2. IZPIT IZ MATEMATIKE V PRAKSI

Praktična matematika VSŠ

6. julij 2011

Vse rešitve ustrezno utemeljite. Naloge so enakovredne. Profesor in asistent vam želita veliko uspeha.

(1) V nekem podjetju so delnice razporejene med štiri lastnike, in sicer ima A 33-odstotni delež, B 15-, C 22- in $\check{C}$ 30-odstotnega.

(a) Za sprejem poslovnih odločitev je prag odločanja 51 % (in število glasov je sorazmerno lastniškemu deležu). Izračunaj Banzhafove indekse volilne moči posameznih lastnikov.

(b) Nato vstopi v podjetje igralec D in odkupi lastniške deleže od A in B. Kakšni so potem Banzhafovi indeksi?

Ker je postopek znan in je velika večina študentov nalogo rešil prav ali le z manjšimi napakami, tu podajam le rezultate.

Pri točki (a) imajo igralci A, C in $\check{C}$ absolutni Banzhafov indeks enak $\frac{1}{2}$, relativnega pa $\frac{1}{3}$, igralec B pa ima oba enaka 0.

Pri točki (b) imajo vsi trije enake indekse: absolutni so $\frac{1}{2}$, relativni pa $\frac{1}{3}$.

(2) Igralci A, B in C si želijo pravično razdeliti predmete ①, ②, ③ in ④. Odločijo se za Knasterjev postopek zapečatenih ponudb. Igralci dajo v tabeli zapisane ponudbe.

	①	②	③	④
A	500	800	300	800
B	350	1000	200	700
C	450	800	400	850

(a) Za vsak predmet določi, kdo ga prejme.

(b) Kolikšno denarno nadomestilo mora posamezen igralec doplačati ali prejeti?

(c) S tabelo ponazori, kako ocenjuje posamezen igralec prejeto vrednost pri tem postopku za vse tri.

(č) Ali pride do zavisti? Odgovor utemelji.

Pri tem postopku je vsak predmet dodeljen igralcu, ki zanj ponudi največ. Torej dobi predmet ① igralec A, predmet ② igralec B, preostala dva pa C. Sedaj moramo poračunati še doplačila:

	ocenjuje pravični delež	prejel	doplačilo
A	800	500	-300
B	750	1000	250
C	833	1250	417

Igralec B mora torej doplačati 250 enot, C 417 enot, igralec A pa mora prejeti še 300 enot. Od denarnih nadomestil ostane 367 enot denarja, ki si ga po plačilu stroškov razdelijo na enake dele. Kako pa vsak ocenujeje prejeto premoženje sebe in drugih. To zapišemo v tabelo (v posamezni vrstici je ocena igralcev. Tako je npr. v prvi ocena igralca A o vseh treh.)

	A	B	C
A	800	550	683
B	650	750	483
C	750	600	833

Kot vidimo je vsak prepričan, da je dobil več kot ostala dva, tako da v tem primeru zavisti ni.

(3) Igralca A in B igrata naslednjo igro. Na mizo istočasno položita 1, 2 ali 3 evre. V primeru, da vložek enega od igralcev deli vsoto obeh vložkov, vložek drugega pa ne, prvi vzame ves denar. V vseh ostalih primerih si delita vsoto na pol.

(a) Zapiši to igro kot bimatrično igro.

(b) Ali je katera akcija dominantna glede na kako drugo?

(c) Določi Nashevo ravnovesje, če obstaja.

V primeru, da oba vložita enako, si delita vsoto na pol, kar pomeni, da vsak dobi svoj vložek nazaj in je na ničli. Zato so na diagonali bimatrike $(0,0)$. Če eden vloži 1 evro, drugi pa 2 ali 3, bo zgolj vložek prvega delil vsoto in bo imel 2 ali 3 evre dobička, drugi pa toliko izgube. Če eden vloži 2 evra, drugi pa 3, je vsota 5 evrov. Ker vložek nobenega ne deli vsote, vsak dobi 2,5 evra in ima tisti, ki je vložil 2 evra pol evra dobička, drugi pa pol evra izgube. Zelo natančno je igra predstavljena v spodnji tabeli:

