Ljubljana, 22. april 2014

1. kolokvij iz Matematičnih orodij v fiziki, rešitve
Praktična matematika

1. (a) Postavimo si koordinatni sistem, najbolje kar v točko A. Potem je $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$ in $C = (a/2, a\sqrt{3}/2)$.

   Sila AC:
$$\vec{F}_{AC} = \frac{e_A e_C}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r}$$
   kjer je $\vec{r} = C - A = (a/2, a\sqrt{3}/2)$ vektor, ki kaže od krivca sile do žrtve sile, $r = a$ pa dolžina tega vektorja (razdalja). Dobimo
$$\vec{F}_{AC} = (11.2, 19.5)\mathrm{N}$$
   Sila BC:
$$\vec{F}_{BC} = \frac{e_B e_C}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r}$$
   kjer je $\vec{r} = C - B = (-a/2, a\sqrt{3}/2)$. Dobimo
$$\vec{F}_{BC} = (22.5, -38.9)\mathrm{N}$$
   Skupaj
$$\vec{F} = (33.7, -19.4)\mathrm{N}$$
   Velikost
$$F = 38.9\,\mathrm{N}$$
   Kot
$$\alpha = -30^\circ$$
   oziroma na skici, natanko v smeri daljice CD.

   Nalogo se da rešiti grafično, saj je sila BC po velikosti ravno dvakrat večja od sile AC (prva odbojna, druga privlačna) in se seštevanje sil da opraviti z enakostraničnimi trikotniki. Velikost sil (brez smeri) je $F = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

   (b) Delo je enako spremembi elektrostatske potencialne energije. Energija ni odvisna od smeri ampak le od razdalje. Razdalja BC je enaka BD, torej se pri premiku potencialna energija glede na delec B ne spremeni. Razdalja AD je dvakratnik razdalje AC, kar se pozna na potencialni energiji glede na delec A.

   Začetna:
$$W_{e1} = \frac{e_A^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$
   Končna:
$$W_{e2} = \frac{e_A^2}{4\pi\epsilon_0 (2a)}$$
   Razlika:
$$\Delta W_e = -\frac{e_A^2}{4\pi\epsilon_0 (2a)} = -0.225\,\mathrm{J}$$
   kjer negativni predznak pove, da se potencialna energija zmanjša (zaradi odbojnosti sile je potencialna energija na večji razdalji manjša, energija se sprosti).

2. (a) Moč ustvarja delo, ki se porabi za kinetično energijo:
$$A = Pt = \frac{1}{2}mv^2$$
   od koder dobimo odvisnost hitrosti od časa:
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}}$$
   Ta izraz je izhodišče za vse nadaljne račune.

   Pot v odvisnosti od časa dobimo z integracijo:
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}$$

$$x = \int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \sqrt{\frac{2Pt}{m}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2Pt^3}{m}}$$

Izrazimo čas enega obhoda $x = 2\pi r$:

$$t = \sqrt[3]{\frac{9x^2m}{8P}} = 41.4\,\mathrm{s}$$

Tangencialni pospešek je odvod obodne hitrosti:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2P}{mt}} = 0.55\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Hitrost ob tem času:

$$v = 45.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 164\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Radialni pospešek:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = 10.35\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

(a_t, a_r) tvorita vektor pospeška, kar je rezultat naloge, vkolikor se razume, v katerih smereh kažeta komponenti.

(b) Ker ni pospeševanja, je edina sila, ki jo premagujemo, sila upora:

$$P = Fv = \frac{1}{2}\rho c S v^3 = \frac{1}{2} \cdot 1.2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0.6 \cdot 2.5\,\mathrm{m}^2 \cdot \left(160\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)^3 = 79\,\mathrm{kW}$$

3. (a) Do hitrosti ob vznožju strehe najhitreje pridemo z energijskim zakonom: kinetična energija pride iz potencialne, nekaj se pa porabi za delo trenja:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh - lF_{tr} = mgl\sin\alpha - mglk_{tr}\cos\alpha$$

$$v_1 = \sqrt{2gl(\sin\alpha - k_{tr}\cos\alpha)} = 3.11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Od tu naprej gre za poševni met. V vodoravni smeri hitrost ostane

$$v_x = v_1\cos\alpha = 2.55\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

V navpični smeri pridobi še zaradi prostega pada, spet lahko uporabimo energijskih zakon:

$$v_y = \sqrt{(v_1\sin\alpha)^2 + 2gh} = 9.04\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Dolžina:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 9.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Kot glede na vodoravnico:

$$\alpha = 74.2^\circ$$

(b) Vodoravna gibalna količina se povsem izgubi, saj se vzmet razteguje samo navpično. V navpični smeri imamo neprožni trk:

$$v'(m + m_p) = mv_y$$

$$v' = \frac{m}{m + m_p}v_y = 4.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Zdaj imamo pa kinetično energijo, ki se pretvori v prožnostno:

$$\frac{1}{2}(m + m_p)v^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$x = v\sqrt{\frac{m + m_p}{k}} = 0.1\,\mathrm{m}$$

Pri tem povesu se tudi potencialna energija še rahlo spremeni, ampak vpliv ni velik, in ga lahko zanemarimo.

4. (a) Za ribo imamo navpični met:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

in ta višina mora biti enaka višini na kateri je orel. Iz tega dobimo čas s kvadratno enačbo:

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} = 1.024\,\mathrm{s}$$

kjer smo izbrali pozitiven predznak, saj imamo dve rešitvi: ko gre riba navzgor mimo te višine in ko pade nazaj mimo te višine.

V tem času orel prepotuje pot

$$x = vt = 11.4\,\mathrm{m}$$

torej je moral biti na začetku ravno na tej vodoravni razdalji od ribe.

(b) Izvedemo neprožni trk. Ohrani se gibalna količina v obeh smereh. Uporabimo indeks P za orla (**P**tiča) in R za **R**ibo. Vodoravno:

$$G_x = m_R \cdot 0 + m_P \cdot v_P = (m_R + m_P) v_x'$$

$$v_x' = \frac{m_P}{m_P + m_R} v_P = 33.3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 9.26\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Za navpično smer potrebujemo še hitrost ribe na višini enega metra, kar dobimo iz energijskega zakona:

$$v_R = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 4.05\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$G_y = m_R \cdot v_R + m_P \cdot 0 = (m_R + m_P) v_y'$$

$$v_y' = \frac{m_R}{m_P + m_R} v_R = 0.67\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Iz tega izluščimo naklonski kot

$$\alpha = \arctan \frac{v_y'}{v_x'} = 4.2^\circ$$

dodatna Pridelati mora spremembo kinetične energije nazaj na prvotno hitrost:

$$W_k = \frac{1}{2}(m_R + m_P)(v_x'^2 + v_y'^2) = 103\,\mathrm{J}$$

$$W_k' = \frac{1}{2}(m_R + m_P) v_P^2 = 148\,\mathrm{J}$$

Razlika

$$\Delta W_k = 45\,\mathrm{J}$$