji določata isto orientacijo; če je $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t < 0$, določata nasprotno orientacijo.*

Naravni parameter *ravninske krivulje, ki ga navadno označimo z s, je določen z zvezo:*

$$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \,.$$

Zgornji pogoj je neodvisen od parametrizacije. Če je $\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, izbrana naravna parametrizacija krivuljo orientira enako kot izvirna.

Odvode po naravnem parametru navadno označujemo s črtico ($'$). Če je krivulja že prej parametrizirana in ne določimo drugače, vzamemo naravni parameter, ki določa isto orientacijo kot prvotni.

Tangentni vektor: $\vec{t} = (x', y') = \dfrac{(\dot{x}, \dot{y})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$

Normalni vektor: $\vec{n} = (-y', x') = \dfrac{(-\dot{y}, \dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$

Ukrivljenost *ravninske krivulje lahko definiramo kot:*

$$\kappa = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \alpha' \,,$$

krivinski polmer *pa je enak $\rho = \dfrac{1}{|\kappa|}$.*

Pritisnjena krožnica *v dani točki je krožnica s polmerom ρ, katere središče dobimo tako, da se od dane točke vzdolž vektorja $\vec{n}$ pomaknemo za $1/\kappa$.*

3. Dana je krivulja $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t$.

   a) Narišite jo.

   b) Izrazite njen naklonski kot s parametrom t.

   c) Naravno jo parametrizirajte in pri tem ohranite orientacijo. Izrazite naklonski kot še z dobljenim naravnim parametrom.

   d) Pri $t = 0$ izračunajte ukrivljenost in krivinski polmer.

Ravninske krivulje, podane eksplicitno

Če je ravninska krivulja podana eksplicitno, se odvod poljubne količine u po naravnem parametru izraža s formulo:

$$u' = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}} \,.$$

Ukrivljenost pa se izraža s formulo:

$$\kappa = \frac{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}$$

4. Dana je ravninska krivulja $y = \ln x - \dfrac{x^2}{8}$.

   a) Določite ukrivljenost, krivinski polmer in pritisnjeno krožnico pri $x = 1$.

   b) Kje je ukrivljenost po absolutni vrednosti največja?

   Opomba: točkam, kjer ukrivljenost doseže lokalni minimum ali maksimum, pravimo *temena*.

Ukrivljenost ravninske krivulje, podane parametrično

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}$$

5. Določite minimalni krivinski polmer na krivulji $x = t^2 \,, \quad y = t - \dfrac{t^3}{3}$.

Tangentni vektor in tangenta na prostorsko krivuljo

Tangentni vektor *na krivuljo* $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$*:*

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\|} = \frac{(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

Tangenta *je premica, ki gre skozi dano točko na krivulji, smerni vektor pa se ujema s tamkajšnjim tangentnim vektorjem. Če krajevni vektor točke na tangenti označimo* $\vec{R} = (X, Y, Z)$*, ima tangenta enačbo* $\vec{R} = \vec{r} + u\vec{t}$*.*

6. Parametrizirajte krivuljo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

in določite tangentni vektor pri $z = 1, y < 0$, če z narašča. Tam določite še tangento.

7. Naj bo $\vec{v}\colon\ (a,b) \to \mathbb{R}^n$ odvedljiva vektorska funkcija, katere vrednosti so *enotski* vektorji. Za $t, s \in (a,b)$ naj bo $\varphi(t,s)$ kot med vektorjema $\vec{v}(t)$ in $\vec{v}(s)$. Izrazite levi in desni odvod funkcije $s \mapsto \varphi(t,s)$ v dani točki t z $\dot{\vec{v}}(t)$.

Naravni parameter *(s) prostorske krivulje, podane parametrično, je določen z zvezo:*

$$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\,.$$

Zgornji pogoj je neodvisen od parametrizacije. Če je $\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$, izbrana naravna parametrizacija krivuljo orientira enako kot izvirna.

8. Na krivulji:

$$x = 2t\,, \quad y = t^2\,, \quad z = \frac{t^3}{3}$$

v izhodišču izračunajte u'', kjer je $u = x^2 + 4y^2 + 9z^2$, s črtico $(')$ pa je označen odvod po naravnem parametru.

Ukrivljenosti in spremljajoči trieder
naravno parametrizirane prostorske krivulje

Tangentni vektor lahko zapišemo tudi kot odvod krajevnega vektorja točke na krivulji po naravnem parametru: $\vec{t} = \vec{r}\,'$.

Fleksijska ukrivljenost (upognjenost): $\kappa = \|\vec{t}\,'\| = \|\vec{r}\,''\|$

Glavni normalni vektor: $\vec{n} = \dfrac{\vec{t}\,'}{\kappa} = \dfrac{\vec{r}\,''}{\kappa}$

Binormalni vektor: $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$

Torzijska ukrivljenost (zvitost): ω, $\vec{b}\,' = -\omega\vec{n}$

Enotski vektorji $\vec{t}$, $\vec{n}$ in $\vec{b}$ tvorijo **spremljajoči trieder**.

Spremljajoče premice in ravnine

Tangenta: $\vec{R} = \vec{r} + u\vec{t}$
Glavna normala: $\vec{R} = \vec{r} + u\vec{n}$
Binormala: $\vec{R} = \vec{r} + u\vec{b}$
Pritisnjena (oskulacijska) ravnina: $\langle \vec{R} - \vec{r}, \vec{b} \rangle = 0$
Normalna ravnina: $\langle \vec{R} - \vec{r}, \vec{t} \rangle = 0$
Rektifikacijska ravnina: $\langle \vec{R} - \vec{r}, \vec{n} \rangle = 0$

9. Dana je prostorska krivulja:

$$x = e^t \cos t \,, \quad y = e^t \sin t \,, \quad z = e^t \,.$$

a) Poiščite naravni parameter.
b) V vseh točkah določite spremljajoči trieder in obe ukrivljenosti.
c) Pri $t = 0$ določite še vse spremljajoče premice in ravnine.

Spremljajoči trieder in ukrivljenosti pri splošnem parametru

Če parameter ni naraven, si lahko pomagamo z naslednjimi dejstvi:

- $\dot{\vec{r}}$ *ima smer tangente:* $\vec{t} = \dfrac{\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\|}$.
- $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$ *ima smer binormale:* $\vec{b} = \dfrac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\|}$.
- $(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}$ *ima smer glavne normale:* $\vec{n} = \dfrac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}}{\|(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}\|} = \vec{b} \times \vec{t}$.
- $\kappa = \dfrac{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\|}{\|\dot{\vec{r}}\|^3}$.
- $\omega = \dfrac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]}{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\|^2}$.

10. Dana je krivulja:

$$x = \frac{t^4}{4} \,, \quad y = \frac{t^3}{3} \,, \quad z = \frac{t^2}{2} \,.$$

a) V vseh točkah določite spremljajoči trieder in obe ukrivljenosti.
b) Pri $t = 1$ določite še vse spremljajoče premice in ravnine.

11. Parametrizirajte krivuljo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,, \qquad z = x^2 - x + y^2$$

in določite fleksijsko ukrivljenost pri $z = 1/2$, $y < 0$.

6. Ploskve

Zapis ploskve. Koordinatne krivulje. Normalni vektor, normala, tangentna ravnina. Prva in druga fundamentalna forma. Ukrivljenost normalnega preseka v dani smeri, glavni ukrivljenosti, glavni smeri. Gaussova in povprečna ukrivljenost. Klasifikacija točk na ploskvi glede na ukrivljenost.

Zapis ploskve

Ploskev lahko zapišemo:

- **eksplicitno**: $z = f(x, y)$;
- **implicitno**: $F(x, y, z) = 0$;
- **parametrično**: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ *ali tudi vektorsko* $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

Če pri parametričnem zapisu enega od parametrov fiksiramo, dobimo **koordinatne krivulje**. *Koordinatne krivulje pripadajo parametričnemu zapisu ploskve, ne ploskvi sami.*

1. Dana je parametrično zapisana ploskev $\vec{r} = \big(u \cos v, u \sin v, \sqrt{1 - u^2}\big)$.

   a) Zapišite jo v eksplicitni obliki.

   b) Katera ploskev je to?

   c) Pokažite, da so koordinatne krivulje pravokotne povsod, kjer ima to smisel.

   d) Pokažite, da je

   $$\begin{aligned} x &= \cos t \cos t \cos w - \cos t \sin t \sin w\,, \\ y &= \cos t \cos t \sin w + \cos t \sin t \cos w\,, \\ z &= \sin t \end{aligned}$$

   zapis ploskve, ki vsebuje prejšnjo ploskev. Zapišite novo ploskev v implicitni obliki. Katera ploskev je to?

   e) Izračunajte kot med koordinatnima krivuljama glede na novo parametrizacijo v točki $\big(1/2, \sqrt{3}/2, 0\big)$.

   f) Dokažite, da koordinatne krivulje glede na novo parametrizacijo niso pravokotne nikjer, kjer ima to smisel.

Normalni vektor, normala, tangentna ravnina

Normalni vektor $\vec{N}$ *v dani točki na ploskvi je enotski vektor, čigar smer se glede na zapis ploskve:*

- *če je ekspliciten, ujema s smerjo vektorja* $\left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$;
- *če je impliciten, ujema s smerjo vektorja* (F_x, F_y, F_z);
- *če je parametričen, ujema s smerjo vektorja* $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

Pri različnih zapisih iste množice točk, ki je ploskev, sta v posamezni točki možna dva normalna vektorja. Kateri vektor bo normalni, določa **orientacija** *ploskve. Ekspliciten, impliciten ali parametričen zapis ploskve nam torej ne določa le množice točk, temveč tudi njeno orientacijo. Eksplicitni zapis ploskve nam da orientacijo, pri kateri normalni vektor kaže navzgor.*

Normala *na ploskev v dani točki je premica, ki gre skozi to točko in katere smerni vektor se ujema z normalnim vektorjem ploskve.*
Tangentna ravnina *na ploskev v dani točki je ravnina, ki gre skozi to točko in katere normalni vektor se ujema z normalnim vektorjem ploskve.*

2. Določite normalni vektor in normalo na ploskev $z = x^2 + \dfrac{18}{y}$ v točki $T(1, 3, z)$.

3. Določite tangentno ravnino na ploskev $e^{xz} - 3y - z = 0$ v točki $T(0, 0, z)$.

4. Dana je ploskev $\vec{r} = \begin{bmatrix} u\cos v \\ u^2 \sin v \\ u^3 - u \end{bmatrix}$.

   a) Določite, kje so koordinatne krivulje pravokotne.

   b) Pri $u = \sqrt{3}$ in $v = \pi/3$ določite točko in tangentno ravnino.

5. Poiščite tangentno ravnino na elipsoidu $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$, ki je vzporedna ravnini $x + y - z = 0$.

Tangentni vektorji, prva in druga fundamentalna forma

Vsi vektorji, ki so v dani točki tangentni na ploskev (t. j. ležijo v tangentni ravnini), so večkratniki totalnega diferenciala krajevnega vektorja:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}_u \, \mathrm{d}u + \vec{r}_v \, \mathrm{d}v \,,$$

torej jih lahko opišemo s parom $(\alpha, \beta) = (\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$. *Na vektorjih, ki pripadajo tem parom, sta definirani dve pomembni kvadratni formi.*

Prva fundamentalna forma *meri dolžine na ploskvi:*

$$\|\mathrm{d}\vec{r}\|^2 = E \, (\mathrm{d}u)^2 + 2F \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v + G \, (\mathrm{d}v)^2 \,,$$

kjer je:

$$E = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle \,, \quad F = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle \,, \quad G = \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle \,.$$

Potrebovali jo bomo tudi pri računanju površin.

Drugo fundamentalno formo *zapišemo v obliki:*

$$L \, (\mathrm{d}u)^2 + 2M \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v + N \, (\mathrm{d}v)^2 \,,$$

kjer je:

$$L = \frac{[\vec{r}_{uu}, \vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} \,, \quad M = \frac{[\vec{r}_{uv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} \,, \quad N = \frac{[\vec{r}_{vv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Ta forma v kombinaciji s prvo meri ukrivljenosti na ploskvi.

Ukrivljenosti na ploskvah

Ukrivljenost normalnega preseka orientirane ploskve *v dani tangentni smeri je enaka predznačeni fleksijski ukrivljenosti preseka ploskve in ravnine, ki jo v dani točki pravokotno seka tako, da se smer tangentnega vektorja dobljene krivulje (v eni ali drugi orientaciji) ujema z dano tangentno smerjo. Predznak je pozitiven, če ploskovni normalni vektor kaže v isto smer kot vektor glavne normale krivulje, in negativen, če kaže v nasprotno smer. Če je smer, v kateri iščemo ukrivljenost, podana s smerjo* $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$ *v parametričnem prostoru, se ukrivljenost normalnega preseka izraža s formulo:*

$$\lambda = \frac{L\,(\mathrm{d}u)^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,(\mathrm{d}v)^2}{E\,(\mathrm{d}u)^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,(\mathrm{d}v)^2}$$

Minimalno in maksimalno ukrivljenost imenujemo **glavni ukrivljenosti** *ter jih označimo z* λ_1 *in* λ_2*. Ukrivljenost* λ *normalnega preseka v smeri neničelnega vektorja* $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) = (\alpha, \beta)$ *na parametričnem prostoru je glavna natanko tedaj, ko velja:*

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix},$$

to pa lahko velja le, če je:

$$\det\left(\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \right) = 0\,.$$

Tako dobimo smeri v parametričnem prostoru, kjer sta glavni ukrivljenosti doseženi (dve ali vse možne). Pripadajoči smeri na ploskvi dobimo s pomočjo totalnega diferenciala $\alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v$ *in ju imenujemo* **glavni smeri***.*

Gaussova ukrivljenost*:* $K = \lambda_1\lambda_2 = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$

Povprečna ukrivljenost*:* $H = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \dfrac{EN + GL - 2MF}{2(EG - F^2)}$

Klasifikacija točk na ploskvi

Točka je **eliptična***, če je* $LN - M^2 > 0$*; če je poleg tega še* $\lambda_1 = \lambda_2$*, t. j.* $\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$*, je točka* **krogelna***.*

Točka je **hiperbolična***, če je* $LN - M^2 < 0$*.*

Točka je **parabolična***, če je* $LN - M^2 = 0$*; če je poleg tega še* $L = M = N = 0$*, je točka* **planarna***.*

6. Dana je ploskev $\vec{r}(u, v) = \begin{bmatrix} 2u\cos v \\ u(\cos v + \sin v) \\ u^2 \end{bmatrix}$, $u > 0$.

a) Dokažite, da na njej obstaja natanko ena točka, ki ima koordinati $x = 2$ in $y = 1$. Izračunajte še koordinato z te točke.
b) Določite parameter t tako, da bo vektor $\vec{w} = (2, -1, t)$ v prej omenjeni točki tangenten na ploskev.
c) Izračunajte ukrivljenost normalnega preseka v smeri tega vektorja.
d) Klasificirajte točko ter izračunajte glavni ukrivljenosti in še Gaussovo in povprečno ukrivljenost.

Prva in druga fundamentalna forma za ploskve v eksplicitni obliki

Če je ploskev podana v eksplicitni obliki $z = f(x, y)$ in označimo:

$$p = f_x\,, \quad q = f_y\,, \quad r = f_{xx}\,, \quad s = f_{xy}\,, \quad t = f_{yy}\,,$$

velja:

$$E = 1 + p^2\,, \quad F = pq\,, \quad G = 1 + q^2\,, \quad EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2\,,$$
$$L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\,, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\,, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\,.$$

7. Na ploskvi $z = x^3 y^2$ klasificirajte točko, kjer je $x = y = 1$, ter tam določite Gaussovo in povprečno ukrivljenost.

8. Dokažite, da so vse točke na ploskvi $z = x^2 + xy + y^2$ eliptične. Katere so krogelne in koliko tam znaša ukrivljenost?

9. Določite glavni ukrivljenosti ploskve $e^{xz} - xy - z = 3$ v točki, kjer je normala vzporedna osi z.

Ukrivljenost poševnega preseka

Ukrivljenost poševnega preseka orientirane ploskve P z ravnino Π v dani točki je predznačena fleksijska ukrivljenost krivulje, ki je njun presek, pri čemer se predznak ujema s predznakom skalarnega produkta med ploskovnim normalnim vektorjem $\vec{N}_P$ in glavnim normalnim vektorjem krivulje v dani točki. Enaka je $1/\rho$, kjer je $\rho = R\cos\vartheta$, $1/R$ je ukrivljenost normalnega preseka v smeri tangente dobljene krivulje, ϑ pa je kot med ploskovnim normalnim vektorjem in glavnim normalnim vektorjem krivulje v dani točki.
Smer tangente ustreza smeri (α, β) v parametričnem prostoru, pri kateri je vektor $\alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v$ pravokoten na $\vec{N}_\Pi$, normalni vektor ravnine Π. Nadalje je $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, kjer je φ kot med normalama na dano ploskev in ravnino, torej je $\rho = R\sin\varphi$. Kot φ vedno vzamemo iz intervala $[0, \pi/2]$, torej je tudi $\rho = R\sqrt{1 - \langle\vec{N}_P, \vec{N}_\Pi\rangle^2}$.

10. Izračunajte ukrivljenost preseka orientirane ploskve $z = x^2 + 2y^2$ z ravnino $z = 2x + 2y + a$, ki naj seka ploskev v točki $T(-4, 1, z_0)$.

7. Integrali s parametrom

Odvajanje integralov s parametrom, konvergenca posplošenih integralov. Funkciji gama in beta.

1. Izračunajte integral s parametrom:

$$F(x) = \int_0^1 |2x - 3y| \, \mathrm{d}y \, .$$

Zveznost in odvajanje integralov

Naj bo f zvezna realna funkcija dveh spremenljivk. Tedaj je integral:

$$\int_a^b f(x, y) \, \mathrm{d}y$$

zvezen kot funkcija spremenljivk a, b in x.
Če sta funkciji u in v zvezno odvedljivi in $f(x, y)$ parcialno zvezno odvedljiva na x, velja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) \, \mathrm{d}y = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, \mathrm{d}y + f\big(x, v(x)\big) v'(x) - f\big(x, u(x)\big) u'(x)$$

2. Izračunajte $\displaystyle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_x^{\sqrt{x}} \frac{e^{-y^2/x}}{y} \, \mathrm{d}y$.

3. Dokažite, da je integral:

$$\int_{e^{1/(x+1)}}^{e^{2/(x+1)}} \frac{y^x}{\ln y} \, \mathrm{d}y$$

neodvisen od x.

Namig. Najprej pokažite, da to velja na poltrakih $(-\infty, -1)$ in $(-1, \infty)$. Nato pa s substitucijo $z = 1/y$ pokažite še, da se vrednost na prvem poltraku ujema z vrednostjo na drugem poltraku.

4. Določite, katera od funkcij $f_a(x) = ax$ je najbližja funkciji $f(x) = x^2 - 1$ v metriki:

$$d_2(g, h) = \left[\int_0^1 \big(g(x) - h(x) \big)^2 \, \mathrm{d}x \right]^{1/2} .$$

Posplošeni integrali

Naj bo $-\infty \le a < b \le \infty$ *in naj bo funkcija* f*, definirana na* (a, b)*, integrabilna v klasičnem (Riemannovem) smislu na vseh intervalih* $[u, v]$*, kjer je* $a < u \le v < b$ *(spomnimo se, da je* f *v klasičnem smislu integrabilna na* $[u, v]$*, brž ko je tam zvezna). Integral:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

v posplošenem smislu je definiran kot vsota limit:

$$\lim_{u \downarrow a} \int_u^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{v \uparrow b} \int_c^v f(x)\,\mathrm{d}x$$

pod pogojem, da ti dve limiti obstajata. Definicija je neodvisna od števila $c \in (a, b)$*. Če posplošeni integral obstaja, pravimo, da* **konvergira***, sicer pa pravimo, da* **divergira**.

Če je f *v klasičnem smislu integrabilna na vseh intervalih* $[u, b]$*, se integral (tudi glede obstoja) ujema z limito* $\lim_{u \downarrow a} \int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Če je f *v klasičnem smislu integrabilna na vseh intervalih* $[a, v]$*, se integral (tudi glede obstoja) ujema z limito* $\lim_{v \uparrow b} \int_a^v f(x)\,\mathrm{d}x$.

Če je f *v klasičnem smislu integrabilna na* $[a, b]$*, posplošeni integral obstaja in se ujema s klasičnim.*

V nalogah od 5. do 21. je potrebno določiti, za katere x konvergirajo dani integrali.

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y^x}$.

6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^x}$.

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{xy} - 1}{y}\,\mathrm{d}y$.

Posplošeni integrali vsot

Če integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *in* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *oba konvergirata, tudi integral* $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x$ *konvergira in velja:*

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Če integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergira, integral* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *pa divergira,* $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x$ *divergira.*

Če je $f, g \ge 0$ *ter če integrala* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *in* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *oba divergirata, tudi integral* $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x$ *divergira.*

8. $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{y^x} + \frac{1}{y^{3-x}}\right)\mathrm{d}y$
9. $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{y^x} + \frac{1}{y^{3-x}}\right)\mathrm{d}y$

Majorizacija

Če integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergira in je* $0 \le g \le f$, *tudi integral* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergira.*

10. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^x + y^{3-x}}$.
11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln y}{y^x}\,\mathrm{d}y$.

Množenje integranda s funkcijo

Naj bo f nenegativna funkcija na intervalu $[a, b]$.

- *Naj bo g omejena funkcija. Če integral $\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$ konvergira, tudi integral $\int_a^b f(x)\, g(x) \, \mathrm{d}x$ konvergira.*
- *Če je funkcija g navzdol omejena z neko konstanto $m > 0$ in integral $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ divergira, tudi integral $\int_a^b f(x)\, g(x) \, \mathrm{d}x$ divergira.*
- *Če je g omejena stran od 0 in od neskončno (če torej obstajata taki konstanti $0 < m \le M < \infty$, da za vsak $x \in [a, b]$ velja $m \le g(x) \le M$), integral $\int_a^b f(x)\, g(x) \, \mathrm{d}x$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira integral $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$.*

12. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^y}{1+e^y} \frac{\mathrm{d}y}{y^x}$.

13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^2(y^x+a)} \quad (a > 0)$.

14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{xy}-1}{y^{x+3}} \, \mathrm{d}y$.

Konvergenca integralov in eksponentna funkcija

Če je f algebraična funkcija na intervalu $[a, \infty)$, integral $\int_a^\infty f(y)\, e^{xy} \, \mathrm{d}y$ za $x < 0$ konvergira, za $x > 0$ pa divergira.

15. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^y \mathrm{d}y}{y^x}$.

16. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-y} \mathrm{d}y}{y^x}$.

17. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{xy} \, \mathrm{d}y}{y^2}$.

18. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{xy} \, \mathrm{d}y}{y}$.

19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{xy} \, \mathrm{d}y}{y}$.

20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{xy}\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}$.

21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-y}}{y^x}\,\mathrm{d}y$.

V nalogah od 22. do 26. določite definicijska območja integralov in jih izračunajte.

22. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}y$.

23. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.
Lahko privzamete, da je definicijsko območje zaprta množica in da je integral zvezna funkcija spremenljivke a.

24. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ax)}{x}\,\mathrm{d}x$.

25. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(bx)-\cos(ax)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
Lahko privzamete, da je integral zvezna funkcija spremenljivk a in b.

26. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a)^2}$.

27. Naj bo $y = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$. Izračunajte $y''+y$.

Funkcija gama

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

28. Izračunajte $\displaystyle\int_0^\infty x^7\,e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$.

29. Izračunajte $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-9x^2}\,\mathrm{d}x$.

30. Izračunajte $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^4\sqrt{-\ln x}\,\mathrm{d}x$.

Funkcija beta

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

31. Izračunajte $\displaystyle\int_{-4}^{4} x^2\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u$$

32. Izračunajte $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^5}{1+x^{12}}\,\mathrm{d}x$.

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\varphi\cos^{2y-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

33. Izračunajte $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^4\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$.

8. Dvojni in trojni integral

Prevedba na dvakratni oz. trikratni integral, zamenjava vrstnega reda integracije. Vpeljava novih koordinat. Polarne, cilindrične in sferične koordinate. Uporaba: volumen, masa, težišče, vztrajnostni moment.

Dvojni integral

Če je ravninsko območje D podano s pogojema $a < x < b$, $g_1(x) < y < g_2(x)$, kjer je $g_1(x) < g_2(x)$, brž ko je $a < x < b$, dvojni integral spremenljivke $u = f(x, y)$ prevedemo na dvakratnega na naslednji način:

$$\iint_D u \,\mathrm{d}P = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\substack{a<x<b \\ g_1(x)<y<g_2(x)}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Če ne bo izrecno določeno drugače, se bo oznaka $\mathrm{d}P$ vedno nanašala na spremenljivki x in y.

1. Izračunajte dvojni integral:
$$\iint_D (x^2 + y)\,\mathrm{d}P\,,$$
kjer je D območje, ki ga omejujeta krivulji $y = x/2$ in $x = y^2$ (t. j. območje je neprazno, omejeno, njegov rob je sestavljen iz delov teh dveh krivulj in vsaka krivulja ima svoj nezanemarljiv del na robu območja).

2. Izračunajte dvojni integral:
$$\iint_D xy\,\mathrm{d}P\,,$$
kjer je D štirikotnik z oglišči $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(3,1)$ in $D(1,1)$.

3. Izračunajte $\displaystyle\iint_{\substack{x>0\\y>0}} e^{-x}\,\mathrm{d}P$.

4. Izračunajte $\displaystyle\iint_{x>y>0} e^{-x}\,\mathrm{d}P$.

5. Za $a, b > 0$ izračunajte $\displaystyle\iint_{x>y>0} y^{a-1}(x-y)^{b-1}e^{-x}\,\mathrm{d}P$.

V nalogah od 6. do 11. zamenjajte vrstni red integriranja.

6. $\displaystyle\int_0^\infty \int_{x+1}^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

7. $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^{x+1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

8. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

9. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{1-x^2}^{2-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

10. $\displaystyle\int_1^\infty \int_{\ln x}^{2+\ln x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

11. $\displaystyle\int_2^4 \int_x^{2x-3} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

Vpeljava novih spremenljivk

Naj bo $G = (g,h)\colon\ \Delta \to D$, kjer je $D, \Delta \subseteq \mathbb{R}^2$, bijektivna preslikava. Tedaj velja:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f\big(g(u,v), h(u,v)\big)\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

kjer je J **Jacobijeva determinanta** *ali* **jacobiana***:*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}\,.$$

Zakaj moramo pri Jacobijevi determinanti vzeti absolutno vrednost, nam ilustrira naslednji primer: če v integral $\int_1^2 x\sqrt{23-7x}\,\mathrm{d}x$ vpeljemo substitucijo $u = \sqrt{23-7x}$, $x = (23-u^2)/7$, dobimo:

$$\int_4^3 \frac{23-u^2}{7}\left(-\frac{2}{7}\,u\,\mathrm{d}u\right) = \frac{2}{7}\int_3^4 (23-u^2)u\,\mathrm{d}u\,.$$

V duhu integrala, s katerim delamo sedaj, pa bi substitucijo uvedli takole:

$$\int_{(1,2)} x\sqrt{23-7x}\,\mathrm{d}x = \int_{(3,4)} \frac{23-u^2}{7}\left|-\frac{2}{7}\,u\right|\mathrm{d}u = \frac{2}{7}\int_{(3,4)} (23-u^2)u\,\mathrm{d}u\,.$$

12. Izračunajte $\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}P$, kjer je D območje, ki leži v kvadrantu $x > 0, y > 0$ in ga omejujejo krivulje $x = y$, $x = 9y$, $xy = 1$ in $xy = 4$.

13. Izračunajte:
$$\iint_D \frac{1}{y}\,\mathrm{d}P\,,$$
kjer je D območje, ki ga omejujejo krivulje:
$$y = e^x\,, \quad y = 3\,e^x\,, \quad y = e^{-x} \quad \text{in} \quad y = 2\,e^{-x}\,.$$
Namig: uporabite primerne nove koordinate.

14. Izračunajte $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

Polarne koordinate

$$x = r\cos\theta \qquad r > 0$$
$$y = r\sin\theta \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

$$J = r$$

Namesto mej od 0 do 2π lahko vzamemo kateri koli interval dolžine 2π.

15. Izračunajte $\displaystyle\iint_{\substack{x,y>0\\x^2+y^2<4}} \frac{xy}{\big(1+(x^2+y^2)^2\big)^2}\,\mathrm{d}P$.

16. Izračunajte ploščino območja v ravnini, določeno s pogoji:
$$0 < x < y\sqrt{3}\,, \quad (x^2+y^2)^3 < 4xy(x^2-y^2)\,.$$

17. Izračunajte $\displaystyle\iint_D \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\,\mathrm{d}P$, kjer je D krog s središčem v izhodišču in polmerom $\sqrt{2}$.

18. Prevedite integral $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ na vsoto enojnih integralov funkcije f.

Volumen *telesa, podanega s pogoji:*
$$(x,y)\in\Delta\,, \quad h_1(x,y) < z < h_2(x,y)\,,$$
kjer je Δ ravninska množica in $h_1(x,y) \le h_2(x,y)$, brž ko je $(x,y)\in D$, je enak:
$$V = \iint_\Delta \big[h_2(x,y) - h_1(x,y)\big]\,\mathrm{d}P\,.$$

19. Izračunajte volumen telesa, ki ga omejujejo ravnine $z = 0$, $z = y$, $y = 1 - x^2$ in $y = 2 - 2x^2$.

20. Izračunajte volumen telesa, ki je določeno s tem, da leži na pozitivni strani vseh koordinatnih ravnin ter ga omejujeta še ravnina $2x + y = 4$ in ploskev $z = 4 - x^2$.

21. Izračunajte volumen telesa, ki ga določajo neenačbe:
$$x > 0\,, \quad y^2 < z < 1 - x\,.$$

22. Naj bo $0 < a < b$. Izračunajte volumen *torusa*, t. j. telesa, ki ga opisuje parametrizacija:
$$\begin{aligned} x &= (a + t\cos\varphi)\cos\theta \\ y &= (a + t\cos\varphi)\sin\theta \\ z &= t\sin\varphi \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} &0 \le \theta < 2\pi \\ &0 \le \varphi < 2\pi\,. \\ &0 \le t < b \end{aligned}$$

Trojni integral

Če je prostorsko območje D podano s pogoji:

$$(x, y) \in \Delta\,, \quad h_1(x, y) < z < h_2(x, y)\,,$$

$h_1(x, y) < h_2(x, y)$, brž ko je $(x, y) \in \Delta$, trojni integral spremenljivke $u = f(x, y, z)$ po danem območju prevedemo na trikratnega na naslednji način:

$$\iiint_D u\,\mathrm{d}V = \iiint_D f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\substack{(x,y)\in D \\ h_1(x,y)<z<h_2(x,y)}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \iint_\Delta \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Seveda moramo v nadaljevanju zunanji dvojni integral prevesti na dvakratnega, kar lahko storimo na več načinov (lahko tudi z vpeljavo novih spremenljivk). Če ne bo izrecno določeno drugače, se bo oznaka $\mathrm{d}V$ vedno nanašala na spremenljivke x, y in z.

23. Izračunajte $\displaystyle\iiint_{\substack{x<2 \\ x^2<y<x^3 \\ y<z<xy}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}V$.

Alternativni razcep trojnega integrala

Če je prostorsko območje D podano s pogoji:

$$a < x < b\,, \quad (y, z) \in \Delta_x\,,$$

kjer je Δ_x ravninska množica za vsak $a < x < b$, se trojni integral izraža v obliki:

$$\iiint_D f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \iint_{\Delta_x} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,.$$

24. Naj bo $a > 0$. Izračunajte trojni integral $\displaystyle\iiint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kjer je D telo, določeno s pogoji:

$$0 < x < a\,, \qquad y^2 + z^2 < 2xz\,.$$

Volumen kot trojni integral

Volumen prostorskega območja D je trojni integral konstante 1 po tem območju:

$$V = \iiint_D \mathrm{d}V = \iiint_D \mathrm{d}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Vpeljava novih spremenljivk

Gre analogno kot pri dvojnem integralu: naj bo $G = (g, h, k)\colon \Delta \to D$*, kjer je* $D, \Delta \subseteq \mathbb{R}^3$*, bijektivna preslikava. Tedaj velja:*

$$\iiint_D f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Delta f\big(g(u, v, w), h(u, v, w)\big)\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\,,$$

kjer je J **Jacobijeva determinanta** *ali* **jacobiana***:*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w} \\ \frac{\partial k}{\partial u} & \frac{\partial k}{\partial v} & \frac{\partial k}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

25. Ponovno izračunajte volumen torusa:

$$\begin{aligned} x &= (a + t\cos\varphi)\cos\theta \\ y &= (a + t\cos\varphi)\sin\theta \\ z &= t\sin\varphi \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} 0 &\le \theta < 2\pi \\ 0 &\le \varphi < 2\pi \\ 0 &\le t < b \end{aligned}.$$

Tokrat si lahko pomagate z vpeljavo novih spremenljivk: to naj bodo kar θ, φ in t.

Cilindrične koordinate

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & r &> 0 \\ y &= r\sin\theta & 0 \le \theta &< 2\pi \\ z &= z & J &= r \end{aligned}$$

26. Izračunajte $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2<3} \frac{x^2}{1 + x^2 z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Sferične koordinate

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\theta & r &> 0 \\ y &= r\cos\varphi\sin\theta & 0 \le \theta &\le 2\pi \\ z &= r\sin\varphi & -\tfrac{\pi}{2} \le \varphi &\le \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$J = r^2\cos\varphi$$

27. Izračunajte $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\le z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

28. Izračunajte volumen telesa, določenega s pogoji:

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 1\,,\ x^2 + y^2 \le z^2\,,\ z \ge 0\,.$$

29. Izračunajte integral:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \le 2z} x^2 y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

30. Izračunajte volumen telesa, določenega s pogojem:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 < \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}\,.$$

Ravninski lik D z (lahko nehomogeno) ploščinsko gostoto σ ima **maso***:*

$$m = \iint_D \sigma \,\mathrm{d}P$$

in **težišče** (x^*, y^*)*, kjer je:*

$$x^* = \frac{1}{m} \iint_D \sigma\, x \,\mathrm{d}P\,, \quad y^* = \frac{1}{m} \iint_D \sigma\, y \,\mathrm{d}P\,.$$

31. Naj bo $a > 0$. Izračunajte težišče trikotnika s koordinatami $A(0,0)$, $B(0,a)$ in $C(a,0)$, katerega ploščinska gostota je sorazmerna z $a - y$.

32. Izračunajte težišče homogenega ravninskega lika, določenega z neenačbami $x > 0$, $y > 0$, $x^{2/3} + y^{2/3} > R^{2/3}$.

Vztrajnostni moment *ravninskega lika D:*

$$J = \iint_D \sigma(x^2 + y^2) \,\mathrm{d}P$$

33. Ponovno je dan trikotnik s koordinatami $A(0,0)$, $B(0,a)$ in $C(a,0)$, katerega ploščinska gostota je sorazmerna z $a - y$ (velja $a > 0$). Izračunajte razmerje med njegovim vztrajnostnim momentom in njegovo maso.

34. Izračunajte razmerje med vztrajnostnim momentom in maso lika, ki ga omejuje astroida $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$. Privzemite, da je homogen.