vložek A	vložek B	vsota	vložek A deli vsoto?	vložek B deli vsoto?	prejemek A	prejemek B	dobiček A	dobiček B
1	1	2	da	da	1	1	0	0
1	2	3	da	ne	3	0	2	-2
1	3	4	da	ne	4	0	3	-3
2	1	3	ne	da	0	3	-2	2
2	2	4	da	da	2	2	0	0
2	3	5	ne	ne	$2,5$	$2,5$	$0,5$	$-0,5$
3	1	4	ne	da	0	4	-3	3
3	2	5	ne	ne	$2,5$	$2,5$	$-0,5$	$0,5$
3	3	6	da	da	3	3	0	0

Torej je bimatrika

$$\begin{bmatrix} (0,0) & (2,-2) & (3,-3) \\ (-2,2) & (0,0) & (\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \\ (-3,3) & (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & (0,0) \end{bmatrix}$$

Kot vidimo, je druga vrstica dominantna glede na tretjo, prva pa glede na preostali dve. Torej je za igralca A akcija "položim 2 evra" dominantna glede na akcijo "položim 3 evre", akcija "položim 1 evro" pa je dominantna glede na ostali dve. Enako velja za igralca B. Iz tega sledi tudi, da je edino Nashevo ravnovesje, ko oba položita 1 evro.

(4) Pri igri nimble za spodnja dva primera določi, ali je položaj igralca na potezi dobljen ali izgubljen. Če je dobljen, odigraj igro do konca, pri čemer nasprotnik vedno premakne najbolj desni žeton za štiri mesta v levo (oziroma na polje 0, če je na poljih 1, 2, 3 ali 4).

(a)

				○					○			○						○	

(b)

							○				○			○		○		○	

Igra nimble je preoblečena igra nim. Če je kovanec na n-tem polju, predstavlja kupček velikosti n. (Prvo polje z leve je mesto 0.)

V prvem primeru je

$$\begin{array}{rcr} 4 & = & 100 \\ 9 & = & 1001 \\ 12 & = & 1100 \\ 18 & = & 10010 \\ \hline \Sigma & = & 10011 \end{array}$$

Igralec na potezi je v dobljenem položaju, saj je nim vsota različna od 0. Prestaviti moramo žeton na polju 18, in sicer mora biti novo polje število $00001_2 = 1$. Prestavimo ga torej za 17 polj v levo. Nov položaj je

	○			○					○			○							

Nasprotnik premakne najbolj desen žeton za štiri polja v levo:

	○			○				○	○										

Nim vsota pred našo potezo je

$$\begin{array}{rcr} 1 & = & 1 \\ 4 & = & 100 \\ 8 & = & 1000 \\ 9 & = & 1001 \\ \hline \Sigma & = & 0100 \end{array}$$

Premaknemo torej žeton s polja 4 na polje 0:

○	○							○	○										

Nasprotnik premakne žeton s polja 9 na polje 5.

○	○				○			○											

Izračunajmo nim vsoto

$$\begin{array}{rcr} 1 & = & 1 \\ 5 & = & 101 \\ 8 & = & 1000 \\ \hline \Sigma & = & 1100 \end{array}$$

Premaknemo žeton s polja 8 na polje 4:

○	○			○	○														

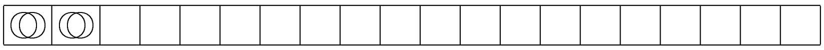
Po nasprotnikovi potezi imamo:

○	○○			○															

Ker je nim vsota

$$\begin{array}{rcr} 1 & = & 1 \\ 1 & = & 1 \\ 4 & = & 100 \\ \hline \Sigma & = & 100 \end{array}$$

moramo prestaviti desni žeton na polje 0.



Nasprotnik enega od preostalih žetonov v igri premakne na polje 0, nato storimo to še mi.

V drugem primeru je igralec na potezi v izgubljenem položaju, saj je nim vsota enaka 0:

$$
\begin{array}{rcr}
7 & = & 111 \\
11 & = & 1011 \\
14 & = & 1110 \\
16 & = & 10000 \\
18 & = & 10010 \\
\hline
\Sigma & = & 00000
\end{array}
$$