Naloga: Za reševanje sistemov nelinearnih enačb je zelo znana in uporabna t.i. *Newtonova metoda v več dimenzijah*. Pogledali si jo bomo za poseben primer, ko imamo dve nelinearni enačbi z dvema neznankama. Recimo torej, da rešujemo sistem enačb

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

kjer je

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Metoda, ki jo bomo opisali, je podobna Newtonovi iteraciji pri reševanju nelinearne enačbe z eno spremenljivko. Definirajmo

$$\boldsymbol{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X}_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n,y_n) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n,y_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n,y_n) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n,y_n) \end{pmatrix}.$$

Potem zaporedje približkov

$$\boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{X}_n - J_{\boldsymbol{F}}^{-1}(\boldsymbol{X}_n)\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_n)$$

za dovolj dober približek $\boldsymbol{X}_0 = (x_0, y_0)^T$ konvergira proti rešitvi enačbe (1). Pri tem moramo paziti, da izraza $J_{\boldsymbol{F}}^{-1}(\boldsymbol{X}_n)$ ne računamo z inverzno matriko, ampak ga prevedemo na reševanje sistema enačb (matriki $J_{\boldsymbol{X}}$ rečemo Jacobijeva matrika sistema ali Jacobian).

Primer 1 *Rešujemo nelinearno enačbo v kompleksnem $z^3 + 1 = 0$. Z uvedbo standardne spremenljivke $z = x + i\,y$ jo lahko prevedemo na reševanje sistema $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}$, kjer je*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x^3 - 3\,x\,y^2 + 1 \\ 3\,x^2\,y - y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jacobijeva matrika sistema je

$$J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 3\,x^2 - 3\,y^2 & -6\,x\,y \\ 6\,x\,y & 3\,x^2 - 3\,y^2 \end{pmatrix}.$$

Sistem ima tri rešitve. Naša naloga je, da narišemo naslednjo sliko. Izberemo si območje v ravnini (npr. okrog izhodišča). Vsako ok treh rešitev obarvamo z eno od barv. Točko v izbranem območju obarvamo s tisto barvo, kot je obarvana rešitev, h kateri je konvergirala Newtonova metoda z izbrano točko kot začetnim približkom. Tiste točke, ki niso privedle do konvergence, obarvamo črno.