Masa tridimenzionalnega telesa D:

$$m = \iiint_D \rho \, \mathrm{d}V$$

Težišče: (x^*, y^*, z^*), *kjer je:*

$$x^* = \frac{1}{m} \iiint_D \rho \, x \, \mathrm{d}V \,, \quad y^* = \frac{1}{m} \iiint_D \rho \, y \, \mathrm{d}V \,, \quad z^* = \frac{1}{m} \iiint_D \rho \, z \, \mathrm{d}V$$

Vztrajnostni momenti okoli osi x**,** y **in** z:

$$J_x = \iiint_D \rho(y^2 + z^2) \, \mathrm{d}V \,, \quad J_y = \iiint_D \rho(x^2 + z^2) \, \mathrm{d}V$$

$$J_z = \iiint_D \rho(x^2 + y^2) \, \mathrm{d}V$$

35. Dan je pokončen stožec, pri katerem je gostota premo sorazmerna z višino. Izračunajte njegovo maso, težišče in vztrajnostni moment okoli simetrijske osi.

36. Izračunajte težišče in vztrajnostni moment homogene enotske polkrogle okoli osi, ki gre skozi težišče in je pravokotna na osnovno ravnino.

37. Izračunajte vztrajnostni moment homogenega valja s polmerom R in višino h, in sicer okoli njegove simetrijske osi in še okoli osi, ki gre skozi težišče in je pravokotna na simetrijsko os.

9. Vektorska analiza

Gradient, divergenca, rotor, Laplaceov operator. Potencialna polja. Krivuljni in ploskovni integral vektorskega in skalarnega polja. Greenova formula, Gaussov in Stokesov izrek.

Gradient *skalarnega polja w je vektorsko polje:*

$$\operatorname{grad} w = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \vec{\nabla} w\,, \quad \textit{kjer je} \quad \vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Gradient je tesno povezan s totalnim diferencialom:

$\operatorname{grad} w = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ *pomeni isto kot* $\mathrm{d}w = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z$.

Smerni odvod *po enotskem vektorju $\vec{n}$ se izraža s formulo*

$\dfrac{\partial w}{\partial \vec{n}} = \langle \operatorname{grad} w\,,\,\vec{n}\rangle$.

1. Dano naj bo skalarno polje $w = x^2\,e^{y/z}$. Izračunajte $\operatorname{grad} w$, v točki $(1,0,1)$ pa še smerni odvod v smeri vektorja $(2,1,2)$.

Divergenca *vektorskega polja* $\vec{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ *je skalarno polje:*

$$\operatorname{div} \vec{R} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \langle \vec{\nabla}\,,\,\vec{R}\rangle\,.$$

2. Izračunajte $\operatorname{div}(x^2 z, -xy^2 z, 3yz^2)$.

3. Naj bo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\vec{r}\|$. Za vse p izračunajte $\operatorname{div}\bigl(r^p \vec{r}\bigr)$.

Rotor *vektorskega polja* $\vec{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ *je vektorsko polje:*

$$\operatorname{rot} \vec{R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial Z} \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \end{bmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{R}\,.$$

4. Izračunajte $\operatorname{rot}(xz^3, -2x^2yz, 2yz^4)$.

V zaporedju operatorjev:

$$\begin{array}{c}\textit{skalarno}\\ \textit{polje}\end{array} \xrightarrow{\text{grad}} \begin{array}{c}\textit{vektorsko}\\ \textit{polje}\end{array} \xrightarrow{\text{rot}} \begin{array}{c}\textit{vektorsko}\\ \textit{polje}\end{array} \xrightarrow{\text{div}} \begin{array}{c}\textit{skalarno}\\ \textit{polje}\end{array}$$

je kompozitum dveh zaporednih operacij enak nič: $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$ *in* $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$.

Za vektorsko polje pravimo, da je **brez vrtincev**, *če je njegov rotor enak nič, in* **brez izvirov (solenoidalno)**, *če je njegova divergenca enaka nič.*
Pravimo tudi, da je vektorsko polje $\vec{R}$ **potencialno**, *če je gradient nekega skalarnega polja* w: $\vec{R} = \operatorname{grad} w$. *Polje* w *je njegov* **potencial**. *Če je* $\vec{R} = (X, Y, Z)$, *lahko ekvivalentno zapišemo tudi* $\mathrm{d}w = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z$. *Pravimo, da je diferencialna forma na desni* **eksaktna**.
Vsako potencialno polje je torej brez vrtincev in vsako vektorsko polje, ki je dobljeno kot rotor nekega drugega vektorskega polja, je brez izvirov.

5. Izračunajte $\operatorname{div}(2z^4 + 2x^2y, 3xz^2, -4xyz)$.

6. Izračunajte $\operatorname{rot}\left(2x\,e^{y/z}, \dfrac{x^2}{z}\,e^{y/z}, -\dfrac{x^2y}{z^2}\,e^{y/z}\right)$.

Na dovolj lepih območjih (površno povedano, povezanih in brez lukenj) velja tudi obrat: vsako polje brez vrtincev je potencialno in vsako polje brez izvirov je rotor nekega vektorskega polja.

7. Poiščite vektorsko polje, čigar rotor je vektorsko polje $(x, -y, 0)$. *Namig*: eno od komponent lahko postavite na nič.

8. Dokažite, da obstajata taka a in b, da je vektorsko polje:

$$\big(2x^a \sin z,\ 3y^b \sin z,\ (x^{a+1} + y^{b+1}) \cos z\big)$$

potencialno. Za taka a in b izračunajte njegov potencial.

Laplaceov operator *skalarnega polja* w *je skalarno polje:*

$$\Delta w = \operatorname{div}\operatorname{grad} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\,.$$

9. Naj bo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
   a) Izračunajte Δr.
   b) Za skalarno polje w pravimo, da je *harmonično*, če je $\Delta w = 0$. Pri katerem eksponentu p je polje r^p harmonično?

Krivuljni integral vektorskega polja $\vec{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ *po krivulji* K*, parametrizirani v vektorski obliki* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *ali po komponentah* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$*, ko gre* t *od* a *do* b*, je enak:*

$$\int_K \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_K \langle \vec{R}, \mathrm{d}\vec{r} \rangle = \int_K (X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z) =$$
$$= \int_a^b \Big(X\big(\vec{r}(t)\big)\,\dot{x}(t) + Y\big(\vec{r}(t)\big)\,\dot{y}(t) + Z\big(\vec{r}(t)\big)\,\dot{z}(t) \Big)\,\mathrm{d}t$$

in je v osnovi neodvisen od parametrizacije: odvisen je le orientacije krivulje, ki jo določa dana parametrizacija. Integral po nasprotno orientirani krivulji je nasprotna vrednost prvotnega integrala. Pri parametrizaciji ni nujno, da je $a \le b$.
Izrazu $X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z$ *pravimo* **diferencialna forma**. *Splošneje, diferencialna forma je vsota izrazov oblike* $u\,\mathrm{d}v$*, kjer sta* u *in* v *skalarni polji. Krivuljni integral diferencialne forme definiramo po predpisu:*

$$\int_K u\,\mathrm{d}v = \int_a^b u\big(\vec{r}(t)\big)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v\big(\vec{r}(t)\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

pri čemer za vsote razširimo po linearnosti.

Orientacijo gladke krivulje lahko podamo kot usklajen nabor tangentnih vektorjev: za vsako notranjo točko je predpisan vektor $\vec{t}$, ki je tangenten na krivuljo, pri čemer mora obstajati taka parametrizacija $\vec{r} = \vec{r}(t)$, ko gre t od a do b, da ima $\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ isto smer kot $\vec{t}(\vec{r}(t))$, če je $a < b$, in nasprotno smer, če je $a > b$. Tako parametrizacija določi eno od dveh možnih orientacij.

10. Izračunajte integral vektorskega polja $\vec{R} = \begin{bmatrix} y \\ -z \\ x \end{bmatrix}$ po krivuljah $K_1 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}$ in $K_2 = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$, pri čemer gre parameter t obakrat od 0 do 1.

11. Izračunajte še integral vektorskega polja $\vec{R} = \begin{bmatrix} 2xz \\ z^2 \\ 2yz + x^2 \end{bmatrix}$ po krivuljah K_1 in K_2 iz prejšnje naloge.

Vektorsko polje $\vec{R}$ je potencialno natanko tedaj, ko je njegov krivuljni integral odvisen le od začetnega in končnega krajišča krivulje. V tem primeru je smiselno definirati $\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r}$ in skalarno polje:

$$w(x_0, y_0, z_0) = \int_{(a,b,c)}^{(x_0,y_0,z_0)} \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

je njegov potencial (pri poljubni začetni točki (a, b, c)): velja torej $\vec{R} = \operatorname{grad} \vec{w}$. Za pot od (a, b, c) do (x_0, y_0, z_0), podano s parametrizacijo $\vec{r} = \big((1-t)a + tx_0, (1-t)b + ty_0, (1-t)c + tz_0\big)$, kjer gre t od 0 do 1, dobimo:

$$\begin{aligned} w(x_0, y_0, z_0) = \int_0^1 \Big[& X\big((1-t)a + tx_0, (1-t)b + ty_0, (1-t)c + tz_0\big)(x_0 - a) + \\ & + Y\big((1-t)a + tx_0, (1-t)b + ty_0, (1-t)c + tz_0\big)(y_0 - b) + \\ & + Z\big((1-t)a + tx_0, (1-t)b + ty_0, (1-t)c + tz_0\big)(z_0 - c)\Big]\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

12. Izračunajte potencial polja $\vec{R}$ iz prejšnje naloge.

Cirkulacija *je integral po sklenjeni krivulji in jo označujemo z $\oint_K \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r}$. Je neodvisna od začetne oz. končne točke v parametrizaciji, odvisna pa je od orientacije.*

13. Izračunajte cirkulacijo vektorskega polja $\vec{R} = \begin{bmatrix} y \\ -z \\ x \end{bmatrix}$ po enem zavoju krivulje $\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix}$, orientirane tako, da t narašča.

Greenova formula

Naj bo D omejeno ravninsko območje z odsekoma gladkim robom ∂D, ki ga orientiramo pozitivno. Tedaj velja:

$$\oint_{\partial D} \big(X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y\big) = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

14. Naj bo K rob trikotnika z oglišči $A(0,0)$, $B(1,0)$ in $C(0,1)$, orientiran v nasprotni smeri urinega kazalca. Izračunajte:

$$\oint_K \big(X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y\big)\,,$$

kjer je:

$$X = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} & ; \; y \neq 0 \\ \dfrac{\pi x}{2} & ; \; y = 0 \end{cases}\,, \qquad Y = \begin{cases} y \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} & ; \; y \neq 0 \\ 0 & ; \; y = 0 \end{cases}\,.$$

Krivuljni integral skalarnega polja *w po krivulji K, parametrizirani v vektorski obliki $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ali po komponentah $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, ko gre t od a do b, kjer je $a \le b$, je enak:*

$$\int_K w\,\mathrm{d}s = \int_a^b w\big(\vec{r}(t)\big)\big\|\dot{\vec{r}}(t)\big\|\,\mathrm{d}t$$

in je neodvisen od parametrizacije.

15. Izračunajte $\displaystyle\int_K \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}s$, kjer je K prvi zavoj standardne Arhimedove spirale:

$$x = \varphi \sin\varphi\,, \quad y = \varphi\cos\varphi\,, \quad z = 0\,; \qquad 0 < \varphi < 2\pi\,.$$

Prostorska krivulja K z (lahko nehomogeno) dolžinsko gostoto μ ima **maso***:*

$$m = \int_K \mu\,\mathrm{d}s$$

in **težišče** (x^*, y^*, z^*)*, kjer je:*

$$x^* = \frac{1}{m}\int_K \mu\,x\,\mathrm{d}s\,, \quad y^* = \frac{1}{m}\int_K \mu\,y\,\mathrm{d}s\,, \quad z^* = \frac{1}{m}\int_K \mu\,z\,\mathrm{d}s\,.$$

Vztrajnostni momenti *okoli koordinatnih osi so enaki:*

$$J_x = \int_K \mu(y^2 + z^2)\,\mathrm{d}s\,, \quad J_y = \int_K \mu(x^2 + z^2)\,\mathrm{d}s\,, \quad J_z = \int_K \mu(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s\,.$$

16. Izračunajte težišče in vztrajnostni moment okoli osi x prostorske krivulje:

$$x = t\,, \quad y = \frac{t^2}{\sqrt{2}}\,, \quad z = \frac{t^3}{3}\,; \qquad 0 < t < 1$$

z dolžinsko gostoto $\mu = \dfrac{y}{x + 3z}$.

Površina ploskve, *parametrizirane z* $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, *kjer je* $(u, v) \in \Delta$, *je enaka:*

$$P = \iint_\Delta \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,,$$

kjer so E, F *in* G *koeficienti prve fundamentalne forme:*

$$E = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle\,, \quad F = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle\,, \quad G = \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle\,.$$

Rezultat je neodvisen od parametrizacije.

17. Izračunajte površino tistega dela ploskve $x^2 + y^2 + z = 1$, ki leži nad ravnino xy.

18. Izračunajte površino naslednjega dela helikoida:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = \varphi\,; \qquad 0 < \varphi < r < 2\pi\,.$$

Ploskovni integral skalarnega polja w *po ploskvi* S, *parametrizirani z* $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, *kjer je* $(u, v) \in \Delta$, *je definiran po predpisu:*

$$\iint_S w\, \mathrm{d}P = \iint_\Delta w\big(\vec{r}(u, v)\big) \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,.$$

in je neodvisen od parametrizacije.

Masa *ploskve s površinsko gostoto* σ *je enaka* $m = \iint_S \sigma\, \mathrm{d}P$, *njeno* **težišče** *pa ima koordinate:*

$$x^* = \frac{1}{m} \iint_S \sigma\, x\, \mathrm{d}P\,, \quad y^* = \frac{1}{m} \iint_S \sigma\, y\, \mathrm{d}P\,, \quad z^* = \frac{1}{m} \iint_S \sigma\, z\, \mathrm{d}P\,.$$

Vztrajnostni momenti *okoli koordinatnih osi so enaki:*

$$J_x = \iint_S \sigma(y^2 + z^2)\, \mathrm{d}P\,, \quad J_y = \iint_S \sigma(x^2 + z^2)\, \mathrm{d}P\,, \quad J_z = \iint_S \sigma(x^2 + y^2)\, \mathrm{d}P\,.$$

19. Izračunajte maso, težišče in vztrajnostni moment okoli osi z dela paraboloida:

$$z = x^2 + y^2\,; \quad z < 1\,,$$

katerega površinska gostota je enaka $\sigma = x^2 + y^2$.

Ploskovni integral vektorskega polja (pretok)

Orientacija *ploskve je podana z usklajenim naborom normalnih vektorjev: na vsaki notranji točki ploskve mora biti podan vektor* $\vec{N}$, *ki je pravokoten na ploskev, pri čemer mora obstajati taka parametrizacija* $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, *da ima* $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ *isto smer kot vektor* $\vec{N}\big(\vec{r}(u, v)\big)$. *Tako parametrizacija tudi določi orientacijo.*

Ploskovni integral vektorskega polja $\vec{R}$ *po orientirani ploskvi* S *ali tudi* **pretok** *polja* $\vec{R}$ *skozi* S *je integral* $\iint_S \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P$. *Če je ploskev orientirana skladno s parametrizacijo* $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Delta$, *je pretok enak:*

$$\iint_S \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P = \iint_\Delta \Big\langle \vec{R}\big(\vec{r}(u, v)\big), \, \vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) \Big\rangle \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, .$$

20. Izračunajte pretok polja $(x, y, 2z)$ skozi ploskev $z^2 = x^2 + y^2$; $0 \le z < 1$ v smeri navzdol.

Če je $\vec{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ *ter če se da ploskev parametrizirati v oblikah* $x = x(y, z)$, $(x, z) \in \Delta_1$, $y = y(x, z)$, $(x, z) \in \Delta_2$, *in* $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \Delta_3$, *velja tudi:*

$$\iint_S \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P = \iint_{\Delta_1} \operatorname{sgn}(N_x) \, X \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \iint_{\Delta_2} \operatorname{sgn}(N_y) \, Y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + \\ + \iint_{\Delta_3} \operatorname{sgn}(N_z) \, Z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, ,$$

kjer so $\operatorname{sgn}(N_x)$, $\operatorname{sgn}(N_y)$ *in* $\operatorname{sgn}(N_z)$ *predznaki komponent normalnega vektorja* $\vec{N}$.

Opomba. Zadnja izražava pretoka ima še bolj sofisticirano različico. Pišemo lahko:

$$\iint_S \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P = \iint_S \big(X \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Y \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + Z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \big) \, .$$

Produkti $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ in $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ so malo drugačni od običajnih produktov diferencialov $\mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z \, \mathrm{d}x$ in $\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$. Medtem ko se drugi nanašajo na projekcije Δ_1, Δ_2 in Δ_3, se prvi nanašajo na *orientirano* ploskev S.

- Produkt $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ ustreza produktu $\mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, če ima $\vec{N}$ pozitivno komponento x; sicer ustreza produktu $-\mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$.
- Produkt $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ ustreza produktu $\mathrm{d}z \, \mathrm{d}x$, če ima $\vec{N}$ pozitivno komponento y; sicer ustreza produktu $-\mathrm{d}z \, \mathrm{d}x$.
- Produkt $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ ustreza produktu $\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, če ima $\vec{N}$ pozitivno komponento z; sicer ustreza produktu $-\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Novo definirani produkti so *antikomutativni*: velja $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z = -\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$, medtem ko je v običajnem dvojnem integralu seveda $\mathrm{d}x \, \mathrm{d}z = \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x$.

Ploskovni integral lahko definiramo celo po poljubnem produktu diferencialov skalarnih polj: za skalarna polja w, α in β definiramo:

$$\iint_S w \, \mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\beta := \iint_\Delta w\big(\vec{r}(u, v)\big) \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \alpha\big(\vec{r}(u, v)\big) & \frac{\partial}{\partial v} \alpha\big(\vec{r}(u, v)\big) \\ \frac{\partial}{\partial u} \beta\big(\vec{r}(u, v)\big) & \frac{\partial}{\partial v} \beta\big(\vec{r}(u, v)\big) \end{vmatrix} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, .$$

Opazimo, da gre zveza med diferenciali prek Jacobijeve determinante.

21. Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{R} = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{bmatrix}$ skozi ploskev:

$$x - 2y + 3z = 6 \, , \quad x > 0 \, , \quad y < 0 \, , \quad z > 0 \, ,$$

orientirano tako, da normala kaže navzgor.

22. Izračunajte pretok vektorskega polja:

$$\vec{R} = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

skozi plašč valja $x^2 + y^2 = 1$, orientiran navzven.

Gaussov izrek

Naj bo D omejeno prostorsko ravninsko območje z odsekoma gladkim robom ∂D, ki ga orientiramo tako, da normala kaže navzven. Tedaj za vsako zvezno odvedljivo vektorsko polje $\vec{R}$ velja:

$$\iint_{\partial D} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P = \iiint_D \operatorname{div} \vec{R} \, \mathrm{d}V \,.$$

23. Izračunajte pretok vektorskega polja:

$$X = x(y^2 + z^2)\,, \quad Y = y(x^2 + z^2)\,, \quad Z = z(x^2 + y^2)$$

skozi rob enotske krogle $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientiran navzven (gre torej za *iztok* iz krogle).

24. Izračunajte iztok vektorskega polja $\begin{bmatrix} x + \sqrt{y^2 + z^2} \\ y + \sqrt{x^2 + z^2} \\ z + \sqrt{x^2 + y^2} \end{bmatrix}$ iz stožca $z^2 \ge x^2 + y^2$; $0 \le z \le 1$.

25. Izračunajte iztok vektorskega polja $\vec{r}/r^3$, kjer je $r = \|\vec{r}\|$, iz telesa:

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{2} < z < \frac{1 - x^2 - y^2}{2} \,.$$

Stokesov izrek

Naj bo S omejena orientirana odsekoma gladka ploskev v prostoru z odsekoma gladkim robom ∂S, ki ga orientiramo tako, da produkt $\vec{t} \times \vec{N}$ kaže stran od ploskve. Tu je $\vec{t}$ tangentni vektor, ki pripada parametrizaciji roba ploskve. Pravimo, da sta S in ∂S **skladno orientirana**. *Bolj po domače povedano je to takrat, ko se desnosučni vijak, ki ga vrtimo v smeri orientacije roba, premika v smeri normale. Tedaj za vsako zvezno odvedljivo vektorsko polje $\vec{R}$ velja:*

$$\oint_{\partial S} \vec{R} \, \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P \,.$$

26. Izračunajte cirkulacijo:

$$\oint_K \left[\left(\frac{1}{(1+x^2)^2} + y^2 - z^2 \right) \mathrm{d}x + \left(\frac{1}{(1+y^2)^2} - x^2 + z^2 \right) \mathrm{d}y + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{(1+z^2)^2} - x^2 + y^2 \right) \mathrm{d}z \right],$$

kjer je K krivulja, ki gre od točke $(1,0,0)$ premočrtno do $(0,1,0)$, nato premočrtno do $(0,0,1)$ in nato premočrtno spet do $(1,0,0)$.

10. Kompleksna števila

Računanje s kompleksnimi števili. Holomorfne funkcije. Konformne preslikave. Taylorjeva in Laurentova vrsta. Kompleksna integracija. Cauchyjeva integralska formula z odvodi. Prevedba realnih integralov na kompleksne.

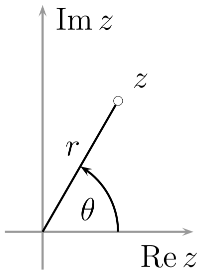
1. Za $z = 3 + 2i$ in $w = 1 + 5i$ izračunajte zw in z/w.

2. Rešite enačbo $z^2 = 4 - 3i$.

3. Rešite enačbo $z^2 + 2iz + 4 = 0$.

Polarni zapis

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r\,e^{i\theta} \end{aligned}$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & ;\ x > 0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi & ;\ x < 0 \\ \pi/2 & ;\ x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & ;\ x = 0, y < 0 \\ \text{kar koli} & ;\ x = y = 0 \end{cases}$$

De Moivrova formula: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

4. Izračunajte $\left(1 + \sqrt{3}\,i\right)^{100}$.

Koreni kompleksnih števil

V kompleksnem ima enačba

$$z^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

rešitve:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\ ; \quad k = 0, 1, \ldots n - 1\,.$$

Velja tudi $z_k = z_0\,\xi_n^k$, *kjer so* ξ_n^k n**-ti koreni enote** *in so potence* **temeljnega** n*-tega korena enote:*

$$\xi_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\,, \qquad \xi_n^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\,.$$

5. Rešite enačbo $z^3 = -2 + 2i$.

6. Rešite enačbo $z^4 = -8\left(1 + \sqrt{3}\,i\right)$.

Eksponentna funkcija: $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

7. Rešite enačbo $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.

Logaritem kompleksnega števila

Enačba $e^z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *ima rešitev:*

$$z = \ln r + (\theta + 2k\pi)i\,; \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Kanonične potence in logaritmi

Za kompleksno število $z \in \mathbb{C} \setminus \{t\,;\, t \le 0\}$*, zapisano v polarni obliki:*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\,; \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \theta < \pi$$

definiramo kanonični logaritem:

$$\ln z = \ln r + \theta i$$

Nadalje za poljuben kompleksen eksponent definiramo kanonično potenco:

$$z^w := e^{w \log z}$$

(če je $z = e$*, se definicija ujema s staro). Za* $a \in \mathbb{R}$ *je:*

$$z^a = r^a\big(\cos(a\theta) + i\sin(a\theta)\big)\,.$$

8. Izračunajte $(3+4i)^i$.

9. Dokažite, da formuli:

$$(z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w \qquad \text{in} \qquad \ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$$

pri kanoničnih kompleksnih potencah in logaritmih ne veljata nujno.

Kompleksna trigonometrija

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

10. Izračunajte $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{i}{4}\right)$.

Pri kompleksni trigonometriji sta koristni naslednji dve opažanji:

- $\sin(iz) = i \operatorname{sh} z, \quad \cos(iz) = \operatorname{ch} z$
- Adicijski izreki za trigonometrijske funkcije veljajo tudi v kompleksnem. Splošneje, vsaka holomorfna zveza, ki velja na nekem realnem intervalu, velja tudi na vsakem odprtem povezanem kompleksnem območju, ki vsebuje ta interval.

Tako lahko pri prejšnji nalogi izračunamo tudi:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{i}{4}\right) &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{i}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{i}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{sh}\frac{1}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(e^{1/4} + e^{-1/4}\right) + \frac{i}{4}\left(e^{1/4} - e^{-1/4}\right).\end{aligned}$$

Če realne enačbe gledamo v kompleksnem, lahko določene rešitve pridobimo. Enačba $z^2 + 1 = 0$ v realnem nima rešitve, medtem ko ima v kompleksnem dve rešitvi $z = i$ in $z = -i$. Enačba $e^z = 2$ pa ima v realnem eno samo rešitev $z = \ln 2$, medtem ko ima v kompleksnem celo družino rešitev $z = \ln 2 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Toda:

Za $-1 \le t \le 1$ imata enačbi $\sin z = t$ in $\cos z = t$ le realne rešitve.

Tako so npr. tudi vse kompleksne rešitve enačbe $\sin z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ enake:

$$z = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ali} \quad z = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,; \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

kar lahko pišemo tudi v obliki:

$$z = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,.$$

11. Rešite enačbo $\sin z = 2$.
12. V kompleksni ravnini skicirajte množici $A = \{z\ ;\ (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} = 5\}$ in $B = \{z\ ;\ z\bar{z} - (2+3i)z - (2-3i)\bar{z} < 3\}$.
13. Dana je množica $Q := \{z\ ;\ 1 \le \operatorname{Re} z \le 2,\ 2 < \operatorname{Im} z < 3\}$ ter še funkcije $f(z) = (1+i)z$, $g(z) = z^2$ in $h(z) = 1/(z-1)$. Skicirajte množice $f(Q)$, $g(Q)$ in $h(Q)$.
14. Dana je kompleksna funkcija:
$$f(z) = \frac{z-1}{z-i}\,.$$
Določite, kam f preslika:
    a) realno os;
    b) zgornjo polravnino;

c) imaginarno os;

d) notranjost kroga s središčem v 1 in polmerom 3;

e) zunanjost enotskega kroga.

15. Poiščite konformno preslikavo, ki:

a) notranjost kroga s središčem v 1 in polmerom 2 bijektivno preslika v notranjost kroga s središčem v i in polmerom 3;

b) notranjost kroga s središčem v 1 in polmerom 2 bijektivno preslika v zunanjost kroga s središčem v i in polmerom 3.

16. Poiščite konformno preslikavo, ki notranjost enotskega kroga preslika na polravnino $\{w\,;\,(1+i)w+(1-i)\bar{w}>2\}$.

Kompleksna funkcija $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ kompleksne spremenljivke $z=x+iy$ je holomorfna natanko tedaj, ko je parcialno odvedljiva, parcialni odvodi pa zadoščajo **Cauchy–Riemannovemu sistemu**:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\,,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Za dano realno funkcijo u dveh realnih oziroma ene kompleksne spremenljivke so naslednje trditve ekvivalentne:

- *u je realna komponenta neke holomorfne funkcije.*
- *u je imaginarna komponenta neke holomorfne funkcije.*
- *u je harmonična, t. j.* $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Pri iskanju holomorfne funkcije f, katere denimo realni del je predpisana realna funkcija u, imamo naslednje možnosti:

1. *Integriramo* $-\dfrac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x$ *in* $\dfrac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$ *ter uskladimo funkciji, dobljeni iz integracijskih konstant.*
2. *Izpeljemo* $\Delta u = 0$ *in integriramo formo* $-\dfrac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$ *od izhodiščne do poljubne točke po čim enostavnejši poti.*
3. *Uganemo integral zgornje forme.*
4. *S pomočjo izražave* $x = (z + \bar{z})/2$ *in* $y = (z - \bar{z})/(2i)$ *izpeljemo* $u = \operatorname{Re} f = (f + \bar{f})/2$.

17. Za katere vrednosti parametrov a, b in c je funkcija:

$$u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

realni del neke holomorfne funkcije spremenljivke $z = x+iy$? Določite to holomorfno funkcijo!

18. Dana je funkcija:

$$u(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y\,.$$

Pokažite, da je u realni del neke holomorfne funkcije spremenljivke $z = x + iy$. Določite to holomorfno funkcijo!

19. Dana je funkcija:

$$v(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$$

Pokažite, da je v imaginarni del neke holomorfne funkcije spremenljivke $z = x + iy$. Določite to holomorfno funkcijo!

Taylorjeva vrsta za holomorfne funkcije

Vsaka funkcija f, ki je holomorfna v okolici točke a, se da razviti v Taylorjevo vrsto:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \cdots\,, \quad \text{kjer je} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,,$$

ki konvergira na vsakem odprtem krogu okoli a, ki je vsebovan v definicijskem območju funkcije.

Nekaj znanih razvojev v Taylorjevo vrsto okoli 0

$$(a+z)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} z + \binom{m}{2} a^{m-2} z^2 + \ldots \qquad \text{za } a > 0,\ |z| < a$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots \qquad \text{za } |z| < 1$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \qquad \text{za vsak } z$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \qquad \text{za vsak } z$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \qquad \text{za vsak } z$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots \qquad \text{za } |z| < 1$$

20. Razvijte funkcijo $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 5}$ v Taylorjevo vrsto okoli izhodišča.

21. Razvijte funkcijo $f(z) = e^{z^2 + 2(1+i)z}$ v Taylorjevo vrsto okoli točke $-1-i$ in izračunajte $f^{(4)}(-1-i)$.

Ničle holomorfnih funkcij

Holomorfna funkcija ima v točki a **ničlo** *stopnje m, če je m prvi indeks, za katerega je koeficient c_m v Taylorjevem razvoju različen od 0. Ekvivalentno, to je natanko tedaj, ko je $f^{(n)}(a) = 0$ za vse $n = 0, 1, \ldots m-1$ in $f^{(m)}(a) \neq 0$. Če je $m = 0$, ničle ni.*

22. Dokažite, da ima funkcija $f(z) = z^2 \left(\dfrac{1}{(1-z)^2} - e^{2z} - \sin(z^2) \right)$ v izhodišču ničlo. Določite njeno stopnjo.

Če ima funkcija f v dani točki ničlo stopnje m, funkcija g pa ničlo stopnje n, ima produkt fg ničlo stopnje $m+n$.

23. Dokažite, da ima funkcija $f(z) = \left(e^{-z^2/2} - \cos z\right)\left(z - \sin z\right)$ v izhodišču ničlo. Določite njeno stopnjo.

Laurentova vrsta

Vsaka funkcija f, ki je holomorfna v punktirani okolici točke a (ki je **izolirana singularnost***), se da razviti v Laurentovo vrsto:*

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots ,$$

ki konvergira na vsakem punktiranem odprtem krogu okoli a, ki je vsebovan v definicijskem območju funkcije.
Delu vrste s koeficienti z indeksi, večjimi ali enaki 0, pravimo **regularni del***, delu vrste s koeficienti z negativnimi indeksi pravimo* **glavni del** *Laurentove vrste.*
Če je glavni del enak nič, gre za **odpravljivo singularnost**.
Če je glavni del neničeln, a končen, gre za **pol**. *Natančneje, če je m največji indeks, za katerega je $c_{-m} \neq 0$, gre za pol m-te stopnje.*
Če je glavni del neskončen, gre za **bistveno singularnost**.
Koeficientu z indeksom -1 pravimo **ostanek** *ali* **residuum** *funkcije f v točki a: $c_{-1} = \operatorname{Res}(f, a)$.*

V 24. in 25. nalogi razvijte funkcijo v Laurentovo vrsto in klasificirajte singularnost, okoli katere razvijate.

24. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^3}$, okoli izhodišča.

25. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 5}$, okoli točke $-1 + 2i$.

Če sta f in g holomorfni funkciji in ima f v točki a ničlo stopnje r, g pa ničlo stopnje s (če ni ničle, postavimo ustrezni indeks na nič), ima funkcija f/g:

- *odpravljivo singularnost z ničlo stopnje $r - s$, če je $r \geq s$ (če je $r = s$, ni ničle);*
- *pol stopnje $s - r$, če je $r < s$.*

V polu stopnje največ m so koeficienti v Laurentovi vrsti enaki:

$$c_n = \frac{1}{(m+n)!} \lim_{z \to a} \frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}z^{m+n}} \Big[(z-a)^m f(z) \Big] .$$

V nalogah od 26. do 31. klasificirajte singularnost in določite glavni del Laurentove vrste.

26. $f(z) = \dfrac{1}{e^z - e^7}$, v točki 7.

27. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4}$, v točki $2i$.

28. $f(z) = \dfrac{(z - \sin z)(e^z - 1)}{1 - \cos z}$, v izhodišču.

29. $f(z) = \dfrac{e^z - e^7}{(z-7)^3}$, v točki 7.

30. $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z - 1)}$, v izhodišču.

31. $f(z) = \dfrac{z}{1 + \cos z}$, v točki π.

32. Klasificirajte singularnost in izračunajte ostanek funkcije $f(z) = (z-3)e^{1/z}$ v izhodišču.

Integracija po kompleksni spremenljivki

Za $f = u + iv$ in $z = x + iy$ definiramo kompleksni krivuljni integral kot:

$$\int_K f\,\mathrm{d}z := \int_K \big(u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y\big) + i\int_K \big(u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x\big)\,.$$

Če je K pot po realni osi od a do b, je to običajni Riemannov integral:

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \int_a^b u\,\mathrm{d}x + i\int_a^b v\,\mathrm{d}x\,.$$

Tudi pri teh integralih lahko uvajamo substitucije, in sicer na enak način kot pri običajnih Riemannovih integralih, če je zveza med staro in novo spremenljivko **holomorfna**. *Velja tudi ocena:*

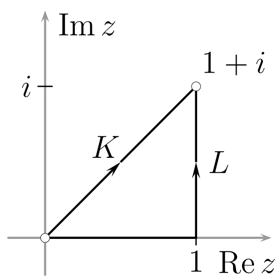
$$\left|\int_K f\,\mathrm{d}z\right| \le \int_K |f|\,\mathrm{d}s\,,$$

kjer je na desni običajni krivuljni integral skalarne funkcije.

33. Izračunajte integrale:

$$\int_K z\,\mathrm{d}z\,,\quad \int_L z\,\mathrm{d}z\,,\quad \int_K \bar{z}\,\mathrm{d}z \quad \text{in} \quad \int_L \bar{z}\,\mathrm{d}z\,,$$

kjer K in L poti od izhodišča do točke $1+i$, označeni na naslednji skici:



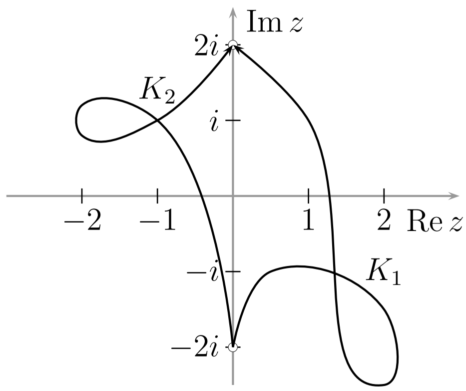
Osnovni izrek integralnega računa za holomorfne funkcije

Če ima kompleksna funkcija f na nekem območju holomorfno primitivno funkcijo, t. j. $f = F'$, za poljubno pot K znotraj tega območja od točke a do točke b tako kot pri običajnem integralu velja:

$$\int_K f(z)\,\mathrm{d}z =: \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a)\,.$$

Brž ko je funkcija holomorfna na enostavno povezanem območju, ima tam holomorfno primitivno funkcijo, zato so integrali po vseh poteh z danima krajiščema, ki gredo po območju, enaki.

