Naloga: Kroglico spustimo z višje točke v nižjo tako, da se giblje po krivulji brez trenja. Poiščite enačbo tiste krivulje, po kateri opravi pot najhitreje. Problem je znan tudi kot *Problem brahistohrone* in ga je v tej obliki leta 1696 zastavil Jacob Bernoulli.

Rešitev: Lahko predpostavimo, da je začetna točka $\boldsymbol{T}_1(0,0)$ in končna $\boldsymbol{T}_2(b,B)$, $B<0$. Čas, ki ga potrebuje kroglica za potovanje, je

$$t_{12} = \int_{\boldsymbol{T}_1}^{\boldsymbol{T}_2} \frac{ds}{v},$$

kjer je ds element ločne dolžine in v hitrost kroglice na krivulji. Zaradi zakona o ohranitvi energije mora veljati

$$\frac{1}{2} m\, v^2 = m\, g\, (-y).$$

Predznak pri y je negativen, ker je kroglica vseskozi pod abscisno osjo. Tako dobimo

$$v = \sqrt{2g\,(-y)}$$

ter

$$t_{12} = \int_{\boldsymbol{T}_1}^{\boldsymbol{T}_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g\,(-y)}} dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Poiskati je potrebno torej funkcijo y tako, da bo čas minimalen. Gre za klasični problem iz variacijskega računa. Funkcional, katerega minimum iščemo je

$$f(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{-2g\,y}}.$$

Ker ni odvisen od x, lahko Euler-Lagrangeovo enačbo poenostavimo v

$$f(x,y,y') - y' \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y') = k_1,$$

oziroma

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{-2g\,y}} - y' \frac{y'}{\sqrt{-2g\,y}\sqrt{1+y'^2}} = k_1.$$

Tako dobimo

$$-y(1+y'^2) = k^2, \tag{1}$$

kjer smo s k označili novo konstanto $k = 1/\sqrt{2g\,k_1^2}$. Dobljeno diferencialno enačbo rešujemo z nastavkom $y = -k^2\,\sin^2 t$. Iz (1) tako dobimo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{k^2}{y} - 1 = \left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)^2 .$$

Ker moramo pri korenjenju izbrati negativni predznak (saj je za majhne t funkcija y gotovo padajoča), dobimo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos t}{\sin t}. \tag{2}$$

Iz zveze

$$dx = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt}dt,$$

z upoštevanjem nastavka za y ter relacije (2) pridemo do

$$dx = 2k^2\,\sin^2 t\,dt,$$

oziroma

$$x = k^2\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C.$$

Toda $x(0) = 0$, saj smo tako izbrali začetno točko $\boldsymbol{T}_1$, torej je $C = 0$.
Z uvedbo nove spremenljivke $\theta = 2t$ enačbe malce poenostavimo

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \frac{1}{2}k^2\left(\theta - \sin\theta\right), \\ y(\theta) &= -\frac{1}{2}k^2\left(1 - \cos\theta\right). \end{aligned}$$

Dobili smo enačbo za cikloido.
Določiti moramo še konstanto k. Zadostiti moramo namreč še robnima pogojema,ki določata, skozi kateri točki gre krivulja. Ker je $x(0) = y(0) = 0$, je prvemu pogoju že zadoščeno, drugi pa se glasi

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \frac{1}{2}k^2\left(\theta - \sin\theta\right) = b, \\ y(\theta) &= -\frac{1}{2}k^2\left(1 - \cos\theta\right) = B. \end{aligned}$$

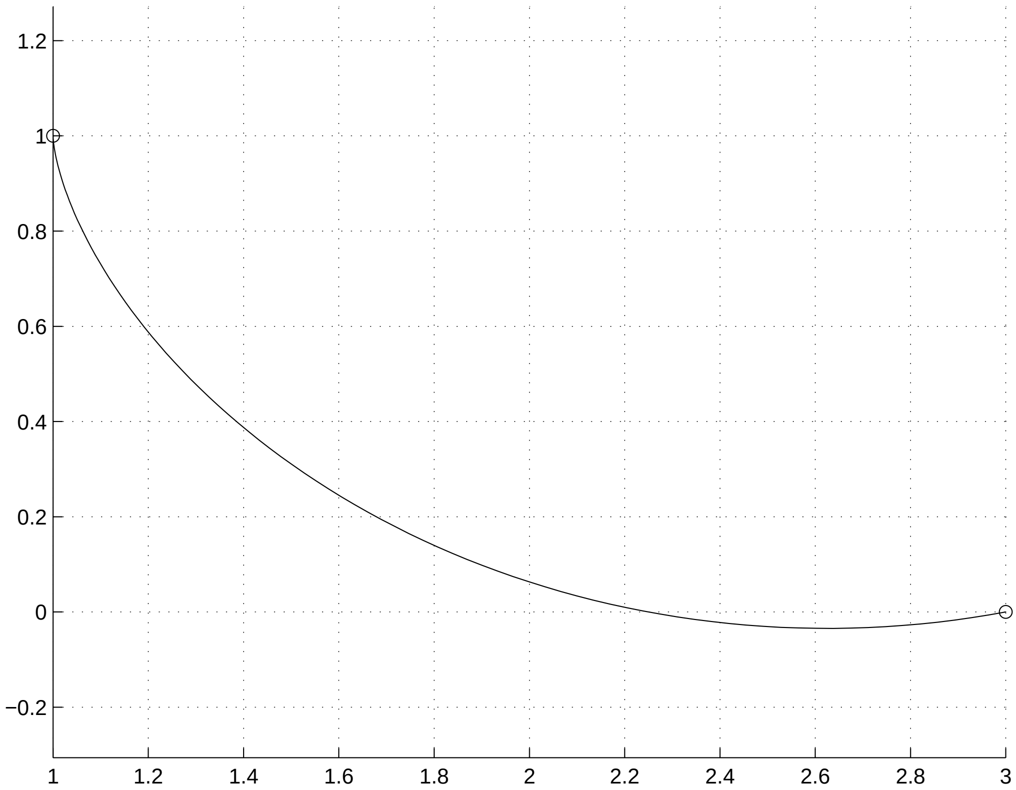
Če enačbi delimo in poenostavimo, dobimo enačbo za θ

$$g(\theta) = 1 - \cos\theta + \frac{B}{b}\left(\theta - \sin\theta\right) = 0.$$

Funkcija g ima trivialno rešitev $\theta = 0$, vendar nas ta ne zanima. Ker je $g(0) = g'(0) = 0$ in $g''(0) = 1 > 0$, ima g v točki $\theta = 0$ lokalni minimum z vrednostjo 0. Po drugi strani je $g(2\pi) = 2\pi \frac{B}{b} < 0$, zato ima g vsaj eno ničlo θ^* na $[0, 2\pi]$. V splošnem jo lahko poiščemo le numerično. Konstanto k sedaj izračunamo iz zveze

$$k = \sqrt{\frac{2b}{\theta^* - \sin\theta^*}}.$$

S tem je krivulja natančno določena (seveda v parametrični obliki).



Slika 1: Slika brahistohrone med točkama $\boldsymbol{T}_1(1, 1)$ in $\boldsymbol{T}_2(3, 0)$.