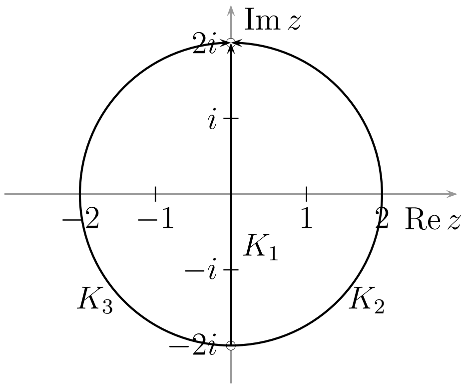
34. Izračunajte integrale $\displaystyle\int_{K_1} \frac{\mathrm{d}z}{z}$, $\displaystyle\int_{K_2} \frac{\mathrm{d}z}{z}$, $\displaystyle\int_{K_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2}$ in $\displaystyle\int_{K_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2}$, kjer sta poti K_1 in K_2 prikazani na naslednji skici:



Integracija kanoničnih kompleksnih potenc

Na prerezani kompleksni ravnini $\mathbb{C} \setminus \{t\ ;\ t \le 0\}$ ima potenca z^w za $w \neq -1$ primitivno funkcijo $\dfrac{z^{w+1}}{w+1}$, recipročna vrednost $\dfrac{1}{z}$ pa ima primitivno funkcijo $\ln z$.

35. V kompleksni ravnini so dane poti K_1, K_2 in K_3, prikazane na naslednji skici (vse gredo od $-2i$ do $2i$):



Izračunajte integrale funkcij $f(z) = z^{-1/2}$ in $g(z) = \dfrac{z}{z^2-1}$ po tistih poteh, kjer obstajajo.

Cirkulacije holomorfnih funkcij

Naj bo f holomorfna na območju D. Če ima bodisi f primitivno holomofrno funkcijo na D bodisi je območje D enostavno povezano, je integral po poljubni sklenjeni poti na D enak 0.

Cauchyjeva integralska formula

Če je f holomorfna funkcija na območju, ki ga omejuje krivulja K, ki v pozitivni smeri (nasprotni smeri urinega kazalca) enkrat obkroži točko a, velja:

$$\oint_K \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\, f(a)\,.$$

36. Izračunajte:

$$\oint_K \frac{\mathrm{d}z}{z^4 - 3z^2 - 4}\,,$$

kjer je K:

a) krožnica s središčem v 2 in polmerom 1;
b) krožnica s središčem v $2i$ in polmerom 2;
c) krožnica s središčem v $1 + 2i$ in polmerom 2;
d) krožnica s središčem v točki $1 + i$ in polmerom 2.

Privzamemo, da so vse krožnice orientirane pozitivno.

Cauchyjeva integralska formula za odvode

Če je f holomorfna funkcija na območju, ki ga omejuje krivulja K, ki v pozitivni smeri enkrat obkroži točko a, velja:

$$\oint_K \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\,.$$

37. Izračunajte:

$$\oint_K \frac{\mathrm{d}z}{z^4+2z^2+1}\,,$$

kjer je K krožnica s središčem v točki $1+2i$ in polmerom 2, orientirana pozitivno.

Izrek o ostankih

Če je D omejeno območje z regularnim robom in f funkcija, ki je holomorfna povsod na D razen morda v točkah $a_1, a_2, \ldots a_n$ iz D in zvezna na $\bar{D} \setminus \{a_1, \ldots a_n\}$, velja:

$$\oint_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k)\,,$$

kjer je ∂D pozitivno orientiran rob območja D.

38. Izračunajte:

$$\oint_K \frac{z}{e^z - e^7}\,\mathrm{d}z\,,$$

kjer je K krožnica s središčem v točki $7+\pi i$ in polmerom 2π, orientirana pozitivno.

39. Dana je holomorfna funkcija $f(z) = \dfrac{1}{z\big(\sin(2z) - \sin z\big)}$.

a) Klasificirajte singularnost v izhodišču in določite glavni del Laurentove vrste.

b) Izračunajte integral funkcije f po krožnici s središčem v $\pi/4$ in polmerom $\pi/2$, orientirani v nasprotni smeri urinega kazalca.

Integracija trigonometrijskih izrazov po celi periodi

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\varphi, \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \oint_K F\left(\frac{1}{2}\left[z+\frac{1}{z}\right], \frac{1}{2i}\left[z-\frac{1}{z}\right]\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz}\,,$$

kjer je K pozitivno orientirana enotska krožnica.

40. Izračunajte $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t}$.

41. Na pet decimalk natančno izračunajte $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\,\mathrm{d}t$.

Integracija po celi realni osi

Naj bodo $a_1, a_2, \dots a_n$ točke na odprti zgornji polravnini. Če je f holomorfna na zgornji odprti polravnini razen morda v točkah $a_1, a_2, \dots a_n$ in zvezna na zaprti polravnini brez točk $a_1, \dots a_n$ ter če je še $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ \operatorname{Im} z \ge 0}} z f(z) = 0$, velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k)\,.$$

42. Izračunajte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 1}$.

43. Izračunajte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$.

REŠITVE

1. Ponovitev elementarnih integralov

1. $\left(\frac{2x^3}{7} - \frac{2}{x}\right)\sqrt{x} + C.$

2. $\frac{3x^2 - 4x}{18} + \frac{31}{27}\ln|2 + 3x| + C.$

3. $-\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x+7} + C.$

4. S substitucijo $t = \sqrt{2x-1}$, $x = (t^2+1)/2$, $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$ dobimo:

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+1)\,\mathrm{d}t = \frac{16}{3}\,.$$

5. Označimo $J := \int_0^{2\pi} \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x.$

Prvi način. Neposredno izračunamo:

$$J = \int_0^{\pi/6}\left(\tfrac{1}{2} - \sin x\right)\mathrm{d}x + \int_{\pi/6}^{5\pi/6}\left(\sin x - \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{5\pi/6}^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2} - \sin x\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\,.$$

Drugi način. Z upoštevanjem periodičnosti malo poenostavimo:

$$J = \int_{\pi/6}^{13\pi/6}\left|\sin x - \tfrac{1}{2}\right|\mathrm{d}x = \int_{\pi/6}^{5\pi/6}\left(\sin x - \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{5\pi/6}^{13\pi/6}\left(\tfrac{1}{2} - \sin x\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\,.$$

6. $(\ln 3)/2.$

7. *Prvi način.* To je ploščina polkroga s polmerom 1, ki je enaka $\pi/2$.

Drugi način. Označimo:

$$J := \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

S substitucijo $x = \sin t$ dobimo:

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Tretji način. V integral vpeljemo substitucijo $t = \sqrt{1-x^2}$, toda to ne gre brez razdelitve integrala (z neprevidno izvedbo kaj lahko dobimo, da je integral enak nič, to pa ni res, ker je integrand povsod pozitiven). Ker je $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ soda funkcija, velja:

$$J = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Po vpeljavi nove spremenljivke $t = \sqrt{1-x^2}$ dobimo:

$$\frac{J}{2} = -\int_1^0 \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \sqrt{1-t^2}\right)\mathrm{d}t = \arcsin t\Big|_0^1 - \frac{J}{2} =$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{J}{2}\,.$$

Sledi $J = \pi/2$.

8. 0.

9. $\dfrac{9}{2}\arcsin\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C$. S substitucijo:

$$x = 3\sin u\,, \quad \sqrt{9-x^2} = 3\cos u\,, \quad \mathrm{d}x = 3\cos u\,\mathrm{d}u$$

dobimo:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x &= 9\int \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \\ &= \frac{9}{2}\int \big(\cos(2t)+1\big)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{9\sin(2t)}{4} + \frac{9t}{2} + C = \\ &= \frac{9\sin t\cos t}{2} + \frac{9t}{2} + C = \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + C\,.\end{aligned}$$

10. *Prvi način.* S substitucijo:

$$x = 3\,\mathrm{sh}\,u\,, \quad \sqrt{x^2+9} = 3\,\mathrm{ch}\,u\,, \quad \mathrm{d}x = 3\,\mathrm{ch}\,u\,\mathrm{d}u$$

dobimo:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x &= 9\int \mathrm{ch}^2\,u\,\mathrm{d}u = \\ &= \frac{9}{2}\int \big(\mathrm{ch}(2t)+1\big)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{9\,\mathrm{sh}(2t)}{4} + \frac{9t}{2} + C = \\ &= \frac{9\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t}{2} + \frac{9t}{2} + C = \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{3} + C\,.\end{aligned}$$

Drugi način. S substitucijo:

$$x = \frac{t}{2} - \frac{9}{2t}\,, \quad \sqrt{x^2+9} = \frac{t}{2} + \frac{9}{2t}\,, \quad t = x + \sqrt{x^2+9}\,, \quad \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2t^2}\right)\mathrm{d}t$$

po krajšem računu dobimo:

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{t}{4} + \frac{9}{2t} + \frac{81}{4t^3}\right)\mathrm{d}t = \\
&= \frac{t^2}{8} - \frac{81}{8t^2} + \frac{9}{2}\ln|t| + C = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2} - \frac{9}{2t}\right)\left(\frac{t}{2} + \frac{9}{2t}\right) + \frac{9}{2}\ln|t| + C = \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2}\ln\bigl(x + \sqrt{x^2+9}\bigr) + C\,.
\end{aligned}
$$

Rezultat je enak kot pri prvem načinu, ker je $\operatorname{Arsh}\frac{x}{3} = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+9}\bigr) - \ln 3$.

11. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\ln\bigl|x + \sqrt{x^2-9}\bigr| + C$.
Tudi $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\operatorname{Arch}\frac{x}{3} + C_1$ za $x \ge 3$
in $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} + \frac{9}{2}\operatorname{Arch}\left(-\frac{x}{3}\right) + C_1$ za $x \le -3$.

12. Označimo iskani integral z J. Vanj se splača vpeljati substitucijo $t = \operatorname{tg} x$, a z nepremišljeno uporabo dobimo:

$$J = \int_0^0 \frac{\mathrm{d}t}{25 + 16t^2} = 0\,,$$

kar ni res. Taka uvedba substitucije je napačna zato, ker je krivulja $t = \operatorname{tg} x$ prekinjena. Zato je potrebno integral razdeliti:

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{16 + 9\cos^2 x} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{16 + 9\cos^2 x} + \int_0^{3\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{16 + 9\cos^2 x}\,.$$

Z upoštevanjem periodičnosti dobimo:

$$J = 2\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{16 + 9\cos^2 x}$$

in v ta integral lahko vpeljemo zgornjo substitucijo. Dobimo:

$$J = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{25 + 16t^2} = \frac{\pi}{10}\,.$$

2. Metrični prostori

1. Razdalje: 1, 0, 2, 2, 3.
Prvi trije aksiomi metrike so očitni, nekoliko dela je le z zadnjim (trikotniško neenakostjo). Od x do z gremo lahko vsekakor tako, da gremo najprej po najkrajši poti od x do y, za kar potrebujemo $d(x, y)$ poznanstev, nato pa od y do z, za kar potrebujemo $d(y, z)$ poznanstev. Obstaja torej pot od x do z, za katero potrebujemo $d(x, y) + d(y, z)$ poznanstev, lahko pa, da je tudi še kakšna krajša pot. Zato je $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$.

2. Predpisa d_1 in d_3 sta metriki. Predpis d_2 ni metrika, ker je $d(x, -x) = 0$, predpis d_4 pa ni metrika, ker je $d(x, x) = 2$. Da je d_1 metrika, se zlahka prepričamo, podobno je s prvimi tremi aksiomi pri d_3. Pri trikotniški neenakosti pa ločimo dva primera. Če je $|x - y| \le 2$ in $|y - z| \le 2$, velja:

$$d_3(x, z) \le |x - z| \le |x - y| + |y - z| = d_3(x, y) + d_3(y, z)\,.$$

Če pa je $|x - y| \ge 2$ ali $|y - z| \ge 2$, velja:

$$d_3(x, z) \le 2 \le d_3(x, y) + d_3(y, z)\,.$$

3. V evklidski metriki dobimo:

$$(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2\,,$$

od koder po preureditvi dobimo $x = y$. Iskana množica je torej simetrala lihih kvadrantov $\{(x, x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$.
V manhattanski metriki pa dobimo:

$$|x - 1| + |y| = |x| + |y - 1|$$

oziroma:

$$|x| - |x - 1| = |y| - |y - 1| \tag{$*$}$$

Velja:

$$|t| - |t - 1| = \begin{cases} -1 & ;\ t \le 0 \\ 2t - 1 & ;\ 0 < t < 1 \\ 1 & ;\ t \ge 1 \end{cases}$$

Od tod vidimo, da se v enačbi $(*)$ splača ločiti primere, ko sta leva in desna stran obe enaki -1, obe enaki 1 ali pa obe iz intervala $(-1, 1)$. Tako dobimo, da je iskana množica enaka $(-\infty, 0] \times (-\infty, 0] \cup \{(x, x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\} \cup [1, \infty) \times [1, \infty)$.

4. V evklidski metriki je to točka $T_2\big(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\big)$, v manhattanski točka $T_1\big(-\frac{1}{2}, 0\big)$, v maksimum metriki pa je to točka $T_\infty\big(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\big)$.

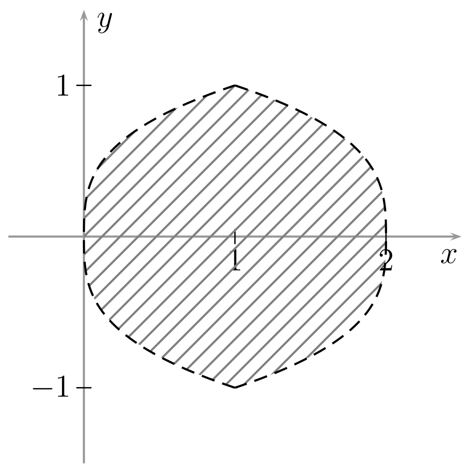
5. Aksiomi metrike se preverijo povsem premočrtno. V nasprotju z metriko d_2 pri prejšnji nalogi tu iz $x^2 = y^2$ sledi $x = y$. Velja:

$$K(2, 3) = \big(1, \sqrt{7}\big)\,, \qquad \bar{K}(2, 3) = \big[1, \sqrt{7}\big]\,,$$
$$K(2, 5) = [0, 3)\,, \qquad \bar{K}(2, 5) = [0, 3]\,.$$

6. Predpis je metrika, ker velja:

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = d_1\big(f(x_1, y_1), f(y_2, y_2)\big)\,,$$

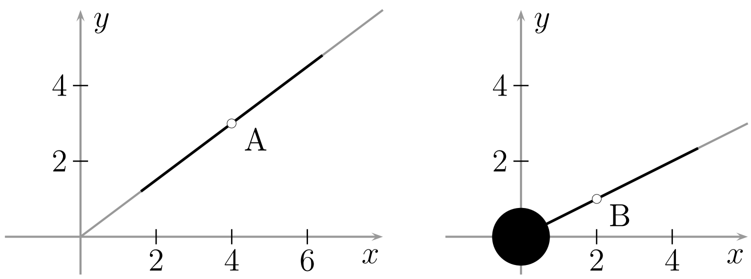
kjer je f vektorska funkcija, definirana po predpisu $f(x, y) := (x, y^3)$. Ta funkcija je injektivna. Skica krogle:



7. Pozitivnost sledi iz tega, da je $\|x\| \geq 0$ za vsak x. Simetrija sledi iz dejstva, da so tako izjava 'x je vzporeden z y' kot tudi izraza $\|x-y\|$ in $\|x\|+\|y\|$ simetrični v x in y. Preveriti je potrebno še trikotniško neenakost $d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$. Glede na vzporednost ločimo več primerov, a vzporednost ničelnega vektorja z drugimi lahko definiramo na več načinov. Pri definiciji poštarske metrike je vseeno, katero definicijo vzamemo, tukaj pa bomo vzeli, da je ničelni vektor vzporeden le samemu sebi. Tako postane vzporednost ekvivalenčna (torej tranzitivna) relacija in so možni le naslednji primeri:

- *Vsi trije vektorji so vzporedni.* V tem primeru gre za trikotniško neenakost za običajno evklidsko metriko.
- *$\vec{x}$ in $\vec{y}$ sta vzporedna, $\vec{z}$ pa ni vzporeden z njima.* V tem primeru moramo dokazati $\|\vec{x}\| + \|\vec{z}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y}\| + \|\vec{z}\|$ oziroma $\|\vec{x}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y}\|$, kar je očitno res.
- *$\vec{y}$ in $\vec{z}$ sta vzporedna, $\vec{x}$ pa ni vzporeden z njima.* V tem primeru moramo dokazati $\|\vec{x}\| + \|\vec{z}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\|$ oziroma $\|\vec{z}\| \leq \|\vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\|$, kar je očitno res.
- *$\vec{x}$ in $\vec{z}$ sta vzporedna, $\vec{y}$ pa ni vzporeden z njima.* V tem primeru moramo dokazati $\|\vec{x} - \vec{z}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\| + \|\vec{z}\|$, kar je očitno res.
- *Nobena dva izmed vektorjev $\vec{x}$, $\vec{y}$ in $\vec{z}$ nista vzporedna.* V tem primeru moramo dokazati $\|\vec{x}\| + \|\vec{z}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\| + \|\vec{z}\|$, kar je spet očitno res.

Krogli:



8. Pozitivnost in simetrija sta očitni. Dokazati moramo še trikotniško neenakost $d(a,c) \le d(a,b) + d(b,c)$. Če sta kateri izmed zaporedij enaki, je neenakost očitna. Sicer pa naj bo k prvi indeks, za katerega se razlikujeta zaporedji a in b, l prvi indeks, za katerega se razlikujeta zaporedji b in c, m pa prvi indeks, za katerega se razlikujeta zaporedji a in c. Tedaj so do nevključno indeksa $\min\{k,l\}$ vsa zaporedja enaka, torej je $m \ge \min\{k,l\}$ in zato:

$$d(a,c) = \frac{1}{m} \le \max\left\{\frac{1}{k}, \frac{1}{l}\right\} \le \frac{1}{k} + \frac{1}{l} = d(a,b) + d(b,c)\,.$$

Za dano zaporedje $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ je:

$$K\big(a, \tfrac{1}{5}\big) = \big\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_6, b_7, b_8 \ldots)\ ;\ b_6, b_7, b_8 \ldots \in A\big\}$$
$$\bar{K}\big(a, \tfrac{1}{5}\big) = \big\{(a_1, a_2, a_3, a_4, b_5, b_6, b_7 \ldots)\ ;\ b_5, b_6, b_7 \ldots \in A\big\}\,.$$

9.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
notranjost	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(1,2)$	$(3/2,2)$	A_6	$\emptyset$	$\emptyset$
rob	A_1	$A_2 \cup \{0\}$	A_3	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \cup \{3/2\}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$[0,1]$
odprta	ne	ne	ne	ne	ne	da	ne	ne
zaprta	da	ne	da	da	ne	ne	ne	ne

Množica $(0,\infty)$ pa je v metričnem prostoru $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ z običajno metriko tako odprta kot zaprta, saj ima prazen rob.

10. V evklidski metriki d_2 to zaporedje konvergira proti točki $(0,1)$, saj je:

$$d_2\big((\cos\varphi, \sin\varphi), (1,0)\big) = \sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Ker je zaporedje konvergentno, je tudi Cauchyjevo.

V poštarski metriki d_p pa to zaporedje ni Cauchyjevo in zato tudi ne konvergentno. Za dovolj velike n_0 namreč krajevna vektorja x_m in x_n, kjer je $m, n \ge n_0$, nista vzporedna, zato je $d_\mathrm{p}(x_m, x_n) = \|x_m\| + \|x_n\| = 2$.

11. a) Poglejmo najprej, koliko bi lahko bila limita danega zaporedja, ki jo bomo označili z f. Limita v d_∞ je tudi limita po točkah, torej bo moralo veljati:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{2nx+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Zdaj pa izračunajmo:

$$d_\infty(f_n, f) = \max_{0 \le x \le 1/2} \left| \frac{nx}{2nx+1} - \frac{1}{2} \right| = \max_{0 \le x \le 1/2} \frac{1}{4nx+2} = \frac{1}{4n} \,.$$

Ker gre to proti 0, ko gre n proti neskončno, zaporedje tudi v maksimum metriki konvergira proti f. Posledično je tudi Cauchyjevo.

b) *Prvi način.* Izračunamo:

$$d_1(f_n, f) = \int_{1/2}^1 \left| \frac{nx}{2nx+1} - \frac{1}{2} \right| \mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \frac{1}{4nx+2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4n} \ln \frac{2n+1}{n+1} \,,$$

kar gre spet proti nič, ko gre n proti neskončno, zato je zaporedje tudi v tej metriki konvergentno in posledično Cauchyjevo.

Drugi način. Upoštevamo, da je maksimum metrika enakomerno močnejša od metrike d_1. Glede na to, da smo v prejšnji točki dokazali, da je zaporedje konvergentno v maksimum metriki, sledi, da je konvergentno tudi v metriki d_1.

c) *Prvi način.* Za $m > n$ izračunamo:

$$d_\infty(f_m, f_n) = \max_{0 \le x \le 1} \left| \frac{mx}{2mx+1} - \frac{nx}{2nx+1} \right| = \max_{0 \le x \le 1} \frac{(m-n)x}{4mnx^2 + 2mx + 2nx + 1} \,.$$

Odvod:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{(m-n)x}{4mnx^2 + 2mx + 2nx + 1} = \frac{(m-n)(1 - 4mnx^2)}{(4mnx^2 + 2mx + 2nx + 1)^2}$$

ima ničlo pri $x = \frac{1}{\sqrt{4mn}}$, kar je znotraj intervala $[0,1]$. Torej je zagotovo:

$$d_\infty(f_m, f_n) \ge \frac{(m-n)\frac{1}{\sqrt{4mn}}}{4mn\,\frac{1}{4mn} + 2m\frac{1}{\sqrt{4mn}} + 2n\frac{1}{\sqrt{4mn}} + 1} = \frac{m-n}{4\sqrt{mn} + 2m + 2n} \,.$$

Med drugim to pomeni tudi, da je:

$$d_\infty(f_{4n}, f_n) \ge \frac{1}{6} \,,$$

kar pomeni, da zaporedje ni Cauchyjevo in zato tudi ni konvergentno.

Drugi način. Najprej ugotovimo, da zaporedje ni konvergentno. Če bi namreč v metriki d_∞ konvergiralo proti neki funkciji f, bi moralo proti tej funkciji konvergirati tudi po točkah. Toda limita po točkah:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{2nx+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} & ;\ 0 < x \le 1 \\ 0 & ;\ x = 0 \end{cases}$$

ni zvezna funkcija, zato zaporedje ne more biti konvergentno. Ker je prostor zveznih funkcij v maksimum metriki poln, zaporedje tudi ne more biti Cauchyjevo.

d) Konvergira k funkciji $f(x) = \frac{1}{2}$ in je zato tudi Cauchyjevo. Velja namreč:

$$d_1(f_n, f) = \int_0^1 \frac{1}{4nx+2} \,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2n+1)}{4n} \,,$$

kar gre proti nič, ko gre n proti neskončno. To zaporedje torej konvergira proti f v metriki d_1, ne konvergira pa proti tej funkciji po točkah.

12. a) Najprej opazimo, da za $x \in [a, 1]$ velja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+e^{nx}} = 0\,,$$

torej dano zaporedje po točkah konvergira proti funkciji $f(x) = 0$. Konvergenca pa velja tudi v maksimum metriki, saj je:

$$\max_{x\in[a,1]} \left|\frac{1}{1+e^{nx}}\right| = \frac{1}{1+e^{na}}\,,$$

kar gre proti nič, ko gre n proti neskončno. Torej je zaporedje tudi Cauchyjevo.

b) Za $x \in [-1, -a]$ velja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+e^{nx}} = 1\,,$$

torej dano zaporedje po točkah konvergira proti funkciji $f(x) = 1$. Tudi tokrat konvergenca velja tudi v maksimum metriki, saj je:

$$\max_{x\in[-1,-a]} \left|\frac{1}{1+e^{nx}} - 1\right| = 1 - \frac{1}{1+e^{-na}}\,,$$

kar gre spet proti nič, ko gre n proti neskončno. Torej je zaporedje tudi Cauchyjevo.

c) Najprej opazimo, da zaporedje v maksimum metriki ni konvergentno, torej ne obstaja ustrezna funkcija f, ki bi bila njegova limita. To limito bi namreč glede na d_1 imelo tudi v prostoru zoženih funkcij na kateri koli manjši interval. Toda po prejšnjem zaporedje zožitev na interval $[-1, -a]$ konvergira proti konstanti 1, zaporedje zožitev na interval $[a, 1]$ pa konvergira proti konstanti 0. Zaradi enoličnosti limit bi moralo biti potem $f(x) = 1$ za vse $-1 \le x < 0$ in $f(x) = 0$ za vse $0 < x \le 1$. Taka funkcija pa ne more biti zvezna na $[-1, 1]$ in zato ni ustrezna.

Pač pa je zaporedje Cauchyjevo. Za $m > n$ namreč velja:

$$d_1(f_m, f_n) = \int_{-1}^{1} \left|\frac{1}{1+e^{mx}} - \frac{1}{1+e^{nx}}\right| \mathrm{d}x = J_1 + J_2\,,$$

kjer je:

$$J_1 = \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{1+e^{mx}} - \frac{1}{1+e^{nx}}\right) \mathrm{d}x \quad \text{in} \quad J_2 = \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1+e^{nx}} - \frac{1}{1+e^{mx}}\right) \mathrm{d}x\,.$$

Iz nedoločenega integrala:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{kx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)} = \frac{1}{k}\ln\left|\frac{u}{1+u}\right|\,\mathrm{d}u = \frac{1}{k}\ln\frac{e^{kx}}{1+e^{kx}} = -\frac{1}{k}\ln\bigl(1+e^{-kx}\bigr)$$

dobimo:

$$J_1 = \frac{1}{m}\ln\frac{1+e^m}{2} - \frac{1}{n}\ln\frac{1+e^n}{2}\,, \qquad J_2 = \frac{1}{m}\ln\frac{1+e^{-m}}{2} - \frac{1}{n}\ln\frac{1+e^{-n}}{2}$$

Ker je:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln \frac{1+e^k}{2} = 1 \quad \text{in} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln \frac{1+e^{-k}}{2} = 0\,,$$

sta tako J_1 kot tudi J_2 poljubno majhna, če sta m in n dovolj velika. Zato je zaporedje Cauchyjevo. Ker pa ni konvergentno, to pomeni, da dani prostor v metriki d_1 ni poln.

13. Velja:

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^{1/n^2} (n - n^3 x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

torej zaporedje v metriki d_1 res konvergira proti 0. Nadalje je:

$$d_2(f_n, 0) = \left[\int_0^{1/n^2} (n - n^3 x)^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,,$$

kar pomeni, da zaporedje v metriki d_2 ne konvergira proti 0. V resnici v tej metriki ne konvergira nikamor. Metrika d_2 je namreč na omejenih intervalih močnejša od metrike d_1: vsako zaporedje, ki konvergira k dani funkciji v metriki d_2, konvergira k isti funkciji tudi v metriki d_1. Ker je limita kvečjemu ena, naše zaporedje v metriki d_2 res nikamor ne konvergira.

14. Če vsaj približno dobro narišemo graf, lahko postavimo domnevo, da ima enačba natanko eno rešitev, in sicer na intervalu $[3, \infty)$. Če ta interval postavimo za metrični prostor M, najprej ugotovimo, da za $x \ge 3$ velja $f(x) \ge 3$, torej f res slika M v M. Nadalje za $x \ge 3$ velja:

$$0 \le f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \le \frac{1}{10}\,,$$

torej je f na M res skrčitev. Za začetni približek $x_1 = 3$ dobimo naslednje zaporedje:

$$3\,,\ 4{\cdot}249046\,,\ 4{\cdot}339656\,,\ 4{\cdot}344317\,,\ 4{\cdot}344551\,,\ 4{\cdot}344563\,,\ 4{\cdot}344564\ \ldots$$

Ob upoštevanju zaokrožitvenih napak dobimo, da je razlika med zadnjima dvema približkoma kvečjemu $2 \cdot 10^{-6}$, torej je rešitev od zadnjega približka oddaljena kvečjemu za:

$$\frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \cdot 2 \cdot 10^{-6} < 3 \cdot 10^{-7}\,.$$

Glede na to, da so približki dobljeni z zaokroženjem na zadnjo decimalko, sledi, da je rešitev nekje med 4˙3445635 in 4˙3445648. Zaokroženo na pet decimalk to vsekakor znese 4˙34456.

Zunaj intervala $[3, \infty)$ pa enačba nima rešitve, saj za $0 \le x < 3$ velja $f(x) \ge 3 > x$, za $x < 0$ pa $f(x) \ge 3 - \pi/2 > 0 > x$.

15. Podobno kot pri prejšnji nalogi lahko na podlagi grafa postavimo domnevo, da ima enačba natanko eno rešitev, in sicer na intervalu $[3, \infty)$. Spet postavimo to za metrični prostor M. Za $x \geq 3$ velja $f(x) = 3 + x^{-4} \geq 3$, torej f res slika M v M. Nadalje za $x \geq 3$ velja:

$$f'(x) = -\frac{4}{x^5} < 0\,, \qquad |f'(x)| \leq \frac{4}{3^5} < 0\text{'}017\,,$$

torej je f tam tudi skrčitev. Za začetni približek $x_1 = 3$ dobimo zaporedje:

$$3\,,\ 3\text{'}0123457\,,\ 3\text{'}0121445\,,\ 3\text{'}0121478\,,\ 3\text{'}0121477\,,\ 3\text{'}0121477\,\ldots$$

od koder zaključimo, da je iskani koren v zahtevani natančnosti enak 3'0121477 (ker vemo, da točna vrednost leži med zadnjima približkoma, so vse decimalke v zaokrožitvi točne).

Izven intervala $[3, \infty)$ enačba nima rešitev: za $x < 0$ in $0 < x < 3$ je $f(x) > 3 > x$, za $x = 0$ pa enačba nima pomena.

16. Narišemo graf in postavimo domnevo, da ima enačba dve rešitvi: eno pri $0 < x \leq 1$ in eno za $x \geq 2$. Če postavimo $M := [2, \infty)$, vidimo, da za $x \geq 2$ velja $f(x) := \ln x + 2 \geq \ln 2 + 2 \geq 2$, torej f res slika M v M; nadalje za $x \geq 2$ velja:

$$0 < f'(x) = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}\,,$$

torej je f na M res skrčitev (funkcija f vase preslika tudi interval $[1, \infty)$, vendar tam ni skrčitev). Za začetni približek $x_1 = 2$ dobimo:

$$\begin{gathered} 2\,,\ 2\text{'}693147\,,\ 2\text{'}990710\,,\ 3\text{'}095511\,,\ 3\text{'}129953\,,\ 3\text{'}141018\,, \\ 3\text{'}144547\,,\ 3\text{'}145670\,,\ 3\text{'}146027\,,\ 3\text{'}146140\,,\ 3\text{'}146176\,, \\ 3\text{'}146188\,,\ 3\text{'}146192\,,\ 3\text{'}146193\,,\ 3\text{'}146193\,\ldots \end{gathered}$$

Ob upoštevanju zaokrožitvenih napak dobimo, da je razlika med zadnjima dvema približkoma kvečjemu 10^{-6}, torej je rešitev od zadnjega približka oddaljena kvečjemu za:

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \cdot 10^{-6} = 10^{-6}\,.$$

Glede na to, da so približki dobljeni z zaokroženjem na zadnjo decimalko, sledi, da je rešitev nekje med 3'1461925 in 3'1461945. Zaokroženo na pet decimalk to vsekakor znese 3'14619.

Nasprotno pa za $0 < x \leq 1$ velja $f'(x) \geq 1$, torej Banachovega skrčitvenega načela ne bomo mogli uporabiti neposredno. Pač pa lahko lahko enačbo preoblikujemo v $x = e^{x-2} =: g(x)$. Ker je g naraščajoča ter $0 \leq g(0) = e^{-2} \leq g(1) = e^{-1} \leq 1$, g preslika interval $[0, 1]$ samega vase. Poleg tega za $0 \leq x \leq 1$ velja $g'(x) = e^{x-2} \leq e^{-1} < 1$, torej je g tam tudi skrčitev. Za začetni približek $x_1 = 0$ dobimo:

$$\begin{gathered} 0\,,\ 0\text{'}1353353\,,\ 0\text{'}1549482\,,\ 0\text{'}1580171\,,\ 0\text{'}1585028\,,\ 0\text{'}1585798\,, \\ 0\text{'}1585920\,,\ 0\text{'}1585940\,,\ 0\text{'}1585943\,,\ 0\text{'}1585943\,,\ 0\text{'}1585943\,, \end{gathered}$$

torej je drugi koren naše enačbe $x \doteq 0\text{'}15859$ (prava vrednost je manjša od zadnjega približka, a razlika je manjša od $2 \cdot 10^{-8}$).

17. Analiza funkcije $F(x) = x^3 + x^2 - 3$ (obnašanje v neskončnosti, stacionarne točke, tabeliranje) pokaže, da ima ta funkcija natanko eno ničlo, in sicer na intervalu $(1, 2)$. Analiza njenega odvoda (tabeliranje, naslednji odvod) pokaže, da na prej omenjenem intervalu velja $5 < F'(x) < 16$. Koeficient k bo torej ustrezen, če bo veljalo $-1 < 1 - 5k < 1$ in $-1 < 1 - 16k < 1$, kar je res za $0 < k < 1/8$. Če vzamemo $k = 1/10$, dobimo $-3/5 < 1 - k\,F'(x) < 1/2$. Ker je $F(1) = -2$ bližje ničli kot $F(2) = 9$, za začetni približek vzamemo $x_1 = 1$; nato računamo $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{10}(x_n^3 + x_n^2 - 3)$. Dobimo:

$$\begin{gathered} 1\,,\ 1\dot{}1\,,\ 1\dot{}1459\,,\ 1\dot{}164125\,,\ 1\dot{}170845\,,\ 1\dot{}173249\,,\ 1\dot{}174098\,,\ 1\dot{}174397\,,\\ 1\dot{}174502\,,\ 1\dot{}174539\,,\ 1\dot{}174552\,,\ 1\dot{}174557\,,\ 1\dot{}174559\,,\ 1\dot{}174559\,. \end{gathered}$$

Iskani koren (s predpisano natančnostjo) je torej 1˙17456 (prava vrednost se od zadnjega približka razlikuje za manj kot 0˙0000015).

3. Fourierove vrste

1. Z upoštevanjem sodosti in lihosti dobimo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\,\mathrm{d}x = 2\pi\,,\\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0\,,\\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\,.
\end{aligned}$$

Sledi:

$$\bar{f}(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) = \pi + 2\left[\sin x - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \cdots\right],$$

kjer je:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \pi + x & ; -\pi < x < \pi \\ \pi & ; x \in \{-\pi, \pi\} \end{cases}.$$

Ko vstavimo $x = \pi/2$ in malo uredimo, dobimo znano vrsto:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}\,.$$

Iz Parsevalove enačbe pa po ureditvi dobimo:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

2. Iz:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x = 1\,,\\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0\,,\\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} 2/(n\pi) & ; n \text{ lih} \\ 0 & ; n \text{ sod} \end{cases}
\end{aligned}$$

dobimo:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\big((2k+1)x\big)}{2k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right),$$

kjer je:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi < x < 0 \\ 1 & ; 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2} & ; x \in \{-\pi, 0, \pi\} \end{cases}.$$

Ko vstavimo $x = \pi/2$ in malo uredimo, spet dobimo znano vrsto:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}\,.$$

Iz Parsevalove enačbe pa po ureditvi dobimo:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

3. Iz:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3}\,,\\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{n^2}\,(-1)^n
\end{aligned}$$

in še z upoštevanjem sodosti dobimo, da za $-\pi \le x \le \pi$ velja:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\,\cos(nx)\,.$$

Ko vstavimo $x = 0$ in malo uredimo, dobimo:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}\,,$$

ko vstavimo $x = \pi$, pa dobimo že znano vrsto:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Iz Parsevalove enačbe pa po ureditvi dobimo:

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

4. Iz:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\,\mathrm{d}x &= \frac{2\,\mathrm{sh}(a\pi)}{a\pi}\,,\\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{e^{ax}}{\pi(a^2+n^2)}\,\Big(a\cos(nx) + b\sin(nx)\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} =\\
&= \frac{2a}{\pi(a^2+n^2)}\,(-1)^n\,\mathrm{sh}(a\pi)\,,\\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{e^{ax}}{\pi(a^2+n^2)}\,\Big(a\sin(nx) - b\cos(nx)\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} =\\
&= \frac{2n}{\pi(a^2+n^2)}\,(-1)^{n+1}\,\mathrm{sh}(a\pi)
\end{aligned}$$

dobimo:

$$\bar{f}(x) = \frac{\operatorname{sh}(a\pi)}{a\pi}\left[1 + 2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\big(a\cos(nx) - n\sin(nx)\big)\right],$$

kjer je:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} e^{ax} & ; -\pi < x < \pi \\ \operatorname{ch}(a\pi) & ; x \in \{-\pi, \pi\} \end{cases}.$$

Ko vstavimo $x = 0$ in malo uredimo, dobimo:

$$\frac{1}{a^2+1^2} - \frac{1}{a^2+2^2} + \frac{1}{a^2+3^2} - \frac{1}{a^2+4^2} + \cdots = \frac{1}{2a^2}\left(1 - \frac{a\pi}{\operatorname{sh}(a\pi)}\right),$$

ko vstavimo $x = \pi$, pa dobimo:

$$\frac{1}{a^2+1^2} + \frac{1}{a^2+2^2} + \frac{1}{a^2+3^2} + \frac{1}{a^2+4^2} + \cdots = \frac{a\pi\operatorname{cth}(a\pi) - 1}{2a^2}.$$

Isto vrsto po ureditvi dobimo tudi iz Parsevalove enačbe.

5. Fourierovo vrsto lahko tu dobimo kar iz trigonometrijske identitete – za vse $x \in \mathbb{R}$ velja:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2},$$

torej velja $a_0 = 1$, $a_2 = -1/2$, vsi ostali koeficienti v Fourierovi vrsti pa so enaki nič. Iz Parsevalove enačbe tako dobimo le, da je $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\,\mathrm{d}x = 3\pi/4$.

6. Iz:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{2\sin(a\pi)}{a\pi}, \\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(ax)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big[\cos\big((a+n)x\big) + \cos\big((a-n)x\big)\Big]\,\mathrm{d}x = \\
&= (-1)^n\,\frac{2a}{\pi(a^2-n^2)}\sin(a\pi)
\end{aligned}$$

in še z upoštevanjem sodosti dobimo, da za vse $-\pi \le x \le \pi$ velja:

$$\cos(ax) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi}\left[1 + 2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos(nx)\right].$$

Ko vstavimo $x = 0$ in malo uredimo, dobimo:

$$\frac{1}{1^2-a^2} - \frac{1}{2^2-a^2} + \frac{1}{3^2-a^2} - \frac{1}{4^2-a^2} + \cdots = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{a\pi}{\sin(a\pi)} - 1\right),$$

ko vstavimo $x = \pi$, pa dobimo:

$$\frac{1}{1^2 - a^2} + \frac{1}{2^2 - a^2} + \frac{1}{3^2 - a^2} + \frac{1}{4^2 - a^2} + \cdots = \frac{1 - a\pi \operatorname{ctg}(a\pi)}{2a^2}\,.$$

Iz Parsevalove enačbe pa po ureditvi dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1^2 - a^2)^2} + \frac{1}{(2^2 - a^2)^2} + \frac{1}{(3^2 - a^2)^2} + \frac{1}{(4^2 - a^2)^2} + \cdots &= \\ = \frac{1}{4a^4}\left[\frac{a^2\pi^2}{\sin^2(a\pi)}\left(1 + \frac{\sin(2a\pi)}{2a\pi}\right) - 2\right].\end{aligned}$$

7. Iz:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(ax)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big[\cos\big((a-n)x\big) - \cos\big((a+n)x\big)\Big]\,\mathrm{d}x = \\ &= (-1)^n\,\frac{2n}{\pi(a^2 - n^2)}\sin(a\pi)\end{aligned}$$

in še z upoštevanjem lihosti dobimo:

$$\bar{f}(x) = \frac{2\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n}{a^2 - n^2}\sin(nx)\,,$$

kjer je:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \sin(ax) & ; -\pi < x < \pi \\ 0 & ; x \in \{-\pi, \pi\} \end{cases}.$$

Ko vstavimo $x = \pi/2$ in malo uredimo, dobimo:

$$\frac{1}{1^2 - a^2} - \frac{3}{3^2 - a^2} + \frac{5}{5^2 - a^2} - \frac{7}{7^2 - a^2} + \cdots = \frac{\pi}{4\cos\frac{a\pi}{2}}\,.$$

Če sem vstavimo $a = 0$, dobimo dobro znano vrsto za $\pi/4$. Iz Parsevalove enačbe pa po ureditvi dobimo:

$$\frac{1^2}{(1^2 - a^2)^2} + \frac{2^2}{(2^2 - a^2)^2} + \frac{3^2}{(3^2 - a^2)^2} + \frac{4^2}{(4^2 - a^2)^2} + \cdots = \frac{\pi^2\left(1 - \frac{\sin(2a\pi)}{2a\pi}\right)}{4\sin^2(a\pi)}\,.$$

8. Iz:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi\,, \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} x\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n^2\pi}\big(1 - (-1)^n\big)\,,\end{aligned}$$

dobimo:

$$\begin{aligned}
\bar{f}(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(1 - (-1)^n\bigr) \frac{\sin(nx)}{n^2} = \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \cdots \right] ,
\end{aligned}$$

kjer za $-\pi \le x \le \pi$ velja $f(x) = |x|$. Iz Parsevalove enačbe po ureditvi dobimo:

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96} .$$

9. Iz:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi} , \\
\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos x \,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = 0 , \\
\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) \,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos(nx) \,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Bigl[\sin\bigl((n+1)x\bigr) - \sin\bigl((n-1)x)\bigr) \Bigr] \,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{2\bigl(1 + (-1)^n\bigr)}{\pi(n^2 - 1)} ; \quad n = 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned}$$

dobimo:

$$\begin{aligned}
\bar{f}(x) &= \frac{2}{\pi} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \bigl(1 + (-1)^n\bigr) \frac{1}{n^2 - 1} \sin(nx) \right] = \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos(2x)}{2^2 - 1} + \frac{\cos(4x)}{4^2 - 1} + \frac{\cos(6x)}{6^2 - 1} + \cdots \right] ,
\end{aligned}$$

kjer za $x \in [-\pi, \pi]$ velja $\bar{f}(x) = |\sin x|$.

10. Iz:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin x \,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos x \sin x \,\mathrm{d}x = 0 , \\
\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) \,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos x \sin(nx) \,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Bigl[\sin\bigl((n+1)x\bigr) + \sin\bigl((n-1)x)\bigr) \Bigr] \,\mathrm{d}x = \\
&= \bigl(1 + (-1)^n\bigr) \frac{2n}{\pi(n^2 - 1)} ; n = 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned}$$

dobimo:

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\bigl(1+(-1)^n\bigr)\,\frac{n}{n^2-1}\sin(nx) = \\ &= \frac{4}{\pi}\left[\frac{2}{2^2-1}\sin(2x)+\frac{4}{4^2-1}\sin(4x)+\frac{6}{6^2-1}\sin(6x)+\cdots\right],\end{aligned}$$

kjer je:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} -\cos x & ;\ -\pi < x < 0 \\ \cos x & ;\ 0 < x < \pi \\ 0 & ;\ x \in \{-\pi, 0, \pi\} \end{cases}.$$

11. Iz:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,, \\ \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\,, \\ \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\end{aligned}$$

dobimo:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x)\,,$$

kjer je:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 0 & ;\ -1 < x \le 0 \\ x & ;\ 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & ;\ x \in \{-1, 1\} \end{cases}.$$

12. Iz:

$$\begin{aligned}2\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= 2\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = 3\,, \\ 2\int_1^2 f(x)\cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x &= 2\int_1^2 x\cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \\ 2\int_1^2 f(x)\sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}x &= 2\int_1^2 x\sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}\end{aligned}$$

dobimo:

$$\bar{f}(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi}\left[\sin(2\pi x) + \frac{\sin(4\pi x)}{2} + \frac{\sin(6\pi x)}{3} + \cdots\right],$$

kjer je:

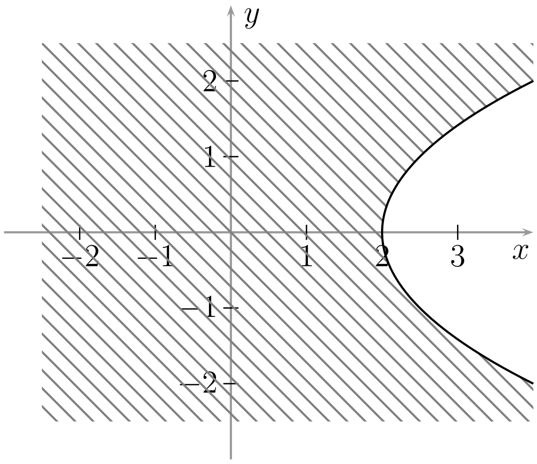
$$\bar{f}(x) = \begin{cases} x & ;\ 1 < x < 2 \\ \frac{3}{2} & ;\ x \in \{1, 2\} \end{cases}.$$

13. Označimo z $\bar{f}(x)$ dejansko vsoto vrste v x. Ker je $\bar{f}$ periodična s periodo 2, velja:

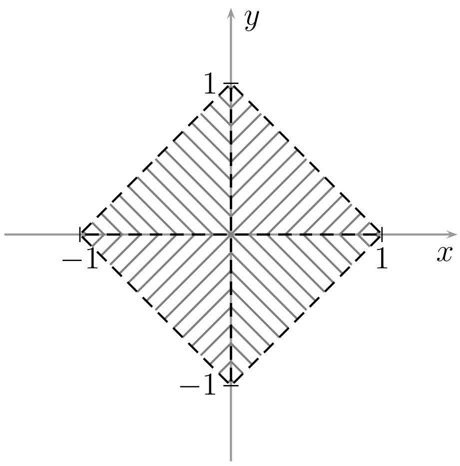
$$\begin{aligned}
\bar{f}(8) &= \bar{f}(8 - 3 \cdot 2) = \bar{f}(2) = f(2) = 4\,, \\
\bar{f}(9) &= \bar{f}(9 - 3 \cdot 2) = \bar{f}(3) = \bar{f}(9 - 4 \cdot 2) = \bar{f}(1) = \\
&= \tfrac{1}{2}\Big[\lim_{y\downarrow 1} f(y) + \lim_{y\downarrow 3} f(y)\Big] = \tfrac{1}{2}\big[f(1) + f(3)\big] = 5\,.
\end{aligned}$$

4. Funkcije več spremenljivk

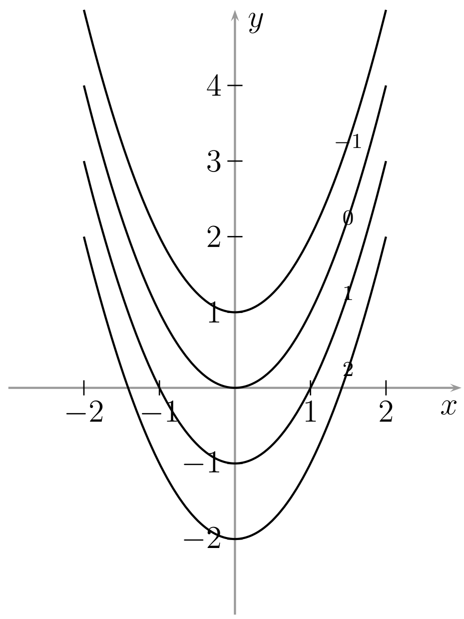
1. $Df = \{(x, y) \; ; \; x \le y^2/4 + 2\} =$
$= \{(x, y) \; ; \; x < 2\} \cup \{(x, y) \; ; \; x \ge 2, \; y \ge \sqrt{4x - 8}\} \cup \{(x, y) \; ; \; x \ge 2, \; y \le \sqrt{4x - 8}\}.$
Skica:



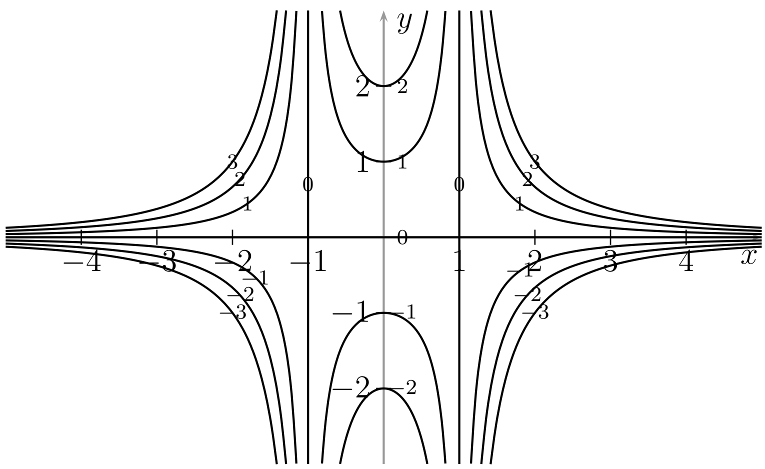
2. $Df = \{(x, y) \; ; \; -1 < x < 0, \; -1 - x < y < 1 + x, \; y \ne 0\} \cup$
$\cup \{(x, y) \; ; \; 0 < x < 1, \; x - 1 < y < 1 - x, \; y \ne 0\}.$
Skica:



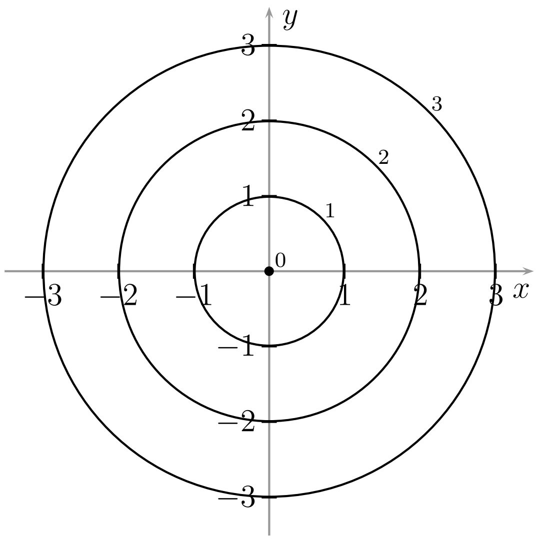
3.



4.



5.



Gre za stožec.

6. Funkcija f je zlepek funkcij:

$$f_1(x,y) = 0 \qquad \text{za} \quad (x,y) \in D_1 = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \le 1\}\,,$$
$$f_2(x,y) = x+y \qquad \text{za} \quad (x,y) \in D_2 = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 > 1\}\,,$$

ki sta na svojih definicijskih območjih zvezni, saj sta elementarni.

Funkcija f je zagotovo zvezna zunaj enotske krožnice $x^2 + y^2 = 1$, saj te točke pripadajo notranjosti enega ali drugega definicijskega območja: notranjost množice D_1 je množica točk, za katere je $x^2 + y^2 < 1$, notranjost množice D_2 pa množica točk, za katere je $x^2 + y^2 > 1$.

Za vsako točko na enotski krožnici pa obstaja tako pot do nje po D_1 kot tudi pot do nje po D_2. Če želimo, da je f v taki točki zvezna, se mora limita po prvi poti (ki je limita funkcije f_1) ujemati z limito po drugi poti (ki je limita funkcije f_2). Funkciji f_1 in f_2 pa sta dobljeni kot zožitvi elementarnih funkcij $(x,y) \mapsto 0$ in $(x,y) \mapsto x+y$, ki sta definirani povsod in seveda zvezni, torej se limita ujema z vrednostjo v točki. Če je torej (x,y) točka na enotski krožnici in f zvezna v njej, mora veljati $x+y=0$, kar velja v dveh točkah: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ in $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. V teh dveh točkah je f dejansko tudi zvezna, ker je f dobljena tudi kot zlepek funkcije f_1 in zvezne razširitve funkcije f_2 na $D_2 \cup \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

7. Podobno kot prej vidimo, da je funkcija f zvezna povsod razen morda na krožnici $x^2 + y^2 = 4$. Če želimo, da bo zvezna tudi na njej, mora zaradi ujemanja limit po ustreznih poteh in elementarnosti delnih funkcij za vsako točko (x,y), za katero je $x^2 + y^2 = 4$, veljati $\sqrt{x^2+y^2} = a$. To pa bo natanko tedaj, ko bo $a = 2$. Za $a = 2$ bo funkcija dejansko povsod zvezna, ker jo lahko zapišemo tudi v obliki:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & ;\ x^2+y^2 \ge 4 \\ 2 & ;\ x^2+y^2 \le 4 \end{cases}.$$

Zdaj je vsaka točka bodisi notranja točka katerega od novih definicijskih območij ali pa pripada njunemu preseku, torej je f v njej zvezna.

8. Funkcija se ne da zvezno razširiti, ker je $\lim_{t\to 0} f(t,0) = 0$, medtem ko je $\lim_{t\to 0} f(t,t) = 1/2$.

9. Funkcija se ne da zvezno razširiti, ker je $\lim_{t\to 0} f(t,0) = 0$, medtem ko je $\lim_{t\to 0} f(t,t^2) = 1/2$.

10. Če uvedemo polarne koordinate $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, velja:

$$f(x,y) = r\cos^2\theta\sin\theta\sin(r\sin\theta)\,,$$

torej $|f(x,y)| \le r = \sqrt{x^2+y^2}$. Zato se da f zvezno razširiti, če postavimo $f(0,0) := 0$.

11. Iz znane limite $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ dobimo, da je tudi $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1$. Sledi:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x+y)}{x+y+x^2-y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x+y)}{x+y}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x+y+x^2-y^2} = \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{1+x-y} = 1\,.\end{aligned}$$

12. $f_x(x,y) = 2x+3y, \quad f_y(x,y) = 3x - \dfrac{2}{y^2}.$

13. $f_x(x,y) = 2xe^{x^2} - \dfrac{1}{y}, \quad f_y(x,y) = \dfrac{3}{y} + \dfrac{x}{y^2}.$

14. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 4xy, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + \dfrac{1}{y+1}.$

15. a) Velja $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y$ in $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x$.

b) Velja $u = x(z-x)$, torej je $\dfrac{\partial u}{\partial x} = z - 2x = y - x$ in $\dfrac{\partial u}{\partial z} = x$. Opazimo, da se parcialni odvod $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ne ujema z enako pisanim parcialnim odvodom iz prejšnje točke. Toda odvod iz prejšnje točke je odvod glede na sistem neodvisnih spremenljivk x in y, medtem ko je odvod iz te točke mišljen glede na sistem spremenljivk x in z.

16. Pišimo $u = \ln\big(z+\sqrt{1+z^2}\big)$, kjer je $z = \dfrac{x}{y}$. Tedaj velja:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\,.$$

Sledi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\operatorname{sgn}(y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{|y|\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

17. Pišimo $u = \operatorname{arctg} z$, kjer je $z = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$. Tedaj velja:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{1+z^2} = \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}\,,$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2y(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}\,.$$

Sledi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2+y^2}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x}{x^2+y^2}\,.$$

18. Velja:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\,.$$

Sledi $y\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

19. Neposredno velja:

$$w = \cos^3 t \sin t + \cos t \sin^3 t = \sin t \cos t = \tfrac{1}{2}\sin(2t)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t\,,$$

kar lahko preverimo tudi s pomočjo verižnega pravila:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

in iz:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2 y + y^3 = 3\cos^2 t \sin t + \sin^3 t\,, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t\,,$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 = \cos^3 t + 3\cos t \sin^2 t\,, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t\,.$$

Dobimo namreč:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= -(3\cos^2 t \sin t + \sin^3 t)\sin t + (\cos^3 t + 3\cos t \sin^2 t)\cos t = \\ &= \cos^4 t - \sin^4 t = \\ &= \cos^2 t - \sin^2 t\,,\end{aligned}$$

kar je enako kot prej.

20. $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \left(e^t - e^{-t}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left(e^t + e^{-t}\right)\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

21. $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\dfrac{\partial z}{\partial y}$,
$\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = -r\,\dfrac{\partial z}{\partial x}\sin\theta + r\,\dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\theta = -y\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\,\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

22. $\mathrm{d}f = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{y}}\,\mathrm{d}x - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2y\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$.

Pri $x = 8$ in $y = 25$ je $z = 0{\cdot}4$ in $\mathrm{d}z = \dfrac{1}{60}\,\mathrm{d}x - \dfrac{1}{125}\,\mathrm{d}y$.

Od tod dobimo: $\dfrac{\sqrt[3]{8{\cdot}06}}{\sqrt{24{\cdot}5}} \approx 0{\cdot}405$, natančnejši rezultat: $0{\cdot}40506855$.

23. Velja:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \\
&= \frac{x^2+y^2}{|x^2-y^2|}\,\frac{2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}(xy) - 2xy\,\mathrm{d}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \\
&= \frac{2y(y^2-x^2)\,\mathrm{d}x + 2x(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)|x^2-y^2|} = \\
&= \frac{2x\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\,\mathrm{sgn}(x^2-y^2)\,.
\end{aligned}
$$

24. $\mathrm{grad}\,u = \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix}$, $\quad \mathrm{d}u = (y+z)\,\mathrm{d}x + (x+z)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z$.

V točki T je $\mathrm{grad}\,u = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 1 \end{bmatrix}$, smerni odvod pa je enak

$\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}} \left\langle \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} \right\rangle = 8.$

25. $f_x(x,y) = (3x^2 + x^3)e^{x+5y}$, $\quad f_y(x,y) = 5x^3e^{x+5y}$,
$f_{xx}(x,y) = (6x + 6x^2 + x^3)e^{x+5y}$, $\quad f_{yy}(x,y) = 25x^3e^{x+5y}$,
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = (15x^2 + 5x^3)e^{x+5y}$.

26. $f_x(x,y,z) = y^z\cos(xy^z)$,
$f_{xy}(x,y,z) = zy^{z-1}\cos(xy^z) - xzy^{2z-1}\sin(xy^z)$,

$$
\begin{aligned}
f_{xyz}(x,y,z) = {}& y^{z-1}\cos(xy^z) + zy^{z-1}\ln y\cos(xy^z) - 3xzy^{2z-1}\ln y\sin(xy^z) - \\
& - xy^{2z-1}\sin(xy^z) - x^2zy^{3z-1}\ln y\cos(xy^z).
\end{aligned}
$$

27. Zunaj izhodišča je f zvezna zaradi elementarnosti; ker velja:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,,$$

je zvezna tudi v izhodišču.

Za $(x, y) \neq (0, 0)$ velja:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}\,, \\ f_y(x, y) &= \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,. \end{aligned}$$

v izhodišču pa lahko prva parcialna odvoda izračunamo neposredno po definiciji:

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0)}{h} = 0\,, \\ f_y(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h)}{h} = 0\,. \end{aligned}$$

Zunaj izhodišča sta prva parcialna odvoda spet zaradi elementarnosti zvezna; ker velja:

$$\begin{aligned} f_x(r\cos\theta, r\sin\theta) &= r(\cos^4\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin^3\theta - \sin^5\theta)\,, \\ f_y(r\cos\theta, r\sin\theta) &= r(\cos^5\theta - \cos\theta\sin^4\theta - 4\cos^3\theta\sin^2\theta)\,, \end{aligned}$$

sta zvezna tudi v izhodišču.

Po ponovnem odvajanju spet neposredno po definiciji dobimo:

$$\begin{aligned} f_{xy}(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial x}(0, h) = -1\,, \\ f_{yx}(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) = 1\,. \end{aligned}$$

Oba mešana druga parcialna odvoda torej v $(0, 0)$ obstajata, a nista enaka. Torej tam nista zvezna. Drugje pa zaradi zveznosti morata biti enaka. Izračunamo lahko, da izven izhodišča velja:

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{x^6 + 9x^4 y^2 - 9x^2 y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}\,.$$

28. Razvoj:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{a + h}}{\sqrt{b + k}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} &+ \frac{1}{3a^{2/3}\sqrt{b}}\,h - \frac{\sqrt[3]{a}}{2b^{3/2}}\,k + \\ &- \frac{1}{9a^{5/3}\sqrt{b}}\,h^2 - \frac{1}{6a^{2/3}b^{3/2}}\,hk + \frac{3\sqrt[3]{a}}{8b^{5/2}}\,k^2 + R_2\,, \end{aligned}$$

Ko vstavimo $a = 8$, $b = 25$, $h = 0{\cdot}06$ in $k = -0{\cdot}5$, dobimo:

$$
\begin{aligned}
& & f(a,b) &= 0{\cdot}4\,, \\
f_x(a,b) &= \frac{1}{60}\,, & f_x(a,b)\,h &= 0{\cdot}001\,, \\
f_y(a,b) &= -\frac{1}{125}\,, & f_y(a,b)\,k &= 0{\cdot}004\,, \\
f_{xx}(a,b) &= -\frac{1}{720}\,, & \frac{1}{2!}\,f_{xx}(a,b)\,h^2 &= -0{\cdot}0000025\,, \\
f_{xy}(a,b) &= -\frac{1}{3000}\,, & \frac{1}{1!\,1!}\,f_{xy}(a,b)\,hk &= 0{\cdot}00001\,, \\
f_{yy}(a,b) &= \frac{3}{6250}\,, & \frac{1}{2!}\,f_{yy}(a,b)\,k^2 &= 0{\cdot}00006
\end{aligned}
$$

in od tod $\dfrac{\sqrt[3]{8{\cdot}06}}{\sqrt{24{\cdot}5}} \approx 0{\cdot}4050675$.

Točen rezultat: $0{\cdot}40506855$.

29. Iz Taylorjevega razvoja za logaritem:

$$\ln(1 + xy^2) = xy^2 - \frac{x^2y^4}{2} + \frac{x^3y^6}{3} - \cdots$$

po odvajanju dobimo $f_{xxyyyy}(0,0) = -24$ in $f_{xxxxyy}(0,0) = 0$.

30. Iz Taylorjevega razvoja za običajni sinus:

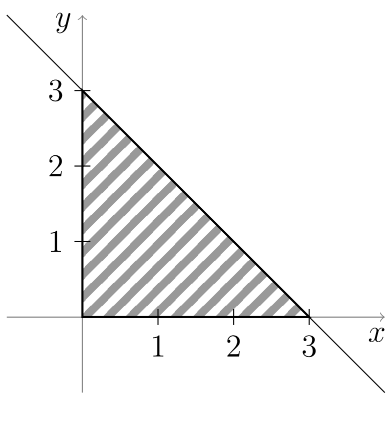
$$\sin(x + y^2) = x + y^2 - \frac{(x + y^2)^3}{6} + \frac{(x + y^2)^5}{120} - \cdots$$

dobimo naslednji Taylorjev razvoj reda 5 za našo funkcijo:

$$\sin(x + y^2) = x + y^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^5}{120} - \frac{xy^4}{2} + \cdots$$

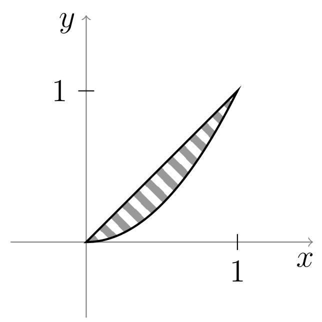
in po odvajanju dobimo $f_{xyyyy}(0,0) = -12$.

31. Skica definicijskega območja:



Oglišča: $f(0,0) = f(3,0) = f(0,3) = 0$.
Rob $y = 0,\ 0 < x < 3$: $f(x,0) = 0$.
Rob $x = 0,\ 0 < y < 3$: $f(0,y) = 0$.
Rob $y = 3 - x, 0 < x < 3$: $f(x, 3-x) = x(3-x)e^{-3}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, 3-x) = (3-2x)e^{-3}$, $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}\, e^{-3} \doteq 0{\cdot}112$.
Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (1-x)y\, e^{-x-y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x(1-y)\, e^{-x-y}$, $f(1,1) = e^{-2} \doteq 0{\cdot}135$.
Torej je $\min\limits_D f = 0$ in $\max\limits_D f = e^{-2}$.

32. Skica definicijskega območja:



Oglišči: $f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = -1$.
Rob $y = x,\ 0 < x < 1$: $f(x,x) = -x^2$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,x) = -2x$, točka $(0,0)$ ne pripada notranjosti tega roba (in smo jo že obravnavali pri ogliščih).
Rob $y = x^2,\ 0 < x < 1$: $f(x,x^2) = x^2 - 2x^4$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,x^2) = 2x - 8x^3 =$
$= x(1-2x)(1+2x)$, v notranjosti roba je le točka $(1/2, 1/4)$ in velja $f(1/2, 1/4) = 1/8$.
Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -4y$, točka $(0,0)$ ni v notranjosti.
Torej je $\min\limits_D f = f(1,1) = -1$ in $\max\limits_D f = f(1/2, 1/4) = 1/8$.

33. Iz parcialnih odvodov:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 + 3x^2$$

dobimo, da v notranjosti ekstremov ni. Za iskanje ekstremov na robu je najugodneje, če vse izrazimo z y. Glede na to, da je $x = \pm\sqrt{1-(y-2)^2}$, rob razpade na dva dela, ki se stikata v dveh ogliščih, kjer velja:

$$f(0,1) = 2\,, \qquad f(0,3) = 6\,.$$

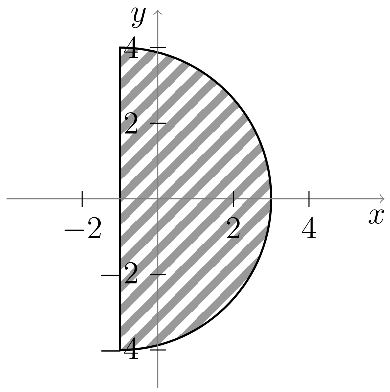
V notranjosti obeh dobljenih delov roba pa velja:

$$z = f(x,y) = \Big(2 + 3\big(1 - (y-2)^2\big)\Big)y = -3y^3 + 12y^2 - 7y$$

Poiskati moramo stacionarne točke te funkcije za $1 < y < 3$. Iz $\mathrm{d}z/\mathrm{d}y = -9y^2 + 24y - 7$ dobimo $y = 1/3$ in $y = 7/3$. Ker mora biti $1 \le y \le 3$, v poštev pride le $y = 7/3$. Za to vrednost spremenljivke y najprej izračunamo $x = \pm 2\sqrt{2}/3$, nato pa še $z = 98/9$.

Minimum naše funkcije je torej 2, maksimum pa $98/9 \doteq 10{\cdot}889$.

34. Skica definicijskega območja:



Krožni lok razdelimo na dva odseka, $y = \sqrt{16-(x+1)^2} = \sqrt{15-2x-x^2}$ in $y = -\sqrt{16-(x+1)^2} = -\sqrt{15-2x-x^2}$. Zato ne dobimo le oglišč $(-1,4)$ in $(-1,-4)$, temveč tudi oglišče $(3,0)$.

Oglišča: $f(-1,4) = f(1,4) = 21\sqrt{e} \doteq 34{\cdot}6, \quad f(3,0) = 13\,e^{-3/2} \doteq 2{\cdot}90$.

Rob $x = -1$, $-4 \le y \le 4$: $f(-1,y) = (5+y^2)e^{1/2}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(-1,y) = 2y\,e^{1/2}$,

$f(-1,0) = 5\,e^{1/2} \doteq 8{\cdot}24$.

Robova $y = \pm\sqrt{15-2x-x^2}$: $f\big(x, \pm\sqrt{15-2x-x^2}\big) = (19-2x)e^{-x/2}$,

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\big(x, \pm\sqrt{15-2x-x^2}\big) = \big(x - \frac{23}{2}\big)e^{-x/2}$.

Nobena točka $T(23/2, y)$ ni v definicijskem območju funkcije.

Notranjost: $f_x(x,y) = \big(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2\big)e^{-x/2}, \quad f_y(x,y) = 2y\,e^{-x/2}$.

Edina stacionarna točka v notranjosti je $T(2,0)$ in $f(2,0) = 8\,e^{-1} \doteq 2{\cdot}94$.

Torej je $\min\limits_D f = f(3,0) = 13\,e^{-3/2}$ in $\max\limits_D f = f(-1,4) = f(-1,-4) = 21\sqrt{e}$.

35. $f_x(x,y) = (1+x+y)e^{x-y}, \quad f_y(x,y) = (1-x-y)e^{x-y}$.

Funkcija je brez stacionarnih točk, torej tudi brez ekstremov.

36. $f_x(x,y) = 4(x^3+y), \quad f_y(x,y) = 4(x+y^3)$.

Stacionarne točke: $T_1(0,0)$, $T_2(1,-1)$ in $T_3(-1,1)$.

$f_{xx}(x,y) = 12x^2, \quad f_{xy}(x,y) = 4, \quad f_{yy}(x,y) = 12y^2, \quad K(x,y) = 144\,x^2y^2 - 16$.

V točki T_1 je $H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ in $K(0,0) = -16$, torej tam ni ekstrema.

V točkah T_2 in T_3 pa je $H(1,-1) = H(-1,1) = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ in $K(1,-1) = K(-1,1) = 128$, torej je tam lokalni minimum.

37. $f_x(x,y) = (1 - x + y^2)e^{-x}$, $f_y(x,y) = -2y\,e^{-x}$. Stacionarna točka: $T(1,0)$.
$f_{xx}(x,y) = (-2 + x - y^2)e^{-x}$, $f_{xy}(x,y) = 2y\,e^{-x}$, $f_{yy}(x,y) = -2\,e^{-x}$.
V edini stacionarni točki je $H(1,0) = \begin{bmatrix} -1/e & 0 \\ 0 & -2/e \end{bmatrix}$ in $K(1,0) = 2/e^2$, torej je tam lokalni maksimum.

38. $f_x(x,y,z) = (6x-2y-3x^2-2y^2-z^2+2xy+2yz)e^{-x}$, $f_y(x,y,z) = (4y-2x-2z)e^{-x}$, $f_z(x,y,z) = (2z - 2y)e^{-x}$.
Stacionarni točki: $T_1(0,0,0)$, $T_2(2,2,2)$.
$f_{xx}(x,y,z) = (6 - 12x + 4y + 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz)e^{-x}$, $f_{yy}(x,y,z) = 4\,e^{-x}$, $f_{zz}(x,y,z) = 2\,e^{-x}$, $f_{xy}(x,y,z) = (2x-4y+2z-2)e^{-x}$, $f_{xz}(x,y,z) = (2y-2z)e^{-x}$, $f_{yz}(x,y,z) = -2\,e^{-x}$.
V $T_1(0,0,0)$ je $H = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ter $K_1 = 6$, $K_2 = 20$ in $K_3 = 16$, torej je tam minimum.
V $T_2(2,2,2)$ pa je $H = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} e^{-2}$. Ker imamo dva neničelna diagonalca z nasprotnima predznakoma, ekstrema tam ni.

39. $f_x(x,y) = 2xy^2$, $f_y(x,y) = 2x^2y$.
Stacionarne točke so vse, kjer je $x = 0$ ali $y = 0$ (koordinatni križ).
$f_{xx}(x,y) = 2y^2$, $f_{xy}(x,y) = 4xy$, $f_{yy}(x,y) = 2x^2$.
V vseh stacionarnih točkah je $K(x,y) = -12x^2y^2 = 0$, torej nam Hessejeva determinanta nič ne pove. Pač pa vemo, da na koordinatnem križu velja $f(x,y) = 0$, izven njega pa je $f(x,y) > 0$. Nobena točka na koordinatnem križu torej ni lokalni minimum, čeprav je vseh teh točkah dosežen *globalni* minimum.

40. Označimo stranice z x, y in z, telesno diagonalo pa z a. Tedaj je $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ in $V = xyz$.

Prvi način. Nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$F = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2)\,.$$

Iz parcialnih odvodov dobimo enačbe:

$$yz - 2\lambda x = xz - 2\lambda y = xy - 2\lambda z = 0\,.$$

Kjer je volumen maksimalen, je $x, y, z > 0$. Zato lahko izrazimo:

$$\lambda = \frac{yz}{2x} = \frac{xz}{2y} = \frac{xy}{2z}\,.$$

Iz druge enakosti in pozitivnosti dobimo $x = y$, iz tretje enakosti pa še $y = z$, od koder sledi, da je iskani kvader kocka.

Drugi način. Izrazimo $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Da si poenostavimo računanje, namesto V gledamo $w = V^2 = x^2y^2(a^2 - x^2 - y^2)$. Velja:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy^2(a^2 - 2x^2 - y^2)\,, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2x^2y(a^2 - x^2 - 2y^2)\,.$$

Spremenljivka w na območju $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2$, ki je zaprto in omejeno, doseže minimum in maksimum. Kjer w doseže maksimum, pa je očitno $x > 0$ in $y > 0$, torej mora v točki, kjer je maksimum dosežen, veljati:

$$\begin{aligned} a^2 - 2x^2 - y^2 &= 0 \\ a^2 - x^2 - 2y^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Če enačbi odštejemo in upoštevamo pozitivnost, po nekaj računanja dobimo $x = y = a\sqrt{3}$, od koder izračunamo še $z = a\sqrt{3}$. Iskani kvader je torej kocka.

41. *Prvi način.* Iščemo minimum spremenljivke x pri pogoju (vezi):

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\,,$$

torej nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$F = x - \lambda(x^2 + y^2)^2 + 2\lambda(x^2 - y^2)\,.$$

Velja $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - 4\lambda x(x^2 + y^2) + 4\lambda x$ in $\frac{\partial F}{\partial y} = -4\lambda y(x^2 + y^2) - 4\lambda y$. Iz $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ dobimo $-4\lambda y(x^2 + y^2 + 1) = 0$. Zadnji faktor ne more biti nič, torej je bodisi $\lambda = 0$ bodisi $y = 0$. Za $\lambda = 0$ ne more biti $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, za $y = 0$ pa iz vezi dobimo $x^4 - 2x^2 = 0$, kar je res za $x = 0$ in $x = \pm\sqrt{2}$. Minimalna vrednost je $-\sqrt{2}$. Točka, ki je najbolj levo, je torej $\bigl(-\sqrt{2}, 0\bigr)$.

Drugi način. Spremenljivko x proglasimo za odvisno, spremenljivko y pa za neodvisno (torej si predstavljamo, da ima krivulja enačbo $x = x(y)$). Tedaj bo x maksimalen, če se bodisi ne da lokalno izraziti kot diferenciabilna funkcija spremenljivke y bodisi je $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = 0$. Iz:

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)\,, \quad F_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2) - 4x$$

ugotovimo, da se x ne da lokalno izraziti, kvečjemu če je $x = 0$ (sledi $y = 0$) ali pa $x^2 + y^2 = 1$ (to pa je v točkah $T_1\bigl(\sqrt{3}/2, 1/2\bigr)$, $T_2\bigl(\sqrt{3}/2, -1/2\bigr)$, $T_3\bigl(-\sqrt{3}/2, 1/2\bigr)$ in $T_4\bigl(-\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2\bigr)$).

Kjer se x da izraziti kot diferenciabilna funkcija spremenljivke y, pa odvajamo po y:

$$4(x^2 + y^2)\left(x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + y\right) - 4x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + 4y = 0\,,$$

torej je:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{(x^2 + y^2 + 1)y}{(x^2 + y^2 - 1)x}$$

Desna stran je enaka nič, če je $y = 0$, od koder tako kot pri prvem načinu dobimo $x = \pm\sqrt{2}$. Ko to primerjamo z ostalimi kandidati, vidimo, da je minimalna vrednost $-\sqrt{2}$. Točka, ki je najbolj levo, je torej $\bigl(-\sqrt{2}, 0\bigr)$.

42. Iz parcialnih odvodov:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy$$

dobimo, da je ekstrem v notranjosti dosežen kvečjemu tam, kjer sta vsaj dve izmed spremenljivk x, y in z enaki nič. Tam je seveda $f(x, y, z) = 0$. Za ekstreme na robu pa nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$L = xyz - \lambda(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1)\,.$$

in iz parcialnih odvodov dobimo enačbe:

$$yz - 2\lambda x = xz - 4\lambda y = xy - 6\lambda z = 0\,.$$

Kjer je katera izmed spremenljivk x, y in z enaka nič, je seveda $f(x, y, z) = 0$. Kjer so vse različne od nič, pa lahko izračunamo:

$$\lambda = \frac{yz}{2x} = \frac{xz}{4y} = \frac{xy}{6z}\,.$$

Sledi $x^2 = 2y^2 = 3z^2$, kar nam skupaj z zvezo $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ da $x = \pm 1/\sqrt{3}$, $y = \pm 1/\sqrt{6}$, $z = \pm 1/3$ in $f(x, y, z) = \pm 1/(9\sqrt{2})$. Obe vrednosti sta tudi dejansko doseženi, torej je minimum funkcije na celotnem območju enak $-1/(9\sqrt{2})$, maksimum pa $1/(9\sqrt{2})$.

43. Iz parcialnih odvodov:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

dobimo, da je v notranjosti ekstrem dosežen kvečjemu tam, kjer je $x = 0$. Tam je $f(x, y) = 0$. Za iskanje ekstremov na robu je najugodneje, če vse izrazimo z y:

$$z = f(x, y) = \bigl(1 - (y-2)^2\bigr)y = -y^3 + 4y^2 - 3y$$

Poiskati moramo stacionarne točke te funkcije za $1 \le y \le 3$. Iz $\mathrm{d}z/\mathrm{d}y = -3y^2 + 8y - 3$ dobimo $y = (4 \pm \sqrt{7})/3$. Ker mora biti $1 \le y \le 3$, v poštev pride le $y = (4 + \sqrt{7})/3$. Za to vrednost spremenljivke y je $z = (20 + 14\sqrt{7})/27$.

Minimum naše funkcije je torej 0, maksimum pa $(20 + 14\sqrt{7})/27 \doteq 2{\cdot}113$.

44. Iščemo maksimum prostornine:

$$V = (a - 2x)(b - x)x = abx - ax^2 - 2bx^2 + 2x^3$$

pri pogojih $ab = S$, $x \ge 0$, $x \le a/2$, $x \le b$. Dano območje žal ni omejeno, zato se bomo morali za korektno izpeljavo maksimuma malo bolj potruditi.

Očitno na vsem območju $V \ge 0$. Pokažimo, da se prostornina bliža nič, brž ko gre ena od spremenljivk čez vse meje. To se lahko zgodi le z a in b. Ker je $x \le a/2$, je $V \le a^2b/2 \le S^2/(2a)$, zato gre V proti nič, ko gre a čez vse meje. Iz $x \le b$ pa dobimo $V \le ab^2 \le S^2/b$, torej gre V proti nič, tudi ko gre b čez vse meje. Od tod sledi, da V na območju zagotovo doseže maksimum in to se zgodi bodisi na robu bodisi v stacionarni točki. Toda na robu (t. j. za $x = 0$, $a = a/2$ ali $x = b$) je $V = 0$, v notranjosti pa je $V > 0$. Zato je maksimum zagotovo dosežen v neki stacionarni točki v notrajnosti. Tam pa nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

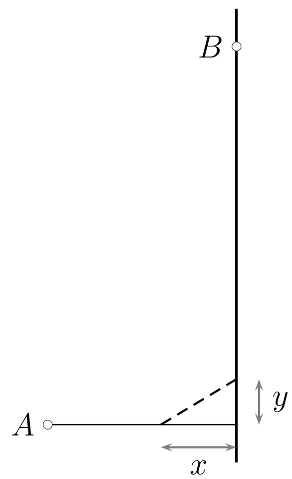
$$F = abx - ax^2 - 2bx^2 + 2x^3 - \lambda ab\,,$$

ki ima parcialne odvode:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = bx - x^2 - b\lambda\,, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = ax - 2x^2 - a\lambda\,, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = ab - 2ax - 4bx + 6x^2\,.$$

Iz prvih dveh odvodov ob upoštevanju, da je $a, b > 0$, dobimo $\lambda = 1 - x^2/b = 1 - 2x^2/a$. Ker je tudi $x > 0$, od tod sledi $a = 2b$. Ko to vstavimo v $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, po ureditvi dobimo $(b-x)(b-3x) = 0$. Ker mora biti $x < b$, je edina možnost $b = 3x$. Maksimum torej nastopi pri $a : b : x = 6 : 3 : 1$.

45. Smiselno se je najprej nekaj časa voziti po lokalni cesti, nato po potrebi zaviti v puščavo in se voziti naravnost do točke, kjer se priključimo na glavno cesto, po kateri nadaljujemo do cilja. Označimo z x razdaljo od križišča cest do točke, kjer smo zavili z lokalne ceste, z y pa razdaljo od križišča do točke, kjer smo prišli na glavno cesto. Tedaj je čas, ki ga potrebujemo od A do B, enak:



$$t = \frac{5-x}{50} + \frac{10-y}{80} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{40}\,.$$

Iščemo minimum te spremenljivke na območju, določenem s pogojema $0 \le x \le 5$ in $0 \le y \le 10$. Vrednosti spremenljivke t v ogliščih so prikazane v naslednji tabeli:

x	y	t
0	0	0˙225
0	10	0˙35
5	0	0˙25
5	10	0˙280

V primerih, ko je $x = 0$ in $y = 10$ ali pa $x = 5$ in $y = 0$, je jasno, da minimum ne more biti dosežen, saj se vozimo po puščavi vzdolž ceste. Splošneje, brž ko izberemo $x = 0$ ali $y = 0$, morata biti obe spremenljivki enaki 0.

Pri robovih območja torej preostaneta le primera, ko je $x = 5$ ali pa $y = 10$. Če je $x = 5$, je:

$$t = \frac{10-y}{80} + \frac{\sqrt{25+y^2}}{40}\,, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = -\frac{1}{80} + \frac{y}{40\sqrt{25+y^2}}\,.$$

Odvod je enak 0 pri $y = \pm 5/\sqrt{3} \doteq \pm 2\text{˙}89$. Znotraj definicijskega območja je le pozitivna rešitev in tam je $t \doteq 0\text{˙}233$.

Za $y = 10$ pa dobimo:

$$t = \frac{5-x}{50} + \frac{\sqrt{x^2+100}}{40}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = -\frac{1}{50} + \frac{x}{40\sqrt{x^2+100}}$$

in odvod je enak 0 pri $x = \pm 40/3 \doteq \pm 13\text{˙}3$, kar je izven definicijskega območja.

Oglejmo si še notranjost. Tam velja:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{1}{50} + \frac{x}{40\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{1}{80} + \frac{y}{40\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Parcialna odvoda sta enaka nič, če je:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4}{5}\,, \qquad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\,.$$

Če enačbi kvadriramo in seštejemo, dobimo $\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{89}{100}$, kar je protislovje. V notranjosti torej ni stacionarnih točk.

Ko primerjamo vrednosti spremenljivke t v vseh kandidatih za ekstrem, dobimo, da minimum nastopi pri $x = y = 0$. Z drugimi besedami, najbolj se splača držati cest, ne splača se iti povprek čez puščavo.

Če so razmerja med hitrostmi drugačna, se vožnja povprek čez puščavo vendar lahko splača. V splošnem se lahko pri iskanju optimalne strategije omejimo na naslednje primere:

- peljemo se le po cestah in nič čez puščavo;
- takoj na začetku zavijemo v puščavo in se nekje pred ciljem (ali pa na cilju) priključimo na glavno cesto;
- nekaj časa se vozimo po lokalni cesti, nato zavijemo v puščavo in se po njej vozimo naravnost do cilja.

46. Zlahka izračunamo, da mora v dani točki veljati $z = 1$ in $w = 4$. Od tod naprej gre lahko na vsaj dva načina.

Prvi način: najprej spremenljivki x in y odvajamo po z in w:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1+w^2}{z}\,, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = 2w\ln z\,, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 3z^2 + w\,, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = z\,.$$

Pri $x = 0$ in $y = 5$ oz. $z = 1$ in $w = 4$ torej velja:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/17 & 0 \\ -7/17 & 1 \end{bmatrix}.$$

Drugi način: dani sistem odvajamo po x in y:

$$\begin{aligned} 2w\ln z\,\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1+w^2}{z}\,\frac{\partial z}{\partial x} &= 1 & \qquad 2w\ln z\,\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1+w^2}{z}\,\frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\ 3z^2\,\frac{\partial z}{\partial x} + w\,\frac{\partial z}{\partial x} + z\,\frac{\partial w}{\partial x} &= 0 & \qquad 3z^2\,\frac{\partial z}{\partial y} + w\,\frac{\partial z}{\partial y} + z\,\frac{\partial w}{\partial y} &= 1\,, \end{aligned}$$

nakar vstavimo $z = 1$ in $w = 4$:

$$17\,\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad\qquad 17\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$7\,\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad\qquad 7\,\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 1\,,$$

od koder sledi $\frac{\partial z}{\partial x} = 1/17$, $\frac{\partial w}{\partial x} = -7/17$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ in $\frac{\partial w}{\partial y} = 1$.

Približna rešitev sistema za $x = 0\text{'}17$ in $y = 5\text{'}1$ je:

$$z \approx 1 + \frac{1}{17} \cdot 0\text{'}17 + 0 \cdot 0\text{'}1 = 1\text{'}01\,, \qquad w \approx 4 - \frac{7}{17} \cdot 0\text{'}17 + 1 \cdot 0\text{'}1 = 4\text{'}03\,.$$

Točen rezultat: $z \doteq 1\text{'}09909$, $w \doteq 4\text{'}030045$.

47. Z reševanjem in zaporednim odvajanjem dobimo:

V splošnem:	Pri $x = 0$:
$y^5 + xy = 32$	$y = 2$
$5y^4y' + y + xy' = 0$	$y' = -\frac{1}{40}$
$20y^2(y')^2 + 5y^4y'' + 2y' + xy'' = 0$	$y'' = -\frac{1}{1600}$

Taylorjev razvoj je torej:

$$y = 2 - \frac{x}{40} - \frac{x^2}{3200} + R_2\,.$$

Za $x = 1$ dobimo $y \approx 1\text{'}9746875$. Točen rezultat: $1\text{'}9746836$.

48. Pri $x = y = 0$ je $z = 1$. S parcialnim odvajanjem enačbe po x in y (pri čemer je z njuna funkcija) dobimo:

$$e^{xz}\left(z + x\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial z}{\partial x} = 0\,, \qquad e^{xz}\,x\,\frac{\partial z}{\partial y} - 1 - \frac{\partial z}{\partial y} = 0\,.$$

Ko vstavimo $x = y = 0, z = 1$, dobimo $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$. Z uporabo totalnega diferenciala (ali, ekvivalentno, Taylorjevega razvoja prvega reda) dobimo, da pri $x = 0\text{'}1, y = 0\text{'}2$ približno velja $z = 0\text{'}9$.

Točen rezultat: $0\text{'}8934588$.

49. Pri $x = 0$ in $z > 0$ je $y = 2$ in $z = 3$. Z odvajanjem sistema po x (pri čemer sta y in z funkciji te spremenljivke) dobimo:

$$3y^2y' + z^2 + 2xzz' = 0\,,$$
$$y^2 + 2xyy' + 2zz' = 0\,.$$

Ko vstavimo $x = 0$, $y = 2$ in $z = 2$, dobimo $y' = -3/4$ in $z' = -2/3$. Z uporabo totalnega diferenciala (ali, ekvivalentno, Taylorjevega razvoja prvega reda) dobimo, da pri $x = 0\text{'}1$ približno velja $y = 1\text{'}925$ in $z \doteq 2\text{'}933$.

Točen rezultat: $y \doteq 1\text{'}925336$, $z \doteq 2\text{'}937568$.

50. Ko osnovno zvezo odvajamo po x in y, dobimo:

$$e^{xz}\left(z + x\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) - y - \frac{\partial z}{\partial x} = 0\,,$$
$$e^{xz}\,x\,\frac{\partial z}{\partial y} - x - \frac{\partial z}{\partial y} = 0\,.$$

Če zdaj sem vstavimo $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ter upoštevamo še osnovno zvezo, dobimo $x = 0, y = -2, z = -2$. Zdaj pa odvoda osnovne zveze še enkrat odvajamo po x in y. Dobimo:

$$e^{xz}\left(\left(z + x\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2\,\frac{\partial z}{\partial x} + x\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0\,,$$
$$e^{xz}\left(x\,\frac{\partial z}{\partial y}\left(z + x\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial z}{\partial y} + x\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) - 1 - \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0\,,$$
$$e^{xz}\left(\left(x\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + x\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,.$$

Ko vstavimo $x = 0, y = -2, z = 1, \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, dobimo:

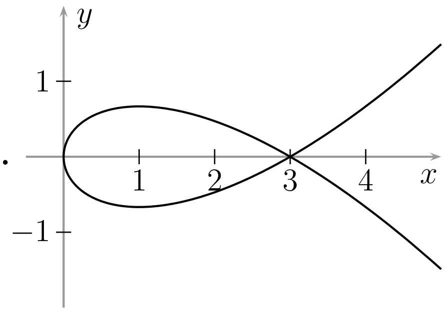
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4\,, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -1\,, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,,$$

od koder sledi, da v edini stacionarni točki $T(0, -2, -2)$ spremenljivka z nima lokalnega ekstrema.

5. Krivulje

1. To je polkrožnica $y = \sqrt{1-x^2}$; $-1 \le x \le 1$.

2.



t	$\sqrt{3}$	0
α	$-\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{2}$
Tangenta	$Y = -\dfrac{X-3}{\sqrt{3}}$	$X = 0$
Normala	$Y = \sqrt{3}(X-3)$	$Y = 0$

3. $\alpha = t + \frac{\pi}{4}$.
Naravni parameter: $s = \sqrt{2}\,e^t$, $\quad \alpha = \ln s - \dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{\pi}{4}$, $\quad \alpha' = \dfrac{1}{s}$.
Pri $t = 0$ je $\kappa = \sqrt{2}/2$ in $\rho = \sqrt{2}$.

4. Ukrivljenost je enaka $\kappa = -\dfrac{16x}{(x^2+4)^2}$ in v točki $T\left(1, -\frac{1}{8}\right)$ je to enako $-\frac{16}{25}$. Normalni vektor je $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, pritisnjena krožnica pa ima enačbo:

$$\left(X - \frac{31}{16}\right)^2 + \left(Y + \frac{11}{8}\right)^2 = \frac{625}{256}\,.$$

Iz odvoda ukrivljenosti $\dfrac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}x} = \dfrac{32x(3x^2-4x)}{(x^2+4)^3}$ dobimo, da je ukrivljenost po absolutni vrednosti največja pri $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. Ukrivljenost je enaka $\kappa = -\dfrac{2}{(1+t^2)^2}$, krivinski polmer pa $\rho = \dfrac{(1+t^2)^2}{2}$. Minimalni krivinski polmer je torej $1/2$.

6. Sistem najprej preoblikujemo v:

$$y^2 = 4 - x^2 - z^2 = 2x - x^2\,,$$

od koder sledi parametrizacija:

$$x = \frac{4-z^2}{2}\,, \quad y = \frac{\pm\sqrt{4z^2-z^4}}{2}\,; \quad -2 \le z \le 2\,.$$

Pri $z = 1$ in $y < 0$ je $x = 3/2$ in $y = -\sqrt{4z^2-z^4}/2 = -\sqrt{3}/2$. Velja še:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = -z = -1\,, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \frac{z^3-2z}{\sqrt{4z^2-z^4}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Tangentni vektor: $\vec{t} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/\sqrt{7} \\ -1/\sqrt{7} \\ \sqrt{3}/\sqrt{7} \end{bmatrix}$

(nasprotno orientirana parametrizacija pa bi dala nasproten tangentni vektor).

Tangenta (v implicitni obliki):

$$\frac{3}{2} - X = -Y\sqrt{3} - \frac{3}{2} = Z - 1\,.$$

Opomba. Možna je tudi parametrizacija:

$$x = 1 + \cos t\,, \quad y = \sin t\,, \quad z = 2\sin\frac{t}{2}$$

(to opiše celo krivuljo, brž ko t preteče interval dolžine 4π; ko t preteče interval $[0, 2\pi]$, dobimo zgornji del krivulje ($z \geq 0$), ko pa t preteče interval $[2\pi, 4\pi]$, dobimo spodnji del krivulje ($z \leq 0$).

7. Ker sta $\vec{v}(t)$ in $\vec{v}(s)$ enotska vektorja, velja $\varphi(t,s) = \arccos\big\langle \vec{v}(t), \vec{v}(s)\big\rangle$. Če s φ_s označimo parcialni odvod funkcije φ po drugi spremenljivki, po pravilih za odvajanje dobimo:

$$\varphi_s(t,s) = -\frac{\big\langle \vec{v}(t), \dot{\vec{v}}(s)\big\rangle}{\sqrt{1 - \big\langle \vec{v}(t), \vec{v}(s)\big\rangle^2}}\,.$$

Toda pri $s = t$ dobimo nedoločenost oblike $0/0$, saj iz $\big\langle \vec{v}(t), \vec{v}(t)\big\rangle = 1$ po odvajanju dobimo:

$$\big\langle \vec{v}(t), \dot{\vec{v}}(t)\big\rangle = 0\,. \tag{$*$}$$

To se lahko zgodi, ker je točka $\big\langle \vec{v}(t), \vec{v}(t)\big\rangle = 1$ na desnem robu definicijskega območja funkcije arkus kosinus in tam ta funkcija nima niti levega odvoda. Namesto desnega parcialnega odvoda $\varphi_s^{\downarrow}$ po drugi spremenljivki v točki (t,t) gremo računat limito:

$$\lim_{s\downarrow t} \varphi_s(t,s) = -\lim_{s\downarrow t} \frac{\big\langle \vec{v}(t), \dot{\vec{v}}(s)\big\rangle}{\sqrt{1 - \big\langle \vec{v}(t), \vec{v}(s)\big\rangle^2}}\,.$$

Izkaže se, da se splača računati limito kvadrata in da lahko pri le-tej nastavimo kar obojestransko limito, pri kateri uporabimo L'Hospitalovo pravilo. Zaradi nazornosti najprej privzemimo, da je funkcija $\vec{v}$ dvakrat zvezno odvedljiva. Tedaj dobimo:

$$\lim_{s\to t}\big(\varphi_s(t,s)\big)^2 = -\lim_{s\to t} \frac{\big\langle \vec{v}(t), \dot{\vec{v}}(s)\big\rangle \big\langle \vec{v}(t), \ddot{\vec{v}}(s)\big\rangle}{\big\langle \vec{v}(t), \vec{v}(s)\big\rangle \big\langle \vec{v}(t), \dot{\vec{v}}(s)\big\rangle} = -\big\langle \vec{v}(t), \ddot{\vec{v}}(t)\big\rangle\,.$$

Toda če odvajamo zvezo ($*$), dobimo $-\big\langle \vec{v}(t), \ddot{\vec{v}}(t)\big\rangle = \big\langle \dot{\vec{v}}(t), \dot{\vec{v}}(t)\big\rangle = \|\dot{\vec{v}}(t)\|^2$. Zdaj moramo prvotno limito le še koreniti. Ker je funkcija $s \mapsto \varphi(t,s)$ povsod zvezna in zvezno odvedljiva povsod, kjer je $\varphi(t,s) \neq 0$, iz zgornje izpeljave sledi:

$$\lim_{s\downarrow t} \varphi_s(t,s) = \pm\|\dot{\vec{v}}(t)\|\,.$$

Nadalje, ker je funkcija φ zvezna, sledi:

$$\varphi_s^{\downarrow}(t,s) = \pm\|\dot{\vec{v}}(t)\| \,.$$

Končno, ker je vedno $\varphi(t,s) \geq 0$ in $\varphi(t,t) = 0$, je $\varphi_s^{\downarrow}(t,s) \geq 0$, torej $\varphi_s^{\downarrow}(t,t) = \|\dot{\vec{v}}(t)\|$. Za levi odvod pa dobimo $\varphi_s^{\uparrow}(t,t) = -\|\dot{\vec{v}}(t)\|$.

Za splošni primer, ko privzamemo le odvedljivost v t, je potrebnih več neposrednih manipulacij. Najprej opazimo, da je:

$$\varphi(t,s) = \arcsin\sqrt{1 - \langle \vec{v}(t), \vec{v}(s)\rangle^2} \,.$$

Izražava s funkcijo arcsin se splača, ker je ta funkcija odvedljiva v $\sqrt{1 - \langle \vec{v}(t), \vec{v}(t)\rangle^2} = 0$, medtem ko funkcija arccos ni odvedljiva v $\langle \vec{v}(t), \vec{v}(t)\rangle = 1$. Po verižnem pravilu je:

$$\begin{aligned}
\varphi_s^{\downarrow}(t,s) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \langle \vec{v}(t), \vec{v}(t)\rangle^2)}} \, \frac{\mathrm{d}^{\downarrow}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=t} \sqrt{1 - \langle \vec{v}(t), \vec{v}(t)\rangle^2} = \\
&= \lim_{h\downarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \langle \vec{v}(t), \vec{v}(t+h)\rangle^2}}{h} = \\
&= \lim_{h\downarrow 0} \frac{\sqrt{(1 + \langle \vec{v}(t), \vec{v}(t+h)\rangle)(1 - \langle \vec{v}(t), \vec{v}(t+h)\rangle)}}{h} = \\
&= \sqrt{2} \lim_{h\downarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \langle \vec{v}(t), \vec{v}(t+h)\rangle}}{h} \,,
\end{aligned}$$

kjer smo z $\mathrm{d}^{\downarrow}/\mathrm{d}s$ označili desni odvod po s. Nadalje opazimo:

$$1 - \langle \vec{v}(t), \vec{v}(t+h)\rangle = \frac{1}{2}\Big(\langle \vec{v}(t), \vec{v}(t)\rangle - \langle \vec{v}(t), \vec{v}(t+h)\rangle + \langle \vec{v}(t+h), \vec{v}(t+h)\rangle - \langle \vec{v}(t), \vec{v}(t+h)\rangle\Big) = \frac{\langle \vec{v}(t+h) - \vec{v}(t), \vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)\rangle}{2} \,.$$

Torej velja:

$$\varphi_s^{\downarrow}(t,s) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\sqrt{\langle \vec{v}(t+h) - \vec{v}(t), \vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)\rangle}}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \sqrt{\left\langle \frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h}, \frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h} \right\rangle} = \sqrt{\langle \dot{\vec{v}}(t), \dot{\vec{v}}(t)\rangle} = \|\dot{\vec{v}}(t)\| \,.$$

Pri levem odvodu velja enak premislek, le da je tokrat (ker je $h \leq 0$):

$$\frac{\sqrt{\langle \vec{v}(t+h) - \vec{v}(t), \vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)\rangle}}{h} = -\sqrt{\left\langle \frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h}, \frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h} \right\rangle} \,.$$

in zato $\varphi_s^{\uparrow}(t,s) = -\|\dot{\vec{v}}(t)\|$.

8. Vsi možni naravni parametri: $s = \pm\left(\dfrac{t^3}{3} + 2t\right) + C$. Velja:

$$\begin{aligned}
u &= t^6 + 4t^4 + 4t^2 \,, \\
u' &= \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \pm\frac{6t^5 + 16t^3 + 8t}{t^2 + 2} \,, \\
u'' &= \frac{\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{18t^6 + 76t^4 + 88t^2 + 16}{(t^2 + 2)^3} \,.
\end{aligned}$$

V izhodišču je $t = 0$ in $u'' = 2$.

9. a) $s = \sqrt{3}\, e^t$.

b) $\vec{t} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t, 1)$,

$\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t - \sin t, \cos t - \sin t, 0)$,

$\vec{b} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sin t - \cos t, -\sin t - \cos t, 2)$,
$\kappa = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\, e^{-t}$, $\omega = \dfrac{e^{-t}}{3}$.
c) Tangenta: $X = 1 = Y = Z - 1$.
Glavna normala: $-(X - 1) = Y, Z = 1$.
Binormala: $-X - 1 = Y = -\frac{1}{2}(Z - 1)$.
Normalna ravnina: $X + Y + Z = 2$.
Rektifikacijska ravnina: $-X + Y = -1$.
Pritisnjena ravnina: $X + Y - 2Z = -1$.

10. a) $\vec{t} = \dfrac{(t^2, t, 1)}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \operatorname{sgn} t$, $\quad \vec{b} = \dfrac{(-1, 2t, -t^2)}{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}$,
$\vec{n} = \dfrac{(t^3 + 2t, -t^4 + 1, -2t^3 - t)}{\sqrt{t^8 + 5t^6 + 6t^4 + 5t^2 + 1}} \operatorname{sgn} t$,
$\kappa = \dfrac{1}{|t|}\sqrt{\dfrac{t^4 + 4t^2 + 1}{(t^4 + t^2 + 1)^3}}$, $\quad \omega = -\dfrac{2}{t(t^4 + 4t^2 + 1)}$.
b) Tangenta: $X - \frac{1}{4} - Y - \frac{1}{3} = Z - \frac{1}{2}$.
Binormala: $X - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\big(Y - \frac{1}{3}\big) = Z - \frac{1}{2}$.
Glavna normala: $X - \frac{1}{4} = -\big(Z - \frac{1}{2}\big)$, $Y = \frac{1}{3}$.
Normalna ravnina: $X + Y + Z = \frac{13}{12}$.
Pritisnjena ravnina: $-X + 2Y - Z = -\frac{1}{12}$.
Rektifikacijska ravnina: $Z - X = \frac{1}{4}$.

11. Sistem najprej zapišemo v obliki:

$$y^2 = 1 - x^2 - z^2 = z - x^2 + x\,,$$

od koder dobimo parametrizacijo:

$$x = 1 - z - z^2\,, \quad y = \pm\sqrt{2z - 2z^3 - z^4}\,; \qquad 2z - 2z^2 - z^4 \geq 0\,.$$

Pri $y < 0$ je seveda $y = -\sqrt{2z - 2z^3 - z^4}$. Po odvajanju in vstavljanju $z = 1/2$ dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = -1 - 2z = -2\,, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \frac{2z^3 + 3z^2 - 1}{\sqrt{2z - 2z^3 - z^4}} = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} = 1\,.$$

Če torej s piko označimo odvod po parametru z, je $\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Po ponovnem odvajanju dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2} = -2\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2} = \frac{(6z^2 + 6z)}{\sqrt{2z - 2z^3 - z^4}} + \frac{(2z^3 + 3z^2 - 1)^2}{(2z - 2z^2 - z^4)^{3/2}} = \frac{18}{\sqrt{11}}\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}z^2} = 0\,,$$

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 18/\sqrt{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sledi:

$$\|\dot{\vec{r}}\| = \sqrt{5}\,, \quad \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -18/\sqrt{11} \\ -2 \\ -36/\sqrt{11} \end{bmatrix}\,, \quad \|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = \frac{2\sqrt{449}}{\sqrt{11}}\,,$$

$$\kappa = \frac{2\sqrt{449}}{5\sqrt{55}} \doteq 1{\cdot}14\,.$$

6. Ploskve

1. a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

b) To je zgornja enotska polsfera.

c) Kot med koordinatnima krivuljama je kot med tangentnima vektorjema, tangentni vektor na koordinatno krivuljo pa ima isto smer kot parcialni odvod vektorja $\vec{r}$ po tistem parametru, ki se spreminja. Ker je:

$$\vec{r}_u = \left(\cos v, \sin v, -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right), \quad \vec{r}_v = \bigl(-u \sin v, u \cos v, 0\bigr) \quad \text{in} \quad \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle = 0\,,$$

so koordinatne krivulje povsod pravokotne.

d) Velja:

$$x = \cos t \cos(w + t)\,,\ y = \cos t \sin(w + t)\,,\ z = \sin t\,,$$

torej lahko vsakemu paru (u, v) priredimo nov par (t, w) po predpisu $t = \arccos u$, $w = v - \arccos u$, pri čemer ostanemo v isti točki. Z drugimi besedami, vsaka točka na prvotni ploskvi se ujema z neko točko na novi ploskvi, ki ni nič drugega kot enotska sfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

e) Kot med koordinatnima krivuljama je kot med odvodoma $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$. Računajmo:

$$\vec{r}_t = \bigl(-\sin t \cos(w + t) - \cos t \sin(w + t), -\sin t \sin(w + t) + \cos t \cos(w + t), \cos t\bigr)\,,$$
$$\vec{r}_w = \bigl(-\cos t \sin(w + t), \cos t \cos(w + t), 0\bigr)$$

in

$$\langle \vec{r}_t, \vec{r}_w \rangle = \cos^2 u\,, \quad \|\vec{r}_t\| = \sqrt{1 + \cos^2 w}\,, \quad \|\vec{r}_w\| = |\cos w|\,.$$

Če torej s φ označimo kot med koordinatnima krivuljama, velja:

$$\cos \varphi = \frac{|\cos t|}{\sqrt{1 + \cos t}}\,.$$

V naši točki $\bigl(1/2, \sqrt{3}/2, 0\bigr)$ je $u = 0$ in $v = \pi/3$, od koder sledi $\cos \varphi = \sqrt{2}/2$, torej je kot enak 45°.

f) Nove koordinatne krivulje so pravokotne kvečjemu tam, kjer je $\cos t = 0$, t. j. na polih. Toda tam je $\vec{r}_w = 0$ in kot med koordinatnima krivuljama ni definiran (skozi pola gre celo več koordinatnih krivulj iste vrste).

2. $z = 7, \quad \vec{N} = \frac{1}{3}(-2, 2, 1), \quad \dfrac{X - 1}{-2} = \dfrac{Y - 3}{2} = \dfrac{Z - 7}{1}.$

3. $z = 1, \quad X - 3Y - Z + 1 = 0.$

4. a) Iz:

$$\vec{r}_u = \begin{bmatrix} \cos v \\ 2u \sin v \\ 3u^2 - 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_v = \begin{bmatrix} -u \sin v \\ u^2 \cos v \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle = (2u^3 - u) \sin v \cos v$$

dobimo, da so koordinatne krivulje pravokotne, če je $u = \pm\sqrt{2}/2$ ali pa $v = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Velja $\vec{r} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 3\sqrt{3}/2 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $\vec{r}_u = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\vec{r}_v = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{bmatrix} -12 \\ -12 \\ 21/4 \end{bmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} -16 \\ -16 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Tangentna ravnina: $-16X - 16Y + 7Z + 18\sqrt{3} = 0$.

5. Elipsoid razdelimo na dve polovici, od katerih lahko vsako zapišemo v eksplicitni obliki:

$$\vec{r} = \left(x, y, \pm\sqrt{36 - x^2 - 4y^2}\right).$$

Velja:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mp\frac{x}{\sqrt{36 - x^2 - 4y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \mp\frac{4y}{\sqrt{36 - x^2 - 4y^2}},$$

torej mora biti normalni vektor dane ravnine, t. j. $(1, 1, -1)$, vzporeden vektorju:

$$\left(\pm\frac{x}{\sqrt{36 - x^2 - 4y^2}}, \pm\frac{4y}{\sqrt{36 - x^2 - 4y^2}}, 1\right),$$

to pa se zgodi v točki $T_1(4, 1, -4)$ na spodnji polovici elipsoida in v točki $T_2(-4, -1, 4)$ na zgornji polovici. Od tod dobimo tangentni ravnini $X + Y - Z = 9$ in $X + Y - Z = -9$.

6. a) Najprej iz $x = 2$ sledi $u \cos v = 1$, nato pa iz $y = 1$ dobimo še $u \sin v = 0$. Ker je $u \cos v = 1$, je $u \neq 0$, torej je $\sin v = 0$, torej $\cos v = 1$ in $u = 1$, zato je $z = u^2 = 1$. Točka $T(2, 1, 1)$ je dosežena pri $u = 1$ in $v = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) *Prvi način*: vektor $\vec{w}$ bo tangenten na ploskev natanko tedaj, ko bo pravokoten na normalni vektor $\vec{N}$ oziroma natanko tedaj, ko bo pravokoten na vektor $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ (če je slednji seveda neničeln). Iz prvih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_u = \begin{bmatrix} 2\cos v \\ \cos v + \sin v \\ 2u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_v = \begin{bmatrix} -2u \sin v \\ u(\cos v - \sin v) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, torej je $\vec{w}$ tangenten na ploskev natanko tedaj, ko je $t = 2$.

Drugi način: vektor $\vec{w}$ bo tangenten na ploskev natanko tedaj, ko bo $\vec{w} = \alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v$ za neka $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Iz prvih parcialnih odvodov (glej prvi način) dobimo $\alpha = 1$, $\beta = -2$ in $t = 2$.

c) Koeficienti prve fundamentalne forme so v naši točki enaki:

$$E = 9, \quad F = 1, \quad G = 1$$

in koeficient pri diferencialu ploščine je enak $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{8}$. Nadalje iz drugih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_{uu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{uv} = \begin{bmatrix} -2\sin v \\ \cos v - \sin v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{vv} = \begin{bmatrix} -2u\cos v \\ -u(\sin v + \cos v) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo še koeficiente druge fundamentalne forme:

$$L = \sqrt{2}\,, \quad M = 0\,, \quad N = \sqrt{2}\,.$$

Ukrivljenost normalnega preseka v smeri vektorja $\vec{v}$ je enaka $-5\sqrt{2}/9$.

d) Iz:

$$\det\left(\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\right) = 8\lambda^2 - 10\sqrt{2}\,\lambda + 2$$

dobimo glavni ukrivljenosti $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\big(5 \pm \sqrt{17}\big)$.

Točka je eliptična.

Gaussova ukrivljenost: $1/4$.

Povprečna ukrivljenost: $5\sqrt{2}/8$.

7. Iz:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2y^2\,, & p &= 3\,, \\ f_y(x,y) &= 2x^3y\,, & q &= 2\,, \\ f_{xx}(x,y) &= 6xy^2\,, & r &= 6\,, \\ f_{xy}(x,y) &= 6x^2y\,, & s &= 6\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 2x^3\,, & t &= 2 \end{aligned}$$

dobimo $E = 10$, $F = 6$, $G = 5$, $EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2 = 14$,
$L = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$, $M = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$ in $N = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

Ker je $LN - M^2 = -12/7 < 0$, je točka hiperbolična.

Gaussova ukrivljenost: $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\dfrac{6}{49}$.

Povprečna ukrivljenost: $H = \dfrac{EN + GL - 2MF}{2(EG - F^2)} = -\dfrac{11}{14\sqrt{14}}$.

8. Iz $p = 2x + y$ in $q = x + 2y$ dobimo:

$$E = 1 + 4x^2 + 4xy + y^2\,, \quad F = 2x^2 + 5xy + 2y^2\,, \quad G = 1 + x^2 + 4xy + 4y^2\,,$$
$$EG - F^2 = 1 + 5x^2 + 8xy + 5y^2\,.$$

Nadalje iz $r = 2$, $s = 1$ in $t = 2$ dobimo:

$$L = \frac{2}{\sqrt{EG - F^2}}\,, \quad M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\,, \quad N = \frac{2}{\sqrt{EG - F^2}}\,.$$

Sledi $LN - M^2 = \dfrac{3}{1 + 5x^2 + 8xy + 5y^2}$, zato so vse točke eliptične. Točka bo krogelna, če bo $L = \lambda E$, $M = \lambda F$ in $N = \lambda G$ za neki λ, ki je enotna ukrivljenost v vseh smereh. Tak λ obstaja natanko tedaj, ko je:

$$1 + 4x^2 + 4xy + y^2 = 1 + x^2 + 4xy + 4y^2 = 4x^2 + 10xy + 4y^2 \,.$$

Prva enačba velja natanko tedaj, ko je $x = y$ ali $x = -y$. Če je $x = -y$, druga enačba ne more veljati, če pa je $x = y$, druga enačba velja za $x = \pm 1/3$. Krogelni točki sta torej $T_1\big(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\big)$ in $T_2\big(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\big)$. V obeh velja:

$$E = 2\,, \quad F = 1\,, \quad G = 2\,, \quad L = \frac{2}{\sqrt{3}}\,, \quad M = \frac{1}{\sqrt{3}}\,, \quad N = \frac{2}{\sqrt{3}}\,,$$

torej je ukrivljenost enaka $1/\sqrt{3}$.

9. Uporabimo izrek o implicitni funkciji in 50. nalogo iz 4. razdelka: tam je obravnavana ista zveza med koordinatami. Normala je vzporedna osi z natanko tam, kjer je $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Izračunali smo, da je to pri $x = 0, y = -2, z = -2$ in da tam velja:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4\,, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -1\,, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,,$$

Ker sta prva odvoda enaka nič, je $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $L = 4$, $M = -1$ in $N = 0$. Iz zveze:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$$

dobimo glavni ukrivljenosti $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$.

10. Najprej izračunajmo prvo in drugo fundamentalno formo:

$$\begin{gathered} p = 2x = -8\,, \quad q = 4y = 4\,, \quad r = 2\,, \quad s = 0\,, \quad t = 4\,, \\ E = 65\,, \quad F = -32\,, \quad G = 17\,, \quad EF - F^2 = 1 + p^2 + q^2 = 81\,, \\ L = \frac{2}{9}\,, \qquad M = 0\,, \qquad N = \frac{4}{9}\,. \end{gathered}$$

Normalna vektorja sta $\vec{N}_P = \frac{1}{9}(8, -4, 1)$ in $\vec{N}_\Pi = \frac{1}{3}(-2, -2, 1)$. Velja:

$$\vec{r}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{r}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\,,$$

torej vektor (α, β) v parametričnem prostoru določa tangentni vektor $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -8\alpha + 4\beta \end{bmatrix}$.

Ta je pravokoten na $\vec{N}_\Pi$, če je $\beta = 5\alpha$. Ukrivljenost normalnega preseka v smeri tangente na krivuljo, ki je presek dane ploskve in ravnine, je:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{2}{9}\alpha^2 + \frac{4}{9}\beta^2}{65\alpha^2 - 32\alpha\beta + 17\beta^2} = \frac{17}{495}\,.$$

Končno iz $\langle \vec{N}_P, \vec{N}_\Pi \rangle = -\frac{7}{27}$ izračunamo še ukrivljenost poševnega preseka:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{17}{495}}{\sqrt{1 - \left(\frac{7}{27}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{170}}{1100} \doteq 0\text{'}0356\,.$$

7. Integrali s parametrom

1. $F(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - 2x & ; x \le 0 \\ \frac{4}{3}x^2 - 2x + \frac{3}{2} & ; 0 \le x \le \frac{3}{2} \\ 2x - \frac{3}{2} & ; x \ge \frac{3}{2} \end{cases}$.

2. Velja:

$$J := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_x^{\sqrt{x}} \frac{e^{-y^2/x}}{y} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2ex} - \frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x^2} \int_x^{\sqrt{x}} y \, e^{-y^2/x} \, \mathrm{d}y \, .$$

S substitucijo $t = -y^2/x$ dobimo:

$$J = \frac{1}{2ex} - \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{2x} \int_{-x}^{-1} e^t \, \mathrm{d}t = -\frac{e^{-x}}{2x} \, .$$

3. Označimo:

$$F(x) = \int_{e^{1/(x+1)}}^{e^{2/(x+1)}} \frac{y^x}{\ln y} \, \mathrm{d}y \, .$$

Funkcija F je definirana in odvedljiva na $(-\infty, -1)$ in na $(-1, \infty)$. Iz:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{e^{2x/(x+1)}}{\frac{2}{x+1}} \frac{2\, e^{2/(x+1)}}{(x+1)^2} + \frac{e^{x/(x+1)}}{\frac{1}{x+1}} \frac{e^{1/(x+1)}}{(x+1)^2} + \int_{e^{1/(x+1)}}^{e^{2/(x+1)}} y^x \, \mathrm{d}y = \\ &= -\frac{e^2}{x+1} + \frac{e}{x+1} + \frac{y^{x+1}}{x+1} \bigg|_{e^{1/(x+1)}}^{e^{2/(x+1)}} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

sklepamo, da je F na vsakem izmed obeh prej omenjenih intervalov konstantna. Nadalje s substitucijo $z = 1/y$ dobimo:

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int_{e^{-1/(x+1)}}^{e^{-2/(x+1)}} \frac{z^{-x}}{-\ln z} \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \int_{e^{-1/(x+1)}}^{e^{-2/(x+1)}} \frac{z^{-x-2}}{\ln z} \, \mathrm{d}z = \int_{e^{1/(-x-2+1)}}^{e^{2/(-x-2+1)}} \frac{z^{-x-2}}{\ln z} \, \mathrm{d}z = \\ &= F(-x-2) \, . \end{aligned}$$

Ker preslikava $x \mapsto -x - 2$ ravno zamenja intervala $(-\infty, -1)$ in $(-1, \infty)$, mora biti prej omenjena konstanta enaka za oba intervala, torej je integral res neodvisen od x. Numerični izračuni pokažejo, da je (do zaokrožitvenih napak natančno) enak 3˙05912.

4. Ni težko preveriti, da je funkcija $a \mapsto d_2(f_a, f)$ zvezno odvedljiva na vsej realni osi in da gre proti neskončno, ki gre a proti neskončno ali minus neskončno. Zato bo minimum dosežen tam, kjer bo odvod enak nič. Velja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \int_0^1 (x^2 - 1 - ax)^2 \, \mathrm{d}x = -2 \int_0^1 x(x^2 - 1 - ax) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{2a}{3} \, ,$$

kar je enako nič pri $a = -3/4$. Tam je dosežena minimalna oddaljenost.

5. $x < 1$.

6. $x > 1$.

7. Povsod.

8. Nikjer.

9. $1 < x < 2$.

10. Povsod.

11. Nikjer.

12. $x > 1$.

13. $-1 < x < 1$.

14. $x = 0$ ali $x > 1$.

15. Nikjer.

16. Povsod.

17. $x \le 0$.

18. $x < 0$.

19. Nikjer.

20. $x < 0$.

21. $1 < x < 2$.

22. Integral konvergira za vsak x in je enak $\pi \operatorname{sgn}(x)$.
Rezultat ni zvezna funkcija, čeprav je integrand zvezna funkcija dveh spremenljivk. Toda integral ne konvergira enakomerno.

23. Pišimo $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin x}{x} \, \mathrm{d}x$. Integral konvergira za $a > 0$, zaradi zaprtosti definicijskega območja pa tudi za $a = 0$. Po odvajanju pod integralskim znakom dobimo:

$$F'(a) = -\int_0^\infty e^{-ax} \sin x \, \mathrm{d}x \,,$$

Iz nedoločenega integrala:

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, \mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \big(a \sin(bx) - b \cos(bx) \big) + C$$

dobimo:

$$F'(a) = -\frac{1}{a^2 + 1} \,.$$

Sledi:

$$F(a) = -\int \frac{\mathrm{d}a}{a^2+1} = -\operatorname{arctg} a + C\,.$$

Iz ocene $|\sin x| \le |x|$ sledi ocena:

$$|F(a)| \le \int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,,$$

iz katere sledi sledi $\lim_{a\to\infty} F(a) = 0$. Torej mora biti $C = \pi/2$, se pravi, da velja:

$$F(a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a = \operatorname{arcctg} a\,.$$

Sklep je pravilen za $a > 0$, zaradi zveznosti pa tudi za $a = 0$. Velja torej:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,.$$

24. Integral konvergira za vsak $a \in \mathbb{R}$ in je enak $\pi \operatorname{sgn}(x)$ (uvedemo substitucijo $a > 0$ in se skličemo na prejšnjo nalogo, pri čemer pazimo na predznak).

25. Integral konvergira za poljubna a in b. Za dokaz tega dejstva ga razdelimo na tri dele. Najprej iz zveznosti funkcije:

$$f(x,a,b) = \begin{cases} \big(\cos(bx) - \cos(ax)\big)/x^2 & ;\ x \ne 0 \\ (a^2 - b^2)/2 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$

dobimo, da lahko $\int_{-1}^1 \big(\cos(bx) - \cos(ax)\big)/x^2\,\mathrm{d}x$ obravnavamo kot klasični Riemannov integral. Konvergenco integralov $\int_{-\infty}^{-1} \big(\cos(bx) - \cos(ax)\big)/x^2\,\mathrm{d}x$ in $\int_1^\infty \big(\cos(bx) - \cos(ax)\big)/x^2\,\mathrm{d}x$ pa dobimo iz ocene $\big|\cos(bx) - \cos(ax)\big|/x^2 \le 2/x^2$ ter konvergence integralov $\int_{-\infty}^{-1} \mathrm{d}x/x^2$ in $\int_1^\infty \mathrm{d}x/x^2$. Označimo $F(a,b) := \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(bx)-\cos(ax)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ in za $a > 0$ izračunajmo:

$$\frac{\partial}{\partial a} F(a,b) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ax)}{x}\,\mathrm{d}x = \pi\,.$$

Račun je pravilen, brž ko je $b \ne 0$. Ker je $F(b,b) = 0$, mora biti:

$$F(a,b) = \pi\big(a - b\big)$$

za vse $a, b > 0$, zaradi zveznosti pa tudi za vse $a, b \ge 0$. Končno, ker je intergand sod v a in b, za vse $a, b \in \mathbb{R}$ velja:

$$F(a,b) = \pi\big(|a| - |b|\big)\,.$$

26. Integral obstaja za $a > 0$. Računajmo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a)^2} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{x^2+a} \, \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a} \, \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \frac{\pi}{\sqrt{a}} = \\ = \frac{\pi}{2a^{3/2}} \,.$$

27. $\dfrac{1}{x}$.

28. $8 \cdot 3! = 48$.

29. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}$.

30. $\Gamma\left(\dfrac{11}{2}\right) = \dfrac{945}{32} \sqrt{\pi}$.

31. $256 \, \mathrm{B}\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) = 32\pi$.

32. $\dfrac{1}{12} \, \mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{12}$.

33. $2 \, \mathrm{B}\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\pi}{8}$.

8. Dvojni in trojni integral

1. Integracijsko območje moramo najprej opredeliti s pogoji, ki jih dobimo tako, da enačbe spremenimo v neenačbe, to pa tako, da območje zadošča zahtevam iz besedila naloge. Za to imamo štiri možnosti, edina, ki zadošča zahtevam, pa je:

$$D = \left\{ (x, y) \; ; \; y > \frac{x}{2}, \; x > y^2 \right\} .$$

Prevedba na dvakratni integral gre lahko na dva načina.
Prvi način: pogoje zapišemo v obliki $0 < x < 4$, $x/2 < y < \sqrt{x}$. Dobimo:

$$\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^4 \left[x^2 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \right] \mathrm{d}x = \frac{124}{21} .$$

Drugi način: pogoje zapišemo v obliki $0 < y < 2$, $y^2 < x < 2y$. Dobimo:

$$\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (x^2 + y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^2 \left[\frac{8y^3 - y^6}{3} + y(2y - y^2) \right] \mathrm{d}y = \frac{124}{21} .$$

2. *Prvi način*:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^x xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^1 xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_2^3 \int_{x-2}^1 xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \\ &\qquad = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_1^2 x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_2^3 x \bigl(1 - (x-2)^2 \bigr) \, \mathrm{d}x = \\ &\qquad = \frac{5}{3} . \end{aligned}$$

Drugi način:

$$\int_0^1 \int_y^{y+2} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_0^1 y \bigl((y+2)^2 - y^2 \bigr) \, \mathrm{d}y = 2 \int_0^2 (y^2 + y) \, \mathrm{d}y = \frac{5}{3} .$$

3. Integral ne obstaja.

4. *Prvi način*:

$$\int_0^\infty \int_0^x e^{-x} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty x \, e^{-x} \, \mathrm{d}x = 1 .$$

Drugi način:

$$\int_0^\infty \int_y^\infty e^{-x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^\infty e^{-y} \, \mathrm{d}y = 1 .$$

5. Označimo iskani integral z J.

Prvi način:

$$J = \int_0^\infty \int_0^x y^{a-1} (x - y)^{b-1} \, \mathrm{d}y \, e^{-x} \, \mathrm{d}x .$$

S substitucijo $t = y/x$ v notranjem integralu dobimo:

$$J = \int_0^\infty x^{a+b-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, \mathrm{d}t = \Gamma(a+b)\, \mathrm{B}(a,b)\,.$$

Drugi način:

$$J = \int_0^\infty y^{a-1} \int_y^\infty (x-y)^{b-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

S substitucijo $t = x - y$ v notranjem integralu dobimo:

$$J = y^{a-1} \int_0^\infty t^{b-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t\, e^{-y}\, \mathrm{d}y = \Gamma(a)\, \Gamma(b)\,.$$

Dobili smo torej znano zvezo $\mathrm{B}(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

6. $\displaystyle\int_1^\infty \int_0^{y-1} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

7. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^\infty f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_1^\infty \int_{y-1}^\infty f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

8. $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$

9. $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^{-\sqrt{1-y}} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_0^1 \int_{\sqrt{1-y}}^1 f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$

10. $\displaystyle\int_0^2 \int_1^{e^y} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_2^\infty \int_{e^{y-2}}^{e^y} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$

11.
$$\begin{aligned}
&-\int_1^2 \int_2^{(y+3)/2} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \int_2^3 \int_x^{(y+3)/2} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_3^4 \int_{(y+3)/2}^x f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \\
&+ \int_4^5 \int_{(y+3)/2}^4 f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \\
&= -\int_1^2 \int_2^{(y+3)/2} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_2^4 \int_{(y+3)/2}^x f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_4^5 \int_{(y+3)/2}^4 f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

12. Velja $D = \{(x,y)\ ;\ y < x < 9y, 1 < xy < 4\}$. Označimo naš integral z I. Neposredna prevedba na dvakratni integral ni tako preprosta:

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \int_{1/x}^x x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x + \int_2^3 \int_{1/x}^{4/x} x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x + \int_3^6 \int_{x/9}^{4/x} x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \\
&= \int_1^2 (x^2 - 1)\, \mathrm{d}x + \int_2^3 3\, \mathrm{d}x + \int_3^6 \left(4 - \frac{x^2}{9}\right) \mathrm{d}x = \\
&= \frac{28}{3}\,.
\end{aligned}$$

S substitucijo:

$$u = xy, \quad v = \frac{x}{y}, \quad x = \sqrt{uv}, \quad y = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad J = -\frac{1}{2v}$$

pa dobimo:

$$I = \frac{1}{2} \iint_{\substack{1<u<4 \\ 1<v<9}} \sqrt{\frac{u}{v}} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{u} \, \mathrm{d}u \int_1^9 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v}} = \frac{28}{3} \,.$$

13. Območje lahko zapišemo v obliki:

$$D = \{(x, y) \; ; \, 1 \le e^{-x} \, y \le 3 \, , \; 1 \le e^{x} \, y \le 2\} \,.$$

S substitucijo:

$$\begin{gathered} u = e^x \, y \, , \quad v = e^{-x} \, y \, , \\ x = \frac{1}{2} \ln \frac{u}{v} \, , \quad y = \sqrt{uv} \, , \\ J = \frac{1}{2\sqrt{uv}} \end{gathered}$$

dobimo:

$$\iint_D \frac{1}{y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{\substack{1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 3}} \frac{1}{2uv} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u} \cdot \int_1^3 \frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\ln 2 \cdot \ln 3}{2} \,.$$

Opomba. Seveda lahko integral izračunamo tudi v kartezijskih koordinatah.

14. Označimo naš integral z I. S substitucijo:

$$u = (x + y)^2 \, , \quad v = x \, , \quad J = -\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

dobimo:

$$I = \iint_{\substack{v>0 \\ \sqrt{u}-v>0}} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_0^\infty \int_0^{\sqrt{u}} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \,.$$

15. Po uvedbi polarnih koordinat dobimo:

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{x,y>0 \\ x^2+y^2<4}} \frac{xy}{\bigl(1 + (x^2 + y^2)^2\bigr)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \iint_{\substack{0<r<2 \\ 0<\theta<\pi/2}} \frac{r^3 \cos\theta \sin\theta}{(1 + r^4)^2} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \\ &= \int_0^2 \frac{r^3 \, \mathrm{d}r}{(1 + r^4)^2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{1}{8} \int_1^{17} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \\ &= \frac{2}{17} \,. \end{aligned}$$

16. Če dano območje označimo z D, velja:

$$\operatorname{pl}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\substack{\pi/6<\theta<\pi/2 \\ r>0 \\ r^2<4\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Zadnji pogoj je ekvivalenten $r^2 < \sin(4\theta)$, kar pomeni, da mora biti $\sin(4\theta) > 0$, se pravi $\pi/6 < \theta < \pi/4$. Sledi:

$$\operatorname{pl}(D) = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\sin(4\theta)}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin(4\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{16}\,.$$

Do tega rezultata bi lahko prišli tudi z elementarno analizo, in sicer z uporabo formule za ploščino območja, podanega v polarnih koordinatah.

17. Polarne koordinate se tu splača prilagoditi integrandu. Vpeljemo:

$$x = r\cos\theta - 1\,, \quad y = r\cos\theta - 1\,, \quad J = r\,.$$

Če iskani integral označimo z I, dobimo:

$$I = \iint_{\substack{0\le\theta<2\pi \\ 0<r<2(\cos\theta+\sin\theta)}} r^2\,\mathrm{d}r\,.$$

Torej mora biti $\cos\theta+\sin\theta > 0$, kar je v okviru intervala $[0, 2\pi)$ res za $\theta \in \big[0, \frac{3\pi}{4}\big) \cup \big(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\big)$. Torej se interval $[0, 2\pi)$ splača zamenjati npr. z intervalom $\big[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\big)$. Sledi:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\substack{-\pi/4<\theta<7\pi/4 \\ 0<r<2(\cos\theta+\sin\theta)}} r^2\,\mathrm{d}r = \\
&= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos\theta+\sin\theta)^3\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \Big(\cos^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta + 3\cos\theta\sin^2\theta + \sin^3\theta\Big)\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \Big(\cos\theta + 2\cos^2\theta\sin\theta + 2\cos\theta\sin^2\theta + \sin\theta\Big)\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{8}{3}\left(\sin\theta - \frac{2\cos^3\theta}{3} + \frac{2\sin^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{3\pi/4} = \\
&= \frac{64\sqrt{2}}{9}\,.
\end{aligned}$$

18. Označimo naš integral z I. Po uvedbi polarnih koordinat dobimo:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/4} f(\operatorname{tg}\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} r\,\mathrm{d}r + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} f(\operatorname{tg}\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} r\,\mathrm{d}r + \\
&\qquad + \int_{3\pi/4}^{\pi} f(\operatorname{tg}\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} r\,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/4} f(\operatorname{tg}\theta)\,\frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{f(\operatorname{tg}\theta)}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_{3\pi/4}^{\pi} f(\operatorname{tg}\theta)\,\frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta}\,\mathrm{d}\theta\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{-1} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right] = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \min\left\{t^2, \frac{1}{t^2}\right\}\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

19. Pogoje za telo dobimo tako, da enačbe zamenjamo z neenačbami, pri čemer mora biti dobljena množica tudi pri strogih neenakostih neprazna in omejena. Pri zadnjih dveh enačbah je edina možnost $y > 1 - x^2$ in $y < 2 - 2x^2$, saj je v vseh ostalih treh primerih x lahko poljubno negativen in ne glede na to, kako postavimo neenačaja v prvih dveh zvezah, bodisi za vse x obstajata primerna y in z bodisi ne obstajata za noben x. Tako je množica, ki jo dobimo, bodisi neomejena bodisi prazna. Pri $1 - x^2 < y < 2 - 2x^2$ pa velja $y > 0$ in tako je pri prvih dveh zvezah edina možnost, kjer dobimo neprazno in neomejeno množico, $z > 0$ in $z < y$. Telo je torej določeno z neenačbami:

$$1 - x^2 < y < 2 - 2x^2\,, \quad 0 < z < y\,.$$

in sledi:

$$V = \iint_{1-x^2<y<2-2x^2} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Zunanji dvojni integral lahko seveda prevedemo na dvakratnega, pri tem pa moramo opaziti še, da velja $-1 < x < 1$. Volumen je tako enak:

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{1-x^2}^{2-2x^2} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2\,\mathrm{d}x = 3\int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{5}\,.$$

20. Spet moramo postaviti ustrezna neenačaja. Če postavimo $2x + y > 4$, je lahko y poljubno velik in potem ne glede na to, kako postavimo neenačaj v zadnji zvezi, vedno obstajata tudi primerna x in z, torej je dobljena množica neomejena. Torej moramo postaviti $2x + y < 4$. Nadalje moramo zadnjo enačbo spremeniti v $z < 4 - x^2$, sicer bi bila dobljena množica spet neomejena. Telo je torej določeno z neenačbami:

$$x > 0\,, \quad 0 < y < 4 - 2x\,, \quad 0 < z < 4 - x^2\,,$$

torej je:

$$V = \iint_{\substack{x>0 \\ 0<y<4-2x}} \int_0^{4-2x} (4 - x^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Če želimo zunanji dvojni integral prevesti na dvakratnega, moramo zvezo $x > 0$ nadomestiti z močnejšo zvezo $0 < x < 2$. Tako dobimo:

$$V = \int_0^2 \int_0^{4-2x} (4 - x^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (4 - x^2)(4 - 2x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 (2 - x)^2(2 + x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Substitucija $t = 2 - x$ nam da:

$$V = \int_0^2 t^2(4 - t)\,\mathrm{d}t = \frac{40}{3}\,.$$

21. Tokrat bomo izračun volumna neposredno prevedli na trikratni integral. Pri pretvorbi neenačb v obliko, primerno za trikratni integral, začnemo z zadnjima dvema. Veljati mora $y^2 < 1 - x$. Od tod naprej gre na vsaj dva načina.

Prvi način: veljati mora $x < 1$ in $-\sqrt{1-x} < y < \sqrt{1-x}$. Tako dobimo naslednji ekvivalentni zapis neenačb, primeren za računanje volumna:

$$0 < x < 1\,, \quad -\sqrt{1-x} < y < \sqrt{1-x}\,, \quad y^2 < z < 1 - x\,,$$

od koder sledi:

$$V = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} (1 - x - y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_0^1 (1 - x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{15}\,.$$

Drugi način: neenačbo preoblikujemo v $x < 1 - y^2$. Skupaj s pogojem $x > 0$ je to možno le, če je $-1 < y < 1$. Tako dobimo zapis:

$$-1 < y < 1\,, \quad 0 < x < 1 - y^2\,, \quad y^2 < z < 1 - x\,,$$

iz katerega dobimo:

$$V = \int_{-1}^1 \int_0^{1-y^2} (1 - x - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1 - y^2)^2\,\mathrm{d}y = \frac{8}{15}\,.$$

22. Iz dejstva, da je $-b < t\cos\varphi < b$, razberemo množico, na kateri "temelji" torus:

$$\Delta = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\ ;\ 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le t < b\}\,.$$

To je seveda kolobar. Za točko iz kolobarja Δ s koordinatama r in θ mora koordinata z zadoščati zvezi $(r - a)^2 + z^2 = t^2$, od koder sledi $(r - a)^2 + z^2 < b^2$ oziroma $-\sqrt{b^2 - (r - a)^2} < z < \sqrt{b^2 - (r - a)^2}$. Ni težko preveriti, da tudi za vsak z s to lastnostjo obstajata ustrezna θ in φ. Ker je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, velja:

$$V = 2\iint_D \sqrt{b^2 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Z uvedbo polarnih koordinat dobimo:

$$V = 2\iint_{\substack{a-b<r<a+b\\ 0\le\theta<2\pi}} \sqrt{b^2 - (r - a)^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 4\pi\int_{a-b}^{a+b} \sqrt{b^2 - (r - a)^2}\,r\,\mathrm{d}r\,.$$

Uvedli bomo spremenljivko $t = b^2 - (r-a)^2$, a pri tem je potrebno integral razdeliti na dva dela. Velja:

$$\int_{a-b}^{a} \sqrt{b^2 - (r-a)^2}\, r \,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} \sqrt{t}\big(a - \sqrt{b^2 - t}\big)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{b^2 - t}}\,,$$
$$\int_{a}^{a+b} \sqrt{b^2 - (r-a)^2}\, r \,\mathrm{d}r = -\frac{1}{2}\int_{b^2}^{0} \sqrt{t}\big(a + \sqrt{b^2 - t}\big)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{b^2 - t}}\,,$$

Po zamenjavi mej in seštetju dobimo:

$$V = 2\pi \int_0^{b^2} \frac{a\sqrt{t}}{\sqrt{b^2 - t}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Z uvedbo še ene nove spremenljivke $u = t/b^2$ končno dobimo:

$$V = 2\pi a b^2 \int_0^1 u^{1/2}(1-u)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = 2\pi a b^2\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 2\pi^2 a b^2\,.$$

23. Najprej opazimo, da iz drugega pogoja sledi, da mora biti $x > 1$. Tedaj je $x^2 < y < x^3$ sledi tudi $y < xy$. Iskani integral je torej enak:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\substack{1<x<2\\ x^2<y<x^3}} \int_y^{xy} \frac{\mathrm{d}z}{z}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \int_{x^2}^{x^3}\int_y^{xy} \frac{\mathrm{d}z}{z}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_1^2 (x^3 - x^2)\ln x\,\mathrm{d}x = \\ &= \left[x^4\left(\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{16}\right) - x^3\left(\frac{\ln x}{3} - \frac{1}{9}\right)\right]\Bigg|_1^2 = \\ &= \frac{4\ln 2}{3} - \frac{23}{144} \doteq \\ &\doteq 0{\cdot}764\,.\end{aligned}$$

24. Iskani integral je enak:

$$J = \int_0^a \iint\limits_{y^2+z^2<2xz} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \int_0^a x \iint\limits_{y^2+z^2<2xz} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,.$$

Neenačbo $y^2 + z^2 < 2xz$ lahko prepišemo v obliki $(z-x)^2 + y^2 < x^2$, kar pomeni, da gre za krog s polmerom x. Integral forme $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ po tem krogu je natančno njegova ploščina, ki je enaka πx^2. Sledi:

$$J = \pi \int_0^a x^3\,\mathrm{d}x = \frac{\pi a^4}{4}\,.$$

25. Iz Jacobijeve determinante:

$$
\begin{aligned}
J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -(a + t\cos\varphi)\sin\theta & -t\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \\ (a + t\cos\varphi)\cos\theta & -t\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ 0 & t\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = \\
&= t(a + t\cos\varphi)
\end{aligned}
$$

dobimo:

$$
V = \iiint\limits_{\substack{0 \le \theta < 2\pi \\ 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le t < b}} t(a + t\cos\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_0^b \int_0^{2\pi} t(a + t\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}t = 4\pi^2 ab^2\,,
$$

kar je seveda isto kot prej.

26. Označimo z J iskani integral. Po vpeljavi cilindričnih koordinat dobimo:

$$
J = \iiint\limits_{\substack{0 < r < \sqrt{3} \\ 0 \le \theta < 2\pi}} \frac{r^3\cos^2\theta}{1 + r^2 z^2 \cos^2\theta}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z
$$

Prevedba na trikratni integral nam da:

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r^3\cos^2\theta}{1 + r^2 z^2 \cos^2\theta}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \pi \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} r^2 |\cos\theta|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \\
&= 4\pi\sqrt{3}\,.
\end{aligned}
$$

27. Označimo iskani integal z I. Po vpeljavi sferičnih koordinat dobimo:

$$
I = \iiint\limits_{\substack{0 \le \theta < 2\pi \\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le r \le \sin\varphi}} r^3 \cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,.
$$

Ker mora biti $\sin\varphi \ge 0$, mora biti $\varphi \in [0, \pi/2]$ (integracijsko območje je krogla s središčem v $(0, 0, \frac{1}{2})$ in polmerom $\frac{1}{2}$). Sledi:

$$
I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \int_0^{\sin\varphi} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^4\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{10}\,.
$$

28. *Prvi način*: s cilindričnimi koordinatami.

$$V = \iiint_{\substack{r \le z \le \sqrt{1-r^2} \\ 0 \le \theta < 2\pi}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_r^{\sqrt{1-r^2}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z \, r \, \mathrm{d}r =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\sqrt{1-r^2} - r\right) r \, \mathrm{d}r \, .$$

Če v prvi del integrala vpeljemo substitucijo $t = \sqrt{1-r^2}$, dobimo:

$$V = 2\pi \left(\int_{\sqrt{2}/2}^{1} t^2 \, \mathrm{d}t - \int_0^{\sqrt{2}/2} r^2 \, \mathrm{d}r \right) = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) .$$

Drugi način: s sferičnimi koordinatami.

$$V = \iiint_{\substack{0 < r < 1 \\ \pi/4 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le \theta < 2\pi}} r^2 \cos\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^1 r^2 \, \mathrm{d}r \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) .$$

29. Označimo iskani integral z J.

Prvi način: uvedemo običajne sferične koordinate:

$$x = r\cos\varphi\cos\theta \, , \quad y = r\cos\varphi\sin\theta \, , \quad z = r\sin\varphi \, ; \qquad J = r^2\cos\varphi$$

in dobimo:

$$J = \iiint_{\substack{0 \le \theta < 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 2\sin\varphi}} r^6 \cos^2\theta \sin^2\theta \cos^5\varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\sin\varphi} r^6 \, \mathrm{d}r \cos^5\varphi \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta \cdot \frac{2^7}{7} \int_0^{\pi/2} \sin^7\varphi \cos^5\varphi \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{128}{7} \, \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \mathrm{B}(4,3) =$$

$$= \frac{128}{7} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)} \frac{\Gamma(4)\,\Gamma(3)}{\Gamma(7)} =$$

$$= \frac{128}{7} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{60} =$$

$$= \frac{4\pi}{105} \, .$$

Drugi način: uvedemo cilindrične koordinate:

$$x = r\cos\theta \, , \quad y = r\sin\theta \, , \quad z = z \, ; \qquad J = r$$

in dobimo:

$$
\begin{aligned}
J &= \iiint_{\substack{0\le\theta<2\pi\\ r^2+z^2\le 2z}} r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \\
&= \iiint_{\substack{0\le\theta<2\pi\\ 0\le r\le 1\\ 1-\sqrt{1-r^2}\le z\le 1+\sqrt{1-r^2}}} r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \\
&= 2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r = \\
&= 4\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t = \\
&= 2\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\,\frac{3}{2}\right)\mathrm{B}\left(3,\,\frac{3}{2}\right) = \\
&= 2\,\frac{\Gamma\left[\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}\,\frac{\Gamma(3)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \\
&= 2\cdot\frac{\pi}{8}\cdot\frac{16}{105} = \\
&= \frac{4\pi}{105}\,.
\end{aligned}
$$

Tretji način: uvedemo iste cilindrične koordinate kot prej, le da integriramo v drugačnem vrstnem redu:

$$
\begin{aligned}
J &= \iiint_{\substack{0\le\theta<2\pi\\ r^2+z^2\le 2z}} r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \\
&= \iiint_{\substack{0\le\theta<2\pi\\ 0\le z\le 2\\ 0\le r\le\sqrt{2z-z^2}}} r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \\
&= 2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^2\int_0^{\sqrt{2z-z^2}} r^5\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \\
&= 8\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\frac{1}{6}\int_0^2(2z-z^2)^3\,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{2}{3}\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\,\frac{3}{2}\right)\int_0^2(8z^3-12z^4+6z^5-z^6)\,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{2}{3}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}\left(32-\frac{384}{5}+64-\frac{128}{7}\right) = \\
&= \frac{\pi}{8}\cdot\frac{32}{35} = \\
&= \frac{4\pi}{105}\,.
\end{aligned}
$$

Četrti način: uvedemo premaknjene sferične koordinate, in sicer tako, da je središče v točki $(0,0,1)$:

$$x = r\cos\varphi\cos\theta\,, \quad y = r\cos\varphi\sin\theta\,, \quad z = 1 + r\sin\varphi\,; \qquad J = r^2\cos\varphi\,.$$

Dobimo:

$$\begin{aligned}
J &= \iiint_{\substack{0\le\theta<2\pi \\ -\pi/2\le\varphi\le\pi/2 \\ 0\le r\le 1}} r^6\cos^2\theta\sin^2\theta\cos^5\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^6\,\mathrm{d}r = \\
&= 8\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^6\,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{2}{7}\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\mathrm{B}\left(3,\frac{1}{2}\right) = \\
&= \frac{2}{7}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}\,\frac{\Gamma(3)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \\
&= \frac{2}{7}\cdot\frac{\pi}{8}\cdot\frac{16}{15} = \\
&= \frac{4\pi}{105}\,.
\end{aligned}$$

30. Po vpeljavi sferičnih koordinat dobimo:

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_{\substack{-\pi/2\le\varphi\le\pi/2 \\ 0<r<|a\,\mathrm{tg}^{1/3}\varphi| \\ 0\le\theta<2\pi}} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{|a\,\mathrm{tg}^{1/3}\varphi|} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{2|a|^3\pi}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\,\mathrm{tg}\,\varphi|\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4|a|^3\pi}{3}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4|a|^3\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

31. Pišemo lahko $\sigma = c(a-y)$. Tedaj je masa enaka:

$$m = c\int_0^a\int_0^{a-y}(a-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\int_0^a(a-y)^2\,\mathrm{d}y = \frac{ca^3}{3}\,.$$

Koordinati težišča pa sta:

$$x^* = \frac{c}{m}\int_0^a\int_0^{a-y}x(a-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{c}{2m}\int_0^a(a-y)^3\,\mathrm{d}y = \frac{ca^4}{8m} = \frac{3a}{8}$$

in:

$$y^* = \frac{c}{m}\int_0^a\int_0^{a-y}y(a-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{c}{m}\int_0^a y(a-y)^2\,\mathrm{d}y = \frac{ca^4}{12m} = \frac{a}{4}\,.$$

32. Velja:

$$m = \sigma \iint\limits_{\substack{x,y>0 \\ x^{2/3}+y^{2/3}<R}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sigma \int_0^R \bigl(R^{2/3} - x^{2/3}\bigr)^{3/2}\,\mathrm{d}x\,.$$

S substitucijo $t = (x/R)^{2/3}$ dobimo:

$$m = \frac{3}{2}\,\sigma R^2 \int_0^1 (1-t)^{3/2}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\,\sigma R^2\,\mathrm{B}\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3\pi}{32}\,\sigma R^2\,.$$

Koordinati težišča pa sta:

$$\begin{aligned}
x^* &= \frac{1}{m}\,\sigma \iint\limits_{\substack{x,y>0 \\ x^{2/3}+y^{2/3}<R^{2/3}}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{\sigma}{m}\int_0^R x\bigl(R^{2/3} - x^{2/3}\bigr)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{3}{2}\,\frac{\sigma R^3}{m}\int_0^1 t^2(1-t)^{3/2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{3}{2}\,\frac{\sigma R^3}{m}\,\mathrm{B}\left(3, \frac{5}{2}\right) = \\
&= \frac{8}{105}\,\frac{\sigma R^3}{m} = \\
&= \frac{256}{315\pi}\,R
\end{aligned}$$

in:

$$\begin{aligned}
y^* &= \frac{1}{m}\,\sigma \iint\limits_{\substack{x,y>0 \\ x^{2/3}+y^{2/3}<R^{2/3}}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{\sigma}{m}\int_0^R \int_0^{(R^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sigma R^3}{m}\int_0^R \bigl(1 - x^{2/3}\bigr)^3\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{3}{4}\,\frac{\sigma R^3}{m}\int_0^1 (1-t)^3\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{3}{2}\,\frac{\sigma R^3}{m}\,\mathrm{B}\left(4, \frac{3}{2}\right) = \\
&= \frac{8}{105}\,\frac{\sigma R^3}{m} = \\
&= \frac{256}{315\pi}\,R\,.
\end{aligned}$$

Opomba: seveda sta koordinati težišča enaki, vendar pa smo ju izračunali na dva različna načina.

33. Velja:

$$J = c \int_0^a \int_0^{a-y} (x^2 + y^2)(a - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c \int_0^a \left[\frac{(a-y)^4}{3} + y^2(a-y)^2\right] \mathrm{d}y = \frac{ca^5}{10} =$$
$$= \frac{3ma^2}{10}\,.$$

34. Masa: $m = \dfrac{3\pi}{8}\,\sigma R^2$ (enaka je štirikratni masi iz prejšnje naloge).
Vztrajnostni moment:

$$\begin{aligned}
J &= \sigma \int_{x^{2/3}+y^{2/3}<R^{2/3}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= 4\sigma \int_{\substack{x,y>0\\ x^{2/3}+y^{2/3}<R^{2/3}}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= 8\sigma \int_{\substack{x,y>0\\ x^{2/3}+y^{2/3}<R^{2/3}}} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= 8\sigma \int_0^R x^2\big(R^{2/3} - x^{2/3}\big)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \\
&= 12\sigma R^4\,\frac{\sigma}{m} \int_0^1 t^{7/2}(1-t)^{3/2}\,\mathrm{d}t = \\
&= 12\sigma R^4\,\frac{\sigma}{m}\,\mathrm{B}\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) = \\
&= \frac{21\pi}{256}\,\sigma R^4 = \\
&= \frac{7}{32}\,mR^2\,.
\end{aligned}$$

35. Označimo z R polmer osnovne ploskve, s h pa višino. Če koordinatni sistem postavimo tako, da je izhodišče v središču osnovne ploskve, os z pa se ujema s simetrijsko osjo stožca, je gostota stožca enaka cz za neko konstanto c. Privzemimo še, da ima vrh stožca pozitivno koordinato z, torej h. Najprej izračunamo maso:

$$m = \iiint_{\substack{z>0\\ \sqrt{x^2+y^2}/R+z/h<1}} cz\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Po vpeljavi cilindričnih koordinat dobimo:

$$
\begin{aligned}
m &= c \iiint_{\substack{r,z\geq 0\\ r/R+z/h\leq 1\\ 0\leq\theta<2\pi}} rz\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \\
&= c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r\int_0^{h(1-r/R)} z\,\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r = \\
&= \pi c h^2\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)^2 r\,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{\pi c R^2 h^2}{12}\,.
\end{aligned}
$$

Iz simetrije sledi, da ima težišče koordinati x in y enaki nič. Koordinata z pa je enaka:

$$
\begin{aligned}
z^* &= \iiint_{\substack{z>0\\ \sqrt{x^2+y^2}/R+z/h<1}} cz^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{c}{m}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r\int_0^{h(1-r/R)} z^2\,\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{2\pi c h^3}{3m}\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)^3 r\,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{\pi\rho R^2 h^3}{30m} = \\
&= \frac{2h}{5}\,.
\end{aligned}
$$

Težišče je torej na simetrijski osi stožca, in sicer na $2/5$ višine.

Glede na postavitev koordinatnega sistema je simetrijska os stožca os z. Vztrajnostni moment okoli te osi je torej enak:

$$
\begin{aligned}
J_z &= \iiint_{\substack{z>0\\ \sqrt{x^2+y^2}/R+z/h<1}} cz(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r\int_0^{h(1-r/R)} z\,\mathrm{d}z\,r^3\,\mathrm{d}r = \\
&= \pi c R^4 h^2\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)^2 r^3\,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{\pi c R^4 h^2}{60} = \\
&= \frac{mR^2}{5}\,.
\end{aligned}
$$

36. Koordinatni sistem postavimo tako, da je izhodišče v težišču, osnovna ravnina pa je ravnina xy. Označimo polmer polkrogle z R. Masa je sicer splošno znana, lahko pa jo izračunamo npr. s cilindričnimi koordinatami:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2<R^2\\ z>0}} \rho \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \\ &= \rho \iiint_{\substack{0<r<\sqrt{R^2-z^2}\\ 0\le\theta<2\pi}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z = \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z = \\ &= \pi\rho \int_0^R (R^2 - z^2) \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi R^3 \rho}{3} \,. \end{aligned}$$

Zaradi simetrije ima težišče koordinati x in y enaki nič, potrebno je izračunati le koordinato z, ki jo označimo z z^*. Izračunamo jo podobno kot pri masi:

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{3}{2\pi R^3 \rho} \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2<R^2\\ z>0}} \rho z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \\ &= \frac{3}{2\pi R^3} \iiint_{\substack{0<r<\sqrt{R^2-z^2}\\ 0\le\theta<2\pi}} rz \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z = \\ &= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r \, \mathrm{d}r \, z \, \mathrm{d}z = \\ &= \frac{3}{2R^3} \int_0^R (R^2 - z^2) z \, \mathrm{d}z = \frac{3R}{8} \,. \end{aligned}$$

Na enak način izračunamo še vztrajnostni moment:

$$\begin{aligned} J_z &= \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2<R^2\\ z>0}} \rho \, (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \\ &= \rho \iiint_{\substack{0<r<\sqrt{R^2-z^2}\\ 0\le\theta<2\pi}} r^3 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z = \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z = \\ &= \frac{\pi\rho}{2} \int_0^R (R^2 - z^2)^2 \, \mathrm{d}z = \\ &= \frac{4\pi\rho R^5}{15} = \frac{2mR^2}{5} \,. \end{aligned}$$

37. Postavimo koordinatni sistem tako, da je izhodišče v središču valja, os z pa sovpada z njegovo simetrijsko osjo. Če z ρ označimo gostoto, R polmer, s h pa dolžino valja, je masa enaka $m = \pi R^2 h$. Vztrajnostni moment okoli simetrijske osi je enak:

$$J_z = \iiint_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ -h/2\le z\le h/2}} \rho \, (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,.$$

Po vpeljavi cilindričnih koordinat dobimo:

$$
\begin{aligned}
J_z &= \rho \iiint_{\substack{0\le r\le R\\ -h/2\le z\le h/2\\ 0\le\theta<2\pi}} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \\
&= \rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-h/2}^{h/2}\mathrm{d}z\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{\pi\rho R^4 h}{2} = \\
&= \frac{mR^2}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Za os, ki gre skozi težišče in je pravokotna na simetrijsko os, pa lahko vzamemo os x. Velja:

$$
J_x = \iiint_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ -h/2\le z\le h/2}} \rho\,(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.
$$

Po vpeljavi cilindričnih koordinat dobimo:

$$
\begin{aligned}
J_x &= \rho \iiint_{\substack{0\le r\le R\\ -h/2\le z\le h/2\\ 0\le\theta<2\pi}} (r^2\sin^2\theta + z^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \\
&= \rho\left[\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{-h/2}^{h/2}\mathrm{d}z\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-h/2}^{h/2} z^2\,\mathrm{d}z\int_0^R r\,\mathrm{d}r\right] = \\
&= \frac{\pi\rho R^4 h}{4} + \frac{\pi\rho R^2 h^3}{12} = \\
&= \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}\,.
\end{aligned}
$$

9. Vektorska analiza

1. $\operatorname{grad} w = \left(2x\, e^{y/z}, \dfrac{x^2}{z}\, e^{y/z}, -\dfrac{x^2 y}{z^2}\, e^{y/z}\right)$, smerni odvod: $\dfrac{5}{3}$.

2. $2xz - 2xyz + 6yz$.

3. $(p+3)r^p$

4. $(2z^4 + 2x^2y, 3xz^2, -4xyz)$.

5. 0 (spomnimo se lahko, da je dano vektorsko polje enako $\operatorname{rot}(xz^3, -2x^2yz, 2yz^4)$ in da je $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$).

6. 0 (spomnimo se lahko, da je dano vektorsko polje enako $\operatorname{grad}\bigl(x^2\, e^{y/z}\bigr)$ in da je $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$).

7. Označimo iskano polje z (X, Y, Z) in postavimo na nič komponento Z. Dobimo parcialne diferencialne enačbe:

$$-\frac{\partial Y}{\partial z} = x\,, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = -y\,, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0\,.$$

Iz prve enačbe dobimo $Y = -xz + C_2(x,y)$, iz druge pa $X = -yz + C_1(x,y)$. Ugotovimo, da je, če postavimo $C_1(x,y) = C_2(x,y) = 0$, izpolnjena tudi tretja enačba. Eno od iskanih polj je tako $(-yz, -xz, 0)$.

8. Označimo dano vektorsko polje z $\vec{R}$. Iz:

$$\operatorname{rot}\vec{R} = \begin{bmatrix} (b+1)y^b\cos z - 3y^b\cos z \\ 2x^a\cos z - (a+1)x^a\cos z \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo, da je polje potencialno natanko tedaj, ko je $a = 1$ in $b = 2$. Ker se nedoločeni integrali:

$$\int 2x\sin z\,\mathrm{d}x = x^2\sin z + C_1(y,z)$$
$$\int 3y^2\sin z\,\mathrm{d}y = y^3\sin z + C_2(x,z)$$
$$\int (x^2+y^3)\cos z\,\mathrm{d}z = (x^2+y^3)\sin z + C_3(x,y)$$

ujemajo za $C_1(y,z) = 3y^2\sin z$, $C_2(x,z) = 2x\sin z$ in $C_3(x,y) = 0$, je skalarno polje $u = (x^2+y^3)\sin z$ potencial vektorskega polja $\vec{v}$. Z drugimi besedami, velja:

$$2x\sin z\,\mathrm{d}x + 3y^2\sin z\,\mathrm{d}y + (x^2+y^3)\cos z\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}\bigl((x^2+y^3)\sin z\bigr)\,.$$

9. a) Najprej izračunamo $\operatorname{grad} r = \dfrac{\vec{r}}{r}$, kjer je $\vec{r} = (x, y, z)$. Iz 3. naloge nato sledi $\Delta r = \frac{2}{r}$.
b) Velja $\operatorname{grad}(r^p) = p r^{p-1} \operatorname{grad} r = p r^{p-2} \vec{r}$. Spet iz 3. naloge dobimo $\Delta(r^p) = p(p+1) r^{p-2}$, kar je enako nič pri $p = 0$ in $p = -1$.

10. Velja:

$$\int_{K_1} \vec{R}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_{K_1} (y\, \mathrm{d}x - z\, \mathrm{d}y + x\, \mathrm{d}z) = \int_0^1 (t\, \mathrm{d}t - t\, \mathrm{d}t + t\, \mathrm{d}t) = \frac{1}{2}\,,$$
$$\int_{K_2} \vec{R}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 \bigl(t^2\, \mathrm{d}t - t^3\, \mathrm{d}(t^2) + t\, \mathrm{d}(t^3)\bigr) = \int_0^1 (t^2 - 2t^4 + 3t^3)\, \mathrm{d}t = \frac{41}{60}\,.$$

11. Velja:

$$\int_{K_1} \vec{R}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 (2t^2\, \mathrm{d}t + t^2\, \mathrm{d}t + 3t^2\, \mathrm{d}t) = 2\,,$$
$$\int_{K_2} \vec{R}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 \bigl(2t^4\, \mathrm{d}t + t^6\, \mathrm{d}(t^2) + (2t^5 + t^2)\, \mathrm{d}(t^3)\bigr) = \int_0^1 (5t^4\, \mathrm{d}t + 8t^7)\, \mathrm{d}t = 2\,.$$

Integrala sta torej enaka.

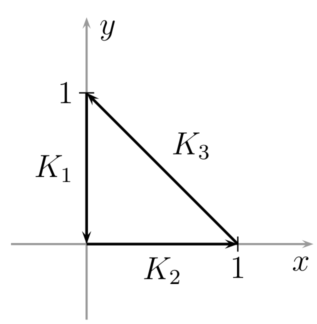
12. Če potencial izračunamo na zgornji način, pri čemer za (a, b, c) izberemo kar koordinatno izhodišče, dobimo:

$$w(x_0, y_0, z_0) = \int_0^1 \bigl(2t^2 x_0^2 z_0 + t^2 z_0^2 y_0 + t^2 (2 y_0 z_0 + x_0^2) z_0\bigr)\, \mathrm{d}t = x_0^2 z_0 + y_0 z_0^2\,.$$

Potencial pa dokaj lahko uganemo tudi iz totalnega diferenciala.

13. $$\oint_K \vec{R}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{2\pi} \bigl(\sin t\, \mathrm{d}(\cos t) - (\cos t + \sin t)\, \mathrm{d}(\sin t) + \cos t\, \mathrm{d}(\cos t + \sin t)\bigr)\, \mathrm{d}t =$$
$$= -\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + 2 \sin t \cos t)\, \mathrm{d}t = -\pi.$$

14. *Prvi način.* Integral je vsota integralov po stranicah:



Velja:

$$\int_{K_1}\big(X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y\big) = 0\,,$$

$$\int_{K_2}\big(X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y\big) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\,,$$

$$\int_{K_3}\big(X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y\big) = \int_1^0 (2x-1)\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-2x)\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Z integracijo po delih, kjer arkus tangens odvajamo, ostalo pa integriramo, dobimo:

$$\begin{aligned}\int_{K_3}\big(X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y\big) &= \int_0^1 \frac{x^2-x}{2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2x-1)^2+1} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Torej je $\oint_K\big(X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y\big) = \frac{1}{2}$.

Drugi način. Velja $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 1$, torej je cirkulacija po robu območja enaka kar njegovi ploščini, ploščina danega trikotnika pa je res $\frac{1}{2}$.

15. Računajmo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi^2\,,$$

$$\dot{x} = \sin\varphi + \varphi\cos\varphi\,, \quad \dot{y} = \cos\varphi - \varphi\sin\varphi\,, \quad \dot{z} = 0\,,$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1 + \varphi^2\,.$$

Iskani integral je torej enak $\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi\sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{(4\pi^2+1)^{3/2}-1}{3}$.

16. Najprej izračunamo:

$$\dot{x} = 1\,, \quad \dot{y} = \sqrt{2}\,t \quad \dot{z} = t^2\,, \qquad \mathrm{d}s = (t^2+1)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \mu = \frac{t}{\sqrt{2}(1+t^2)}\,.$$

Sledi:

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{4}\,,$$

$$x^* = \frac{1}{m\sqrt{2}}\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\,, \quad y^* = \frac{1}{2m}\int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{4}\,, \quad z^* = \frac{1}{3m\sqrt{2}}\int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t = \frac{2}{15}\,,$$

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\left(\frac{t^5}{2} + \frac{t^7}{9}\right) t\,\mathrm{d}t = \frac{7\sqrt{2}}{144}\,.$$

17. *Prvi način.* Ploskev lahko izrazimo eksplicitno:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,; \quad x^2 + y^2 < 1\,,$$

od koder dobimo tudi $EG - F^2 = 1 + z_x^2 + z_y^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2$. Iskana površina je enaka:

$$\iint_{x^2+y^2<1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi \int_0^1 r\,\sqrt{1 + 4r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}\bigl(5\sqrt{5} - 1\bigr)\,.$$

Drugi način. Ploskev parametriziramo v polarnih koordinatah:

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta\,, \quad z = 1 - r^2\,; \quad 0 \le r < 1\,, \quad 0 \le \theta < 2\pi\,.$$

Iz:

$$\vec{r}_r = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -2r \end{bmatrix}\,, \quad \vec{r}_\theta = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo $EG - F^2 = r^2(1 + 4r^2)$ in iskana površina je enaka:

$$\iint_{\substack{0\le r<1 \\ 0\le r<2\pi}} r\sqrt{1 + 4r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2}\,\mathrm{d}r\,,$$

kar je isto kot prej.

18. Najprej izračunamo:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \varphi \end{bmatrix}\,, \quad \vec{r}_r = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}\,, \quad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 1 \end{bmatrix}\,,$$
$$E = 1\,, \quad F = 0\,, \quad G = 1 + r^2\,, \quad EG - F^2 = 1 + r^2\,.$$

Iskana ploščina je torej enaka:

$$\iint_{0<\varphi<r<2\pi} \sqrt{1 + r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^r \sqrt{1 + r^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} r\,\sqrt{1 + r^2}\,\mathrm{d}r =$$
$$= \frac{(1 + 4\pi^2)^{3/2} - 1}{3}\,.$$

19. *Prvi način*: z eksplicitno izražavo ploskve. Najprej izračunajmo kvadrat ploščinskega elementa:

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2\,.$$

Masa je torej enaka:

$$m = \iint_{z<1} \sigma\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2<1} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Po uvedbi polarnih koordinat $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $J = r$ dobimo:

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^1 r^3 \sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{25\sqrt{5}-1}{60}\,\pi\,.$$

Zaradi simetrije je $x^* = y^* = 0$, aplikata težišča pa je enaka:

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{1}{m} \iint_{x^2+y^2<1} (x^2+y^2)^2 \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{2\pi}{m} \int_0^1 r^5 \sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r = \\ &= \frac{\pi}{m}\,\frac{125\sqrt{5}-1}{420} = \\ &= \frac{125\sqrt{5}-1}{7\bigl(25\sqrt{5}-1\bigr)}\,. \end{aligned}$$

Končno izračunamo še vztrajnostni moment okoli osi z:

$$J_z = \iint_{x^2+y^2<1} (x^2+y^2)^2 \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}\,\pi\,.$$

Drugi način: s parametrizacijo v polarnih koordinatah:

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta\,, \quad z = r^2\,; \quad 0 \le r < 1\,, \quad 0 \le \theta < 2\pi\,.$$

Tedaj je $\sigma = r^2$. Iz:

$$\vec{r}_r = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 2r \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_\theta = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo $EG - F^2 = r^2(1+4r^2)$. Masa ploskve je tako enaka:

$$\iint_{\substack{0\le r<1 \\ 0\le\theta<2\pi}} r^3 \sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{25\sqrt{5}-1}{60}\,\pi\,.$$

Ker je $z = r^2$, je koordinata z težišča enaka:

$$z^* = \frac{1}{m} \iint_{\substack{0\le r<1 \\ 0\le\theta<2\pi}} r^5 \sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{125\sqrt{5}-1}{7\bigl(25\sqrt{5}-1\bigr)}$$

in ker je $x^2 + y^2 = r^2$, je vztrajnostni moment okoli osi z enak:

$$J_z = \iint_{\substack{0\le r<1 \\ 0\le\theta<2\pi}} r^5 \sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}\,\pi\,.$$

Rezultati so seveda enaki kot prej.

20. Ploskev parametriziramo kar v obliki:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{bmatrix} \quad ; \quad x^2+y^2<1\,,$$

dobimo:

$$\vec{r}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix} \,, \quad \vec{r}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix} \,, \qquad \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{bmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Ker ima vektorski produkt $\vec{r}_x \times \vec{r}_y$ zadnjo komponento pozitivno, je dana orientacija *v nasprotju* z izbrano parametrizacijo, torej bo veljalo:

$$\begin{aligned}
\iint_S \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P &= -\iint_{x^2+y^2<1} \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ 2z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \\
&= -\iint_{x^2+y^2<1} \sqrt{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \\
&= -\frac{2\pi}{3} \,.
\end{aligned}$$

21. *Prvi način*: z enotno parametrizacijo ploskve:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ (6+2y-x)/3 \end{bmatrix} \,, \quad x>0\,, \quad y<0\,, \quad x<2y+6\,.$$

Iz:

$$\vec{r}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \end{bmatrix} \,, \quad \vec{r}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} \,, \quad \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dobimo, da ima normala isto smer kot $\vec{r}_x \times \vec{r}_y$. Torej bo pretok enak:

$$\begin{aligned}
\iint_S \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P &= \iint_{\substack{x>0 \\ y<0 \\ x<2y+6}} \left\langle \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ (6+2y-x)^2/9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \\
&= \int_{-3}^{0} \int_{0}^{2y+6} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2y^2}{3} + \frac{(6+2y-x)^2}{9} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \\
&= \int_{-3}^{0} \left(\frac{(2y+6)^3}{9} - \frac{2y^2(2y+6)}{3} + \frac{(6+2y)^3}{27} \right) \mathrm{d}y = \\
&= 18 - 9 + 6 = \\
&= 15\,.
\end{aligned}$$

Drugi način: s posameznimi parametrizacijami ploskve:

$$\begin{aligned}
x &= 6 + 2y - 3z\,; & y &< 0\,, & z &> 0\,, & 3z - 2y &< 6\,,\\
y &= \frac{x + 3z - 6}{2}\,; & x &> 0\,, & z &> 0\,, & x + 3z &< 6\,,\\
z &= \frac{6 + 2y - x}{3}\,; & x &> 0\,, & y &< 0\,, & x - 2y &< 6\,.
\end{aligned}$$

Iz predznakov komponent normalnega vektorja $\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$ dobimo:

$$\begin{aligned}
\iint_S \langle \vec{R}, \vec{N}\rangle \,\mathrm{d}P &= \iint_{\substack{y<0\\z>0\\3z-2y<6}} (6 + 2y - 3z)^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iint_{\substack{x>0\\z>0\\x+3z<6}} \frac{(x + 3z - 6)^2}{4}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x +\\
&\qquad + \iint_{\substack{x>0\\y<0\\x-2y<6}} \frac{(6 + 2y - x)^2}{9}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =\\
&= \int_{-3}^{0}\int_{0}^{(6+2y)/3} (6 + 2y - 3z)^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y -\\
&\qquad + \int_{0}^{2}\int_{0}^{6-3z} \frac{(x + 3z - 6)^2}{4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z +\\
&\qquad + \int_{-3}^{0}\int_{0}^{2y+6} \frac{(6 + 2y - x)^2}{9}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =\\
&= \int_{-3}^{0} \frac{(6 + 2y)^3}{9}\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{2} \frac{(3z - 6)^3}{12}\,\mathrm{d}z + \int_{-3}^{0} \frac{(6 + 2y)^3}{27}\,\mathrm{d}y =\\
&= 18 - 9 + 6 =\\
&= 15\,.
\end{aligned}$$

22. Plašč valja najprej parametriziramo:

$$x = \cos\theta\,, \quad y = \sin\theta\,, \quad z = z\,; \qquad 0 \le \theta < 2\pi\,, \quad z \in \mathbb{R}\,.$$

in v izbranih koordinatah zapišemo vektorsko polje, ki ga integriramo:

$$\vec{R} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \frac{1}{1 + z^2}\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\z\end{bmatrix}$$

Nato izračunamo:

$$\vec{r}_\theta = \begin{bmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{r}_z = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = \begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{bmatrix}.$$

Ker zgornji vektorski produkt vedno kaže iz valja, je pretok enak:

$$\Phi = \iint_{\substack{0\le\theta<2\pi\\z\in\mathbb{R}}} \frac{1}{1 + z^2}\left\langle \begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\z\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{bmatrix}\right\rangle \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{1 + z^2} = 2\pi^2\,.$$

23. Označimo z B enotsko kroglo, z $\vec{R} = (X, Y, Z)$ dano vektorsko polje, s Φ pa iskani pretok.

Prvi način: neposredno. Rob krogle parametriziramo:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \; ; \qquad 0 \le \theta < 2\pi \, , \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \, .$$

Tako velja:

$$\vec{r}_\theta = \begin{bmatrix} -\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

in

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi\cos\theta \\ \cos^2\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\varphi \end{bmatrix} = \vec{r}\cos\varphi = \vec{N}\cos\varphi \, ,$$

zato je pretok enak:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_{\partial B} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P = \\
&= \iint_{\substack{0 \le \theta < 2\pi \\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2}} \left\langle \begin{bmatrix} x(y^2+z^2) \\ y(x^2+z^2) \\ z(x^2+y^2) \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\rangle \cos\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = \\
&= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = \\
&= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\cos^5\varphi \sin^2\theta \cos^2\theta + \sin^2\varphi \cos^3\varphi) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \, .
\end{aligned}$$

Označimo $u := \cos^5\varphi \sin^2\theta \cos^2\theta + \sin^2\varphi\cos^3\varphi$. Ker se u ne spremeni, če φ zamenjamo z $-\varphi$, je $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u \, \mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{\pi/2} u \, \mathrm{d}\varphi$. Nadalje, ker se u ne spremeni, če θ zamenjamo s $\theta - \pi$, $-\theta$ ali s $\pi/2 - \theta$, velja $\int_0^{2\pi} u \, \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} u \, \mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi} u \, \mathrm{d}\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u \, \mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\pi/2} u \, \mathrm{d}\theta$. Sledi:

$$\begin{aligned}
\Phi &= 16 \int_0^{\pi/2} \cos^5\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta + 8\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos^3\varphi \, \mathrm{d}\theta = \\
&= 4 \, \mathrm{B}\left(3, \frac{1}{2}\right) \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + 4\pi \, \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, 2\right) = \\
&= 4 \, \frac{\Gamma(3)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \, \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)} + 4\pi \, \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \\
&= \frac{8\pi}{5} \, .
\end{aligned}$$

Drugi način: po Gaussovem izreku velja:

$$\Phi = \iiint_B \operatorname{div} \vec{R} \, \mathrm{d}V = \iiint_B 2(x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

Po uvedbi sferičnih koordinat:

$$x = r \cos\varphi \cos\theta \, , \quad y = r \cos\varphi \sin\theta \, , \quad z = r \sin\varphi \, , \quad J = r^2 \cos\varphi$$

dobimo:

$$\Phi = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 \cos\varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = \frac{8\pi}{5} \, .$$

24. Uporabimo Gaussov izrek. Divergenca danega vektorskega polja je namreč enaka 3, torej je iztok enak kar trikratnemu volumnu stožca, to pa je nadalje enako π.

25. Najprej opazimo, da mora biti $x^2 + y^2 < 1$. Od tod naprej gre na vsaj dva načina.

Prvi način: neposredno. Rob telesa razdelimo na zgornjo in spodnjo ploskev, ki ju parametriziramo v polarnih koordinatah:

$$x = \rho \cos\theta \, , \quad y = \rho \sin\theta \, ; \qquad 0 \le \rho \le 1 \, , \quad 0 \le \theta \le 2\pi \, .$$

Za spodnjo ploskev dobimo:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \rho \cos\theta \\ \rho \sin\theta \\ (\rho^2 - 1)/2 \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_\rho = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \rho \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_\theta = \begin{bmatrix} -\rho \sin\theta \\ \rho \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_\rho \times \vec{r}_\theta = \begin{bmatrix} -\rho^2 \cos\theta \\ -\rho^2 \sin\theta \\ \rho \end{bmatrix} ,$$

za zgornjo ploskev pa dobimo:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \rho \cos\theta \\ \rho \sin\theta \\ (1 - \rho^2)/2 \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_\rho = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -\rho \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_\theta = \begin{bmatrix} -\rho \sin\theta \\ \rho \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_\rho \times \vec{r}_\theta = \begin{bmatrix} \rho^2 \cos\theta \\ \rho^2 \sin\theta \\ \rho \end{bmatrix} .$$

Vidimo, da je vektorski produkt $\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\theta$ pri zgornji ploskvi usmerjen enako kot ustrezna normala na rob (ven iz telesa), pri spodnji pa nasprotno (noter v telo). Zato je iskani iztok enak:

$$\begin{aligned} \Phi := & \iint_{\substack{0 \le \rho < 1 \\ 0 \le \theta < 2\pi \\ \vec{r} = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, (1-\rho^2)/2)}} \left\langle \frac{\vec{r}}{r^3} , \begin{bmatrix} \rho^2 \cos\theta \\ \rho^2 \sin\theta \\ \rho \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \, - \\ & - \iint_{\substack{0 \le \rho < 1 \\ 0 \le \theta < 2\pi \\ \vec{r} = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, (\rho^2-1)/2)}} \iint_{\substack{0 \le \rho < 1 \\ 0 \le \theta < 2\pi}} \left\langle \frac{\vec{r}}{r^3} , \begin{bmatrix} -\rho^2 \cos\theta \\ -\rho^2 \sin\theta \\ \rho \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \, . \end{aligned}$$

Na zgornji in spodnji ploskvi velja:

$$r^2 = \rho^2 + \left(\frac{1 - \rho^2}{2} \right)^2 = \left(\frac{1 + \rho^2}{2} \right)^2 .$$

Po krajšem računu dobimo:

$$\Phi = 8 \iint_{\substack{0 \le \rho < 1 \\ 0 \le \theta < 2\pi}} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2} \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta = 16\pi \int_0^1 \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2} \, \mathrm{d}\rho = 4\pi \, .$$

Drugi način: uporabimo Gaussov izrek. Tega pa ne moremo storiti neposredno za dano telo, ker vektorsko polje ni povsod definirano (v ničli ima pol). Pač pa ga lahko uporabimo za enotsko kroglo, ki ji odvzamemo dano telo (za zgornji in za spodnji del). V 3. nalogi smo izpeljali, da je dano vektorsko polje brez izvorov. Tako iz Gaussovega izreka po krajšem premisleku o orientaciji dobimo, da je iztok danega vektorskega polja iz danega telesa enak iztoku iz enotske krogle, torej integralu po enotski sferi, orientirani navzven. Tam pa je $\vec{r}/r^3 = \vec{r} = \vec{N}$ in $\langle \vec{r}/r^3, \vec{N} \rangle = 1$. Zato je iskani iztok enak kar ploščini enotske sfere, ta pa je enaka 4π.

26. Dana krivulja je rob prostorskega trikotnika, čigar oglišča so te tri točke. Ta trikotnik lahko parametriziramo v obliki:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{bmatrix} , \quad x, y \ge 0, \quad x + y \le 1 \, .$$

Pri tej parametrizaciji velja:

$$\vec{r}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

torej je $\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Če se postavimo na rob nekam med oglišči $(1,0,0)$ in $(0,1,0)$, torej v točko $\vec{r} = (1-s, s, 0)$ (ta parametrizacija je skladna z orientacijo krivulje), je tangentni vektor enak $\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vektorski produkt $\vec{t} \times \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ kaže stran od trikotnika, saj je za dovolj majhen $\varepsilon > 0$ točka $\vec{r} + \varepsilon \vec{t} \times \vec{N}$ od trikotnika oddaljena za red velikosti ε, medtem ko točka $\vec{r} - \varepsilon \vec{t} \times \vec{N}$ leži na trikotniku. Zato parametrizaciji trikotnika in njegovega roba določata skladni orientaciji teh dveh objektov.

Krivuljni integral danega vektorskega polja:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{(1+x^2)^2} + y^2 - z^2 \right) \\ \left(\frac{1}{(1+y^2)^2} - x^2 + z^2 \right) \\ \left(\frac{1}{(1+z^2)^2} - x^2 + y^2 \right) \end{bmatrix}$$

je po definiciji težko izračunati. Toda po Stokesovem izreku je ta integral enak integralu rotorja:

$$\operatorname{rot} \vec{R} = \begin{bmatrix} 2y - 2z \\ -2z + 2x \\ -2x - 2y \end{bmatrix}$$

po ustrezno orientiranem trikotniku, torej:

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{x,y>0 \\ x+y<1 \\ z=1-x-y}} \left\langle \begin{bmatrix} 2y - 2z \\ -2z + 2x \\ -2x - 2y \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= -4 \int_0^1 \int_0^{1-y} (1 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= -2 \int_0^1 (1 - y)^2\,\mathrm{d}y = \\ &= -\frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

10. Kompleksna števila

1. $zw = -7 + 17i, \quad z/w = \frac{1}{2}(1 - i).$

2. $z_{1,2} = \pm \dfrac{3 - i}{\sqrt{2}}.$

3. $z_{1,2} = \dfrac{-2i \pm \sqrt{-4 - 16}}{2} = \left(-1 \pm \sqrt{5}\right)i.$

Opomba. V kompleksnem sicer ni korektno uporabljati korenskega znaka ($\sqrt{\cdot}$) samega po sebi. Korektno pa ga je uporabljati skupaj z obema možnima predznakoma ($\pm\sqrt{\cdot}$), v kolikor le-ta dva nista povezana s kakšnimi drugimi predznaki.

4. $-2^{99}\left(1 + \sqrt{3}\,i\right).$

5. $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = \frac{1}{2}\left[-1 - \sqrt{3} + \left(\sqrt{3} - 1\right)i\right], \quad z_3 = \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{3} - \left(\sqrt{3} + 1\right)i\right].$

6. $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i, \quad z_2 = -\sqrt{3} + i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}\,i, \quad z_4 = \sqrt{3} - i.$

7. $z = \ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\ ;\ k \in \mathbb{Z}.$

8. Če je $z = 3 + 4i = 5\left(\cos \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + i \sin \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right)$, je najprej $\ln z = \ln 5 + i \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Sledi:

$$z^i = e^{i(\ln 5 + i \operatorname{arctg}(4/3))} = e^{-\operatorname{arctg}(4/3)}(\cos \ln 5 + i \sin \ln 5) \doteq -0{\dot{}}0153 + 0{\dot{}}3953\, i\,.$$

9. Postavimo $z_1 = z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$ in $w = 1/3$. Tedaj je:

$$z_1^{1/3} = z_2^{1/3} = \sqrt[6]{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\,,$$

torej je:

$$z_1^{1/3} z_2^{1/3} = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt[3]{2}\,.$$

Po drugi strani pa moramo:

$$z_1 z_2 = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$$

zapisati v obliki:

$$z_1 z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\,,$$

če želimo uporabiti formuli za kanonično potenco in logaritem. Dobimo:

$$(z_1 z_2)^{1/3} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2^{-2/3}\left(\sqrt{3} - i\right)\,,$$

kar je drugače kot prej. Podobno je tudi:

$$\ln z_1 = \ln z_2 = \frac{\ln 2}{2} + \frac{3\pi i}{4}\,, \qquad \ln z_1 + \ln z_2 = \ln 2 + \frac{3\pi i}{2}\,,$$

medtem ko je:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln 2 - \frac{\pi i}{2}\,.$$

10. Velja:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{i}{4}\right) &= \frac{1}{2i}\left(e^{\pi i/3-1/4}-e^{-\pi i/3+1/4}\right) = \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{-1/4}}{2}\bigl(1+i\sqrt{3}\bigr)-\frac{e^{1/4}}{2}\bigl(1-i\sqrt{3}\bigr)\right] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\bigl(e^{1/4}+e^{-1/4}\bigr)+\frac{i}{4}\bigl(e^{1/4}-e^{-1/4}\bigr)\,.\end{aligned}$$

11. Enačbo nastavimo v obliki:

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2\,,$$

kar nam da rešitvi $e^{iz}=\bigl(2\pm\sqrt{3}\bigr)i$ in po logaritmiranju dobimo:

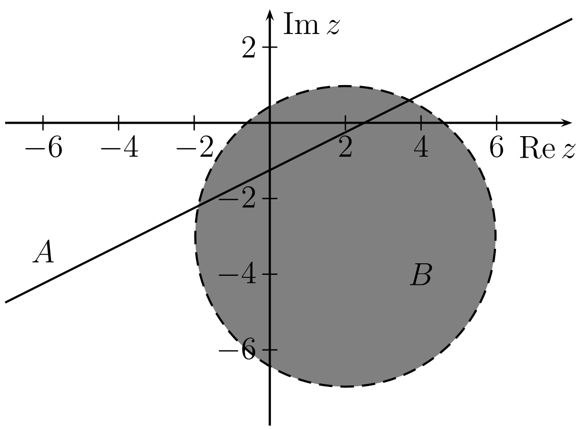
$$z=-i\ln\bigl(2\pm\sqrt{3}\bigr)+\frac{\pi}{2}+2k\pi\,.$$

Ker je $\bigl(2+\sqrt{3}\bigr)\bigl(2-\sqrt{3}\bigr)=1$, je to ekvivalentno tudi:

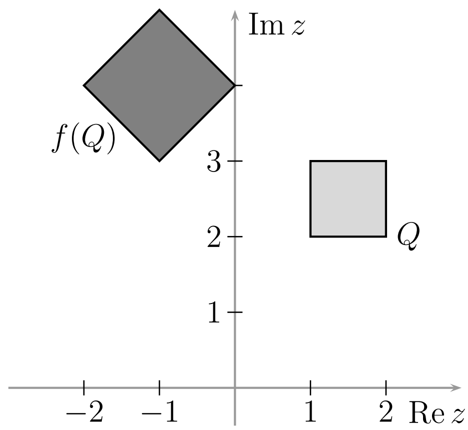
$$z=\frac{\pi}{2}+2k\pi\pm i\ln\bigl(2+\sqrt{3}\bigr)\,.$$

Rešitev ima torej enako obliko kot v primeru, ko obstajajo (le) realne rešitve.

12. Množica A je premica $2x-4y=5$, množica B pa je odprt krog s središčem v $2-3i$ in polmerom 4:



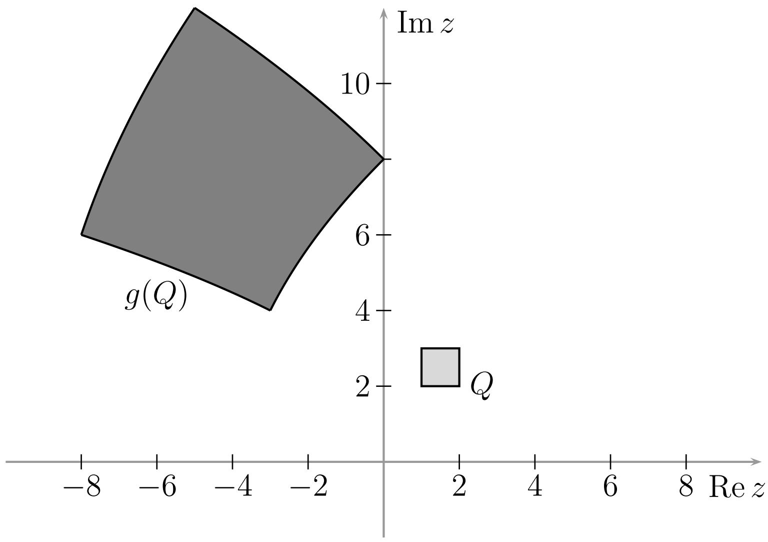
13. Pri funkciji f je dovolj, če pogledamo, kam se preslikajo oglišča kvadrata Q: točke $1+2i$, $1+3i$, $2+2i$, $2+3i$ se preslikajo v $-1+3i$, $4i$, $-2+4i$ in $-1+5i$. Slika:



Pri funkciji g se koordinati preslikane točke (x', y') izražata s koordinatama (x, y) izvirne točke s formulama $x' = x^2 - y^2$, $y' = 2xy$. Slike robov se potem izražajo v parametrični obliki:

$$\begin{array}{llll} x' = x^2 - 4 & x' = x^2 - 9 & x' = 1 - y^2 & x' = 4 - y^2 \\ y' = 4x & y' = 6x & y' = 2y & y' = 4y \end{array}$$

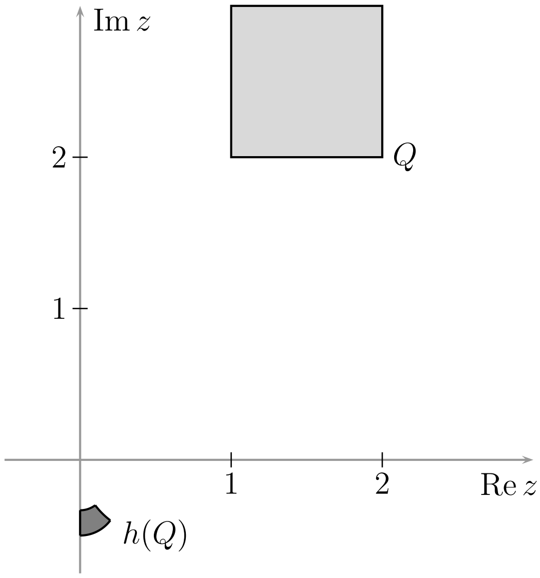
Slika:



Pri funkciji h pa je ugodno gledati implicitno obliko, zato gledamo izražavo stare točke z novo: iz $h^{-1}(w) = 1 + 1/w$ dobimo $x = 1 + x'/\big(x'^2 + y'^2\big)$, $y = -y'/\big(x'^2 + y'^2\big)$ in preslikani robovi zadoščajo relacijam:

$$x' = 0\,, \quad x'^2 + y'^2 - x' = 0\,, \quad 2x'^2 + 2y'^2 + y' = 0\,, \quad 3x'^2 + 3y'^2 + y' = 0\,.$$

Slika:



14. Množice gledamo v implicitni obliki, zato najprej izračunamo inverzno funkcijo: če je $w = f(z)$, je $z = \dfrac{iw-1}{w-1}$.

a) Iz $z = \bar{z}$ dobimo $\dfrac{iw-1}{w-1} = \dfrac{-i\bar{w}-1}{\bar{w}-1}$ oziroma $2w\bar{w} - (1+i)w - (1-i)\bar{w} = 0$ z dodatno omejitvijo $w \neq 1$. Če zapišemo $w = x + iy$, dobimo $x^2 + y^2 - x + y = 0$, kar je krožnica s središčem v točki $(1-i)/2$ in polmerom $\sqrt{2}/2$ brez točke 1.

b) Iz $z/i > \bar{z}/i$ dobimo $\dfrac{iw-1}{i(w-1)} > \dfrac{-i\bar{w}-1}{i(\bar{w}-1)}$ oziroma $2w\bar{w} - (1+i)w - (1-i)\bar{w} > 0$ oziroma $x^2 + y^2 - x + y > 0$, kar je zunanjost kroga središčem v točki $(1-i)/2$ in polmerom $\sqrt{2}/2$.

c) Iz $z = -\bar{z}$ dobimo $\dfrac{iw-1}{w-1} = \dfrac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1}$ oziroma $(1+i)w + (1-i)\bar{w} = 2$ z dodatno omejitvijo $w \neq 1$, kar je premica $x - y = 1$ brez $x = 1, y = 0$.

d) Iz $|z-1| < 3$ dobimo $\left|\dfrac{(i-1)w}{w-1}\right| < 3$ oziroma $7w\bar{w} - 9w - 9\bar{w} + 9 > 0$ oziroma $7(x^2+y^2) - 18x + 9 > 0$, kar je zunanjost kroga s središčem v točki $9/7$ in polmerom $3\sqrt{2}/7$.

e) Iz $|z| > 1$ oziroma $\left|\dfrac{iw-1}{w-1}\right| > 1$ dobimo $(1-i)w + (1+i)\bar{w} > 0$, kar je polravnina $x + y > 0$.

15. a) Ena od možnih preslikav je $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kjer je $f_1(z) = z - 1$, $f_2(z) = 3z/2$ in $f_3(z) = z + i$. Torej je $f(z) = \frac{3}{2}z - \frac{3}{2} + i$.

b) Ena od možnih preslikav je $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kjer je $f_1(z) = z - 1$, $f_2(z) = z/2$, $f_3(z) = 1/z$, $f_4(z) = 3z$ in $f_5(z) = z + i$. Torej je $f(z) = \dfrac{6}{z-1} + i$.

16. Opremo se na dejstvo, da preslikava $z \mapsto 1/z$ zamenja odprt krog s središčem v $1/2$ in polmerom $1/2$ ter polravnino vseh kompleksnih števil z realno komponento, večjo od 1. Enotski krog moramo torej najprej preslikati na krog s središčem v 1/2 in polmerom 1/2, kar naredimo s preslikavo $f_1(z) = (1+z)/2$. Na koncu moramo polravnino $\{z \; ; \; \operatorname{Re} z > 1\}$ preslikati na ciljno polravnino. To storimo tako, da enačbo prve polravnine zapišemo v obliki $z + \bar{z} > 2$, nato pa v obliki:

$$(1+i)\frac{z}{1+i} + (1-i)\overline{\left(\frac{z}{1+i}\right)} > 2\,.$$

Torej bo ustrezna preslikava $f_3(z) = \dfrac{z}{1+i}$, končna preslikava (ena od možnih rešitev) pa bo $f := f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kjer je $f_2(z) = 1/z$. Ko poračunamo, dobimo $f(z) = \dfrac{1-i}{1+z}$.

17. Funkcija u je harmonična natanko tedaj, ko je $a + c = 0$. Kot smo že omenili, lahko imaginarno komponento v ustrezne holomorfne funkcije (konjugirano harmonično funkcijo) poiščemo na več načinov. Omenimo dva.

Prvi način: izračunamo:

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y = -(bx - 2ay)\,\mathrm{d}x + (2ax + by)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{b(y^2 - x^2)}{2} + 2axy\right),$$

torej bo konjugirana harmonična funkcija $v(x, y) = b(y^2 - x^2)/2 + 2axy$, iskana holomorfna funkcija pa $u + iv$.

Drugi način: pišemo:

$$u(z) = a\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + b\,\frac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{4i} - a\left(\frac{z+\bar{z}}{2i}\right)^2 = \frac{a}{2}\,(z^2 + \bar{z}^2) + \frac{b}{4i}\,(z^2 - \bar{z}^2) =$$
$$= \frac{a}{2}\left(z^2 + \overline{z^2}\right) + \frac{b}{4i}\left(z^2 - \overline{z^2}\right) = a\operatorname{Re}(z^2) + \frac{b}{2}\operatorname{Im}(z^2)\,.$$

Zdaj pa se spomnimo, da je $\operatorname{Im}(w) = -\operatorname{Re}(iw)$. Sledi:

$$u(z) = \operatorname{Re}\left[\left(a - \frac{bi}{2}\right)z^2\right].$$

Iskana holomorfna funkcija je torej $f(z) = (a - bi/2)z^2$. Če to razvijemo po realni in imaginarni komponenti, dobimo originalno funkcijo u in njeno konjugirano funkcijo v iz prvega načina.

18. *Prvi način*: izračunamo:

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y = -\sin x \operatorname{ch} y\,\mathrm{d}x + \cos x \operatorname{ch} y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\cos x \operatorname{ch} y)$$

Iskana holomorfna funkcija je torej:

$$f(z) = f(x+iy) = \sin x \operatorname{sh} y + i\cos x \operatorname{ch} y = -i\sin x \sin(iy) + i\cos x\cos(iy) =$$
$$= i\cos(x+iy) = i\cos z\,.$$

Drugi način: pišemo:

$$\begin{aligned}\sin x \,\mathrm{sh}\, y &= \sin\frac{z+\bar z}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{z-\bar z}{2i} = -i\sin\frac{z+\bar z}{2}\sin\frac{z-\bar z}{2} = \frac{i}{2}(\cos z - \cos\bar z) = \\ &= \frac{1}{2}\big(i\cos z + \overline{i\cos z}\big) = \mathrm{Re}(i\cos z)\,.\end{aligned}$$

19. Pišimo:

$$v(z) = \frac{1}{2i}\,\frac{z-\bar z}{z\bar z - z - \bar z + 1} = \frac{1}{2i}\,\frac{z-\bar z}{(z-1)(\bar z-1)} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\bar z - 1} - \frac{1}{z-1}\right] = \mathrm{Im}\,\frac{1}{1-z}\,.$$

20. $\displaystyle \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(1-2i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+2i)^{n+1}}\right]z^n.$

21. $\displaystyle (\cos 2 - i\sin 2)\left(1 + (z+1+i)^2 + \frac{(z+1+i)^4}{2!} + \frac{(z+1+i)^6}{3!} + \cdots\right),$
$f^{(4)}(-1-i) = 12(\cos 2 - i\sin 2) \doteq -4{\cdot}994 - 10{\cdot}912\,i.$

22. Iz Taylorjevega razvoja:

$$\begin{aligned}f(z) = z^2\Big[&\big(1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots\big) - \\ &- \big(1 + 2z + 2z^2 + \tfrac{4}{3}z^2 + \cdots\big) - \\ &- \big(z^2 - \tfrac{1}{6}z^6 + \cdots\big)\Big] = \\ = \tfrac{8}{3}&z^5 + \cdots\end{aligned}$$

dobimo, da gre za ničlo pete stopnje. Enako bi dobili tudi s trikratnim odvajanjem drugega faktorja.

23. Iz Taylorjevih razvojev:

$$\begin{aligned}e^{-z^2/2} - \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2^2\cdot 2!} - \cdots - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots = \frac{z^4}{12} + \cdots\,, \\ z - \sin z &= z - z + \frac{z^3}{3!} - \cdots = \frac{z^3}{6} - \cdots\end{aligned}$$

dobimo, da ima prvi faktor ničlo stopnje 4, drugi pa stopnje 3. Torej ima f v izhodišču ničlo stopnje 7.

24. $\displaystyle \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^3}{5!} + \cdots,$ gre za pol stopnje 2.

25. $\displaystyle \frac{1}{4i(z+1-2i)} - \frac{1}{(4i)^2} + \frac{z+1-2i}{(4i)^3} - \frac{(z+1-2i)^2}{(4i)^4} + \cdots,$
gre za pol stopnje 1.

26. Ker števec nima ničel, imenovalec pa ima ničlo stopnje 1, gre za pol stopnje 1. Torej je potrebno izračunati le:

$$c_{-1} = \lim_{z\to 7} \frac{z}{e^z - e^7} = e^{-7} .$$

Z drugimi besedami, glavni del Laurentove vrste je $\dfrac{e^{-7}}{z-7}$.

27. Iz razcepa $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$ vidimo, da gre za pol prve stopnje, torej je potrebno izračunati le:

$$c_{-1} = \lim_{z\to 2i} \frac{z - 2i}{z^2 + 4} = \left.\frac{1}{z + 2i}\right|_{z=2i} = -\frac{i}{4} .$$

Z drugimi besedami, glavni del Laurentove vrste je $-\dfrac{i}{4(z-2i)}$.

28. Ker ima števec ničlo četrte, imenovalec pa ničlo druge stopnje, gre za odpravljivo singularnost ali ekvivalentno, glavni del Laurentove vrste je enak nič.

29. Ker ima števec ničlo prve, imenovalec pa tretje stopnje, gre za pol stopnje 2. Glavni del Laurentove vrste lahko tu dobimo kar s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto. S substitucijo $w = z - 7$ dobimo:

$$f(z) = \frac{e^7(e^w - 1)}{w^3} = \frac{e^7}{w^3}\left(w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \cdots\right) .$$

Glavni del je torej enak $e^7\left(\dfrac{1}{(z-7)^2} + \dfrac{1}{2(z-7)}\right)$.

30. Gre za pol druge stopnje, torej bomo morali izračunati koeficienta c_{-2} in c_{-1}:

$$c_{-2} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1 ,$$

$$c_{-1} = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1 - z\,e^z}{(e^z - 1)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{z + \frac{z^2}{2!} + \cdots - z - z^2 - \cdots}{(z + \cdots)^2} = -\frac{1}{2} .$$

Glavni del Laurentove vrste je torej $\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{2z}$.

31. *Prvi način*: neposredno. Ker števec v π nima ničle, je dovolj pogledati, ničlo kolikšne stopnje ima imenovalec. S substitucijo $w = z - \pi$ dobimo:

$$1 + \cos z = 1 - \cos w = 1 - 1 + \frac{w^2}{2!} - \frac{w^4}{4!} + \cdots ,$$

torej ima imenovalec ničlo, funkcija f pa pol stopnje 2. Koeficienta v glavnem delu Laurentove vrste sta enaka:

$$\begin{aligned}
c_{-2} &= \lim_{z\to\pi} \frac{z(z-\pi)^2}{1+\cos z} = \pi \lim_{z\to\pi} \frac{(z-\pi)^2}{1+\cos z} = 2\pi\,, \\
c_{-1} &= \lim_{z\to\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z(z-\pi)^2}{1+\cos z} = \\
&= \lim_{w\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \frac{w^2(w+\pi)}{1-\cos w} = \\
&= \lim_{w\to 0} \frac{(3w^2+2\pi w)(1-\cos z) - (w^3+\pi w^2)\sin w}{(1-\cos w)^2} = \\
&= \lim_{w\to 0} \frac{\frac{3w^4}{2!} - \cdots + \frac{2\pi w^3}{2!} - \cdots - w^4 + \cdots - \pi w^3 - \cdots}{\left(\frac{w^2}{2!} - \cdots\right)^2} = \\
&= 2\,.
\end{aligned}$$

Glavni del Laurentove vrste je tako $\dfrac{2\pi}{(z-\pi)^2} + \dfrac{2}{z-\pi}$.

Drugi način: s takojšnjim premikom v izhodišče in razdelitvijo na dve funkciji. Po uvedbi nove spremenljivke $w = z - \pi$ dobimo:

$$f(z) = \frac{w}{1-\cos w} + \frac{\pi}{1-\cos w}\,.$$

Funkcija $g_1(w) := \dfrac{w}{1-\cos w}$ ima v izhodišču pol prve stopnje in pripadajoči koeficient je enak:

$$c_{-1} = \lim_{w\to 0} \frac{w^2}{1-\cos w} = 2\,,$$

torej je glavni del Laurentove vrste enak $L_1(w) = \dfrac{2}{w}$. Funkcija $g_2(w) := \dfrac{\pi}{1-\cos w}$ pa ima pol druge stopnje in pripadajoča koeficienta sta enaka:

$$\begin{aligned}
c_{-2} &= \lim_{w\to 0} \frac{\pi w^2}{1-\cos w} = 2\pi\,, \\
c_{-1} &= \lim_{w\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \frac{\pi w^2}{1-\cos w} = \pi \lim_{w\to 0} \frac{2w(1-\cos w) - w^2 \sin w}{(1-\cos w)^2} = \\
&= \pi \lim_{w\to 0} \frac{\frac{2w^3}{2!} - \cdots - w^3 - \cdots}{\left(\frac{w^2}{2!} - \cdots\right)^2} = 0\,,
\end{aligned}$$

torej je glavni del Laurentove vrste enak $L_2(w) = \dfrac{2\pi}{w^2}$. Glavni del Laurentove vrste za dano funkcijo pa je enak:

$$L_1(z-\pi) + L_2(z-\pi) = \frac{2\pi}{(z-\pi)^2} + \frac{2}{z-\pi}\,,$$

tako kot prej.

32. Gre za bistveno singularnost. Iz razvoja v Taylorjevo vrsto:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-3)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots\right) = \\ &= z - 1 + \frac{1}{2!\,z} + \frac{1}{3!\,z^2} + \cdots - \\ &\qquad - 3 - \frac{3}{z} - \frac{3}{2!\,z^2} - \frac{3}{3!\,z^3} - \cdots \end{aligned}$$

dobimo, da je ostanek enak $\frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$.

33. Velja:

$$\begin{aligned} \int_K z\,\mathrm{d}z &= \int_K \Big[x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y + i(x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x)\Big] = 2i\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = i\,, \\ \int_L z\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (-t\,\mathrm{d}t + i\,\mathrm{d}t) = i\,, \\ \int_K \bar{z}\,\mathrm{d}z &= \int_K \Big[x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + i(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)\Big] = 2\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = 1\,, \\ \int_L \bar{z}\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (t\,\mathrm{d}t + i\,\mathrm{d}t) = 1 + i\,. \end{aligned}$$

34. Integracijsko pot lahko zamenjamo s kakšno drugo, vendar pa moramo ostati znotraj enostavno povezanega območja, ki ne vsebuje izhodišča, saj je tam singularnost. Tako smemo pot K_1 zamenjati s krožnim lokom $z = 2\,e^{it}$, kjer gre t od $-\pi/2$ do $\pi/2$, pot K_2 pa s krožnim lokom $z = 2\,e^{it}$, kjer gre t od $3\pi/2$ do $\pi/2$ (ne obratno!). Obakrat je $\mathrm{d}z/z = i\,\mathrm{d}t$, torej je:

$$\int_{K_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i\,\mathrm{d}t = \pi i\,, \qquad \int_{K_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{3\pi/2}^{\pi/2} i\,\mathrm{d}t = -\pi i\,.$$

Nadalje je:

$$\begin{aligned} \int_{K_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2} &= \frac{i}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-it}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin t + i\cos t)\,\mathrm{d}t = i\,, \\ \int_{K_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2} &= \frac{i}{2}\int_{3\pi/2}^{\pi/2} e^{-it}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{3\pi/2}^{\pi/2} (\sin t + i\cos t)\,\mathrm{d}t = i\,. \end{aligned}$$

Še lažje pa pri drugih dveh integralih pridemo do rezultata, če upoštevamo, da ima funkcija $z \mapsto 1/z^2$ primitivno funkcijo $z \mapsto -1/z$. Pri tem ni pomembno, da območje ni enostavno povezano: ne glede na to lahko izračunamo:

$$\int_{K_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \int_{K_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = -\left.\frac{1}{z}\right|_{-2i}^{2i} = i\,.$$

35. Funkcija f se da integrirati le po poti K_2, in sicer je:

$$\int_{K_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2z^{1/2}\Big|_{-2i}^{2i} = 4i\,.$$

Funkcija:

$$g(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\right)$$

pa se da integrirati po vseh treh poteh. Naj bodo K_1^-, K_2^- in K_3^- poti K_1, K_2 in K_3, premaknjene za ena v levo, K_1^+, K_2^+ in K_3^+ pa te poti, premaknjene za ena v desno. Tedaj velja:

$$\int_{K_i} g(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(\int_{K_i^-}\frac{\mathrm{d}w}{w} + \int_{K_i^+}\frac{\mathrm{d}w}{w}\right).$$

Najprej opazimo, da poti K_1^+, K_2^+ in K_2^- vse ležijo znotraj prerezane ravnine $\mathbb{C}\setminus\{t\,;\,t \le 0\}$. Torej velja:

$$\int_{K_1^+}\frac{\mathrm{d}w}{w} = \int_{K_2^+}\frac{\mathrm{d}w}{w} = \ln(1+2i) - \ln(1-2i) = 2i\operatorname{arctg}2\,,$$
$$\int_{K_2^-}\frac{\mathrm{d}w}{w} = \ln(-1+2i) - \ln(-1-2i) = 2i(\pi - \operatorname{arctg}2)\,.$$

Poti K_1^-, K_3^- in K_3^+ pa sekajo negativno realno os. Toda v integrale po teh poteh lahko vpeljemo substitucijo $w' = -w$. Dobimo integrale po poteh, ki spet vse ležijo znotraj prerezane ravnine in gredo od $2i$ do $-2i$. Sledi:

$$\int_{K_1^-}\frac{\mathrm{d}w}{w} = \int_{K_3^-}\frac{\mathrm{d}w}{w} = \int_{\hat{K}^+}\frac{\mathrm{d}w'}{w'} = \ln(1-2i) - \ln(1+2i) = -2i\operatorname{arctg}2\,,$$
$$\int_{K_3^+}\frac{\mathrm{d}w}{w} = \int_{\hat{K}^-}\frac{\mathrm{d}w'}{w'} = \ln(-1-2i) - \ln(-1+2i) = 2i(\operatorname{arctg}2 - \pi)\,.$$

Oznaka $\hat{K}^+$ tu velja za poljubno pot od $1+2i$ do $1-2i$ znotraj prerezane ravnine, oznaka $\hat{K}^-$ pa za poljubno pot od $-1+2i$ do $-1-2i$, prav tako znotraj prerezane ravnine. Ko seštejemo, dobimo:

$$\int_{K_1} g(z)\,\mathrm{d}z = 0\,, \qquad \int_{K_2} g(z)\,\mathrm{d}z = \pi i\,, \qquad \int_{K_3} g(z)\,\mathrm{d}z = -\pi i\,.$$

36. Ker je $z^4 - 3z^2 - 4 = (z^2-4)(z^2+1) = (z-2)(z+2)(z-i)(z+i)$, ima integrand pole 2, -2, i in $-i$.

a) Znotraj krožnice leži le pol v točki 2, zato je integral enak:

$$2\pi i\,\frac{1}{(z+2)(z^2+1)}\Big|_{z=2} = \frac{\pi i}{10}\,.$$

b) Znotraj krožnice leži le pol v točki i, zato je integral enak:

$$2\pi i \left.\frac{1}{(z^2-4)(z+i)}\right|_{z=i} = -\frac{\pi}{5}\,.$$

c) Znotraj krožnice ne neži noben pol, zato je integral enak nič.

d) Znotraj krožnice ležita pola v točkah 2 in i. Zaradi holomorfnosti je iskani integral enak:

$$J = \oint_{K_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^4-3z^2-4} + \oint_{K_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^4-3z^2-4}\,,$$

kjer je K_1 krivulja, ki v pozitivni smeri enkrat obkroži točko 2 in ne obkroži ostalih polov, K_2 pa je krivulja, za katero velja enako za točko i. To pa je ravno vsota prejšnjih dveh integralov, torej $J - \pi/5 + \pi i/10$.

37. Iz razcepa $z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2+1)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$ in Cauchyjeve integralske formule za odvode sledi:

$$\oint_K \frac{\mathrm{d}z}{z^4+2z^2+1} = 2\pi i \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=i} \frac{1}{(z+i)^2} = -4\pi i \left.\frac{1}{(z+i)^3}\right|_{z=i} = \frac{\pi}{2}\,.$$

38. Funkcija $z \mapsto e^z - e^7$ ima ničle $7 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. To so tudi poli integranda $f(z) = \frac{z}{e^z-e^7}$. Krožnica zajame pola 7 in $7 + 2\pi i$. Torej bo potrebno izračunati:

$$\mathrm{Res}(f,7) = \lim_{z\to 7} \frac{z(z-7)}{e^z-e^7} = \frac{7}{e^7}\,,$$
$$\mathrm{Res}(f,7+2\pi i) = \lim_{z\to 7+2\pi i} \frac{z(z-7)}{e^z-e^7} = \frac{7+2\pi i}{e^7}\,,$$

in integral je enak $2\pi i\Big[\mathrm{Res}(f,7) + \mathrm{Res}(f,7+2\pi i)\Big] = -4\pi^2 + 28\pi i$.

39. a) V izhodišču ima funkcija:

$$\sin(2z) - \sin z = \left(2z - \frac{8z^3}{3!} + \cdots\right) - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = z - \frac{7z^3}{6} + \cdots$$

ničlo prve stopnje, od koder sledi, da ima funkcija f pol druge stopnje. Koeficienta v glavnem delu Laurentove vrste sta enaka:

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big[z^2 f(z)\big] = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(2z) - \sin z - z\big(2\cos(2z) - \cos z\big)}{\big(\sin(2z) - \sin z\big)^2} = \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{2z + \frac{8z^3}{6} + \cdots - z - \frac{z^3}{6} - \cdots - 2z + 4z^3 - \cdots + z - \frac{z^3}{2} - \cdots}{\big(2z + \frac{8z^3}{6} + \cdots - z + \frac{z^3}{6} - \cdots\big)^2} = \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{14z^3}{3} + \cdots}{z^2 + \cdots} = \\
&= 0\,, \\
c_{-2} &= \lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin(2z) - \sin z} = \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{z}{2z + \frac{8z^3}{6} + \cdots - z - \frac{z^3}{6} - \cdots} = \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

b) Uporabimo izrek o ostankih, za kar je potrebno pogledati vse singularnosti, ki se nahajajo v krogu s središčem $\pi/4$ in polmerom $\pi/2$. Singularnosti funkcije f sovpadajo z ničlami imenovalca. Faktor:

$$\sin(2z) - \sin z = \sin z(2\cos z - 1)$$

je enak nič za $z = 0$ in za $z = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V prejšnji točki smo izračunali, da je ostanek (residuum) funkcije f v izhodišču enak $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$. Poleg izhodišča je v danem krogu le še $\pi/3$. Ker ima imenovalec tam ničlo prve stopnje, ima f pol prve stopnje in velja:

$$\mathrm{Res}\left(f, \frac{\pi}{3}\right) = \lim_{z\to\pi/3} \frac{z}{\sin(2z) - \sin z} = \lim_{z\to\pi/3} \frac{1}{2\cos(2z) - \cos z} = -\frac{3}{2}\,.$$

Če je torej K dana krožnica, orientirana v nasprotni smeri urinega kazalca, velja:

$$\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left[\mathrm{Res}(f, 0) + \mathrm{Res}\left(f, \frac{\pi}{3}\right)\right] = -3\pi i\,.$$

40. Velja:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2 + \cos t} &= \frac{1}{i} \oint_K \frac{2}{z^2 + 4z + 1} = 2\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{2}{z^2 + 4z + 1}, z = -2 + \sqrt{3}\right) = \\
&= 2\pi\, \frac{2}{z + 2 + \sqrt{3}}\bigg|_{z = -2 + \sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

Opomba. Integral bi lahko izračunali tudi brez uporabe kompleksnih števil, in sicer z univerzalno trigonometrijsko substitucijo $u = \mathrm{tg}(t/2)$. Pri tem pa bi morali integracijski interval ustrezno razdeliti.

41. Velja:

$$J := \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i}\oint_K e^{z/2}\,e^{1/(2z)}\,\frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{z/2}\,e^{1/(2z)}}{z}, z = 0\right).$$

Iz razvoja:

$$\frac{e^{z/2}\,e^{1/(2z)}}{z} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2!\,2^2} + \frac{z^3}{3!\,2^3} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2!\,2^2\,z^2} + \frac{1}{3!\,2^3\,z^3} + \cdots\right)$$

dobimo:

$$J = 2\pi\left(1 + \frac{1}{(1!\,2^1)^2} + \frac{1}{(2!\,2^2)^2} + \frac{1}{(3!\,2^3)^2} + \frac{1}{(4!\,2^4)^2} + \frac{1}{(5!\,2^5)^2} + \cdots\right) \doteq 7{\cdot}954927$$

(prikazani členi vrste zadoščajo za zahtevano natančnost).

42. Naj bo:

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - z^2 + 1}\,.$$

Očitni je $\lim_{|z|\to\infty} z f(z) = 0$. Nadalje iz razcepa:

$$\begin{aligned} z^4 - z^2 + 1 &= \left(z^2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\left(z^2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}\right) = \\ &= \left(z - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i\right)\left(z - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i\right)\left(z + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i\right)\left(z + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i\right) \end{aligned}$$

dobimo, da ima f štiri pole stopnje 1, od katerih dva ($\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$ in $-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$) ležita na zgornji polravnini. Torej je:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= 2\pi i\Big[\mathrm{Res}\big(f, \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i\big) + \mathrm{Res}\big(f, -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i\big)\Big] = \\ &= 2\pi i\left[\left.\frac{1}{\big(z - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\big)\big(z + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\big)\big(z + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\big)}\right|_{z=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i} + \right. \\ &\qquad \left. + \left.\frac{1}{\big(z - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\big)\big(z - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\big)\big(z + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\big)}\right|_{z=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i}\right] = \\ &= \pi\,. \end{aligned}$$

43. Velja:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

kjer je $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} = \dfrac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}$. Za $\mathrm{Im}\,z \ge 0$ velja:

$$\left|e^{iz}\right| = \left|e^{-y+ix}\right| = e^{-y}\left|e^{ix}\right| = e^{-y} \le 1$$

in ker je:

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{z}{(z^2+1)^2} = 0\,,$$

je izpolnjen pogoj $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} z f(z) = 0$.

Funkcija f ima dva pola stopnje 2, in sicer v i in $-i$. Torej bo:

$$J = \operatorname{Re}\Big[2\pi i \operatorname{Res}(f, i)\Big]\,.$$

Ker gre za pol druge stopnje, je:

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=i} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2} = e^{iz}\Big[(z+i)^{-2} - 2(z+i)^{-3}\Big]\bigg|_{z=i} = -\frac{i}{2e}$$

in zato $J = \pi/e$.