1. IZPIT IZ PRAKTIČNE MATEMATIKE

Praktična matematika VSŠ

23. junij 2011

Vse rešitve ustrezno utemeljite. Naloge so enakovredne. Profesor in asistent vam želita veliko uspeha.

(1) Pri banki najamemo kredit za 20 let. Letna obrestna mera znaša 7,5 %, kapitalizacija pa je mesečna s sorazmerno obrestno mero. Izračunajo nam, da bo znašal mesečni obrok 402,80 €, poleg tega pa nam na začetku zaračunajo še 500 € stroškov odobritve kredita.

- (a) Koliko znaša celotna vsota, ki jo bomo plačali banki?
- (b) Kolikšen kredit smo najeli?
- (c) Kolikšen bi bil mesečni obrok pri 25-letni dobi odplačevanja?

Število obrokov je $12 \cdot 20 = 240$. Banki torej plačamo

$$240 \cdot 402{,}80 \text{ €} + 500 \text{ €} = 97172 \text{ €}.$$

Letna obrestna mera je 7,5 %. Ker gre za sorazmerno obrestovanje je mesečna $\frac{1}{12} \cdot 7{,}5\% = 0{,}625\%$. Faktor obrestovanja je torej $r = 1{,}00625$. Formula za naš dolg po k obrokih je

$$a_k = ar^k - b\frac{r^k - 1}{r - 1},$$

pri čemer je a začetni dolg (torej višina našega kredita), b pa obrok (torej 402,80 €). Vemo, da je $a_{240} = 0$. Zato

$$0 = ar^{240} - b\frac{r^{240} - 1}{r - 1}$$

oziroma

$$a = b\frac{r^{240} - 1}{r^{240}(r - 1)} = 402{,}80 \text{ €} \cdot \frac{1{,}00625^{240} - 1}{1{,}00625^{240} \cdot 0{,}00625} = 50000{,}42 \text{ €}.$$

Vzeli smo 50000 € kredita. Pri 25-letni dobi je obrokov $25 \cdot 12 = 300$. Po isti formuli kot zgoraj je

$$0 = ar^{300} - b\frac{r^{300} - 1}{r - 1},$$

pri čemer sedaj znan začetni dolg $a = 50000$ € in iščemo b. Dobimo

$$b = 50000 \text{ €} \cdot \frac{1{,}00625^{300} \cdot 0{,}00625}{1{,}00625^{300} - 1} = 369{,}50 \text{ €}.$$

(2) V času trenutne politične krize se poslanci želijo prepričati, kakšno je mnenje kolegov o možnih rešitvah. Zato se dogovorijo za debate v trojkah, tako da bo vsak slišal mnenje vseh ostalih, seveda pa bo v trojki z vsakim natanko enkrat. Ali je to izvedljivo? Če je, koliko je vseh trojk in v kolikih vsak sodeluje? Ali je mogoče razporediti zasedanja trojk tako, da potekajo istočasno in je vseh 90 poslancev sodeluje hkrati v eni od trojk? Na ista vprašanja odgovori še za primer, ko se jim pridruži še predsednik države (in jih je torej 91).

Vprašanje, ali je mogoče sestaviti trojke tako, da bosta vsaka dva v isti trojki natanko enkrat, je ekvivalentno vprašanju, ali obstaja Steinerjev sistem trojk. Vprašanje o uskladitvi urnikov je ekvivalentno obstoju Kirkmanovega sistema trojk.

Steinerjev sistem trojk za n točk obstaja natanko tedaj, ko ima n pri deljenju s 6 ostanek 1 ali 3, Kirkmanov pa natanko tedaj, ko ima ostanek 3.

Ker je 90 deljivo s 6, iz zgornjega sledi, da to ni izvedljivo, saj ne obstaja Steinerjev (kaj šele Kirkmanov) sistem trojk.

V drugem primeru ima število 91 ostanek pri deljenju s 6 enak 1. Steinerjev sistem trojk torej obstaja in se lahko razporedijo na željen način. Ne obstaja pa Kirmanov sistem trojk, torej urnikov ni mogoče uskladiti. Pri tej konfiguraciji je $v = 91$, $k = 3$, zato je vsak v $r = \frac{v-1}{2} = 45$ trojkah, število trojk pa je $b = \frac{v(v-1)}{6} = 1365$.

(3) Določi obrnljive elemente in njihove inverze v množici $\mathbb{Z}_{20}$.

V množici $\mathbb{Z}_n$ so obrnljivi natanko tisti elementi, ki so tuji številu n. Za $n = 20$ imamo torej $\mathbb{Z}_{20}^* = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$. Poiščimo še inverze. Vemo, da sta v $\mathbb{Z}_n$ elementa 1 in $n-1$ vedno sama sebi inverz. Še preverimo

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 \bmod 20 &= 1 \bmod 20 = 1, \\ 19 \cdot 19 \bmod 20 &= 361 \bmod 20 = 1. \end{aligned}$$

Pri ostalih obrnljivih elementih lahko poiskušamo na pamet. Hitreje gre, če opazimo, da mora imeti produkt dveh inverznih si elementov na zadnjem mestu enico, če naj bo ostanek pri deljenju z 20 enak 1. Za inverz števila 3 imamo torej le dva kandidata: 7 in 17. Vidimo

$$3 \cdot 7 \bmod 20 = 21 \bmod 20 = 1.$$

Potem je edina možnost, da sta si inverzna tudi 13 in 17. In res:

$$13 \cdot 17 \bmod 20 = 221 \bmod 20 = 1.$$

Velja še

$$\begin{aligned} 9 \cdot 9 \bmod 20 &= 81 \bmod 20 = 1, \\ 11 \cdot 11 \bmod 20 &= 121 \bmod 20 = 1. \end{aligned}$$

Torej: elementi 1, 9, 11 in 19 so sami sebi inverzi, medtem ko sta si inverzna še 3 in 7 ter 13 in 17.

(4) Določi, ali je pri naslednjih dveh igrah nim igralec na potezi v dobljenem ali izgubljenem položaju. Če je v dobljenem, odigraj igro do konca, pri čemer nasprotnik vselej z najmanjšega kupčka vzame tri žetone (oziroma vse, če so manj kot trije).

(a) Kupčki vsebujejo 9, 21, 12, 10 in 26 žetonov.

(b) Kupčki vsebujejo 13, 8, 17 in 7 žetonov.

V prvem primeru je igralec na potezi v izgubljenem položaju, saj je nim vsota enaka 0:

$$\begin{array}{rcr} 9 & = & 1001 \\ 21 & = & 10101 \\ 12 & = & 1100 \\ 10 & = & 1010 \\ 26 & = & 11010 \\ \hline \Sigma & = & 00000 \end{array}$$

V drugem primeru je

$$\begin{array}{rcr} 13 & = & 1101 \\ 8 & = & 1000 \\ 17 & = & 10001 \\ 7 & = & 111 \\ \hline \Sigma & = & 10011 \end{array}$$

Igralec na potezi je v dobljenem položaju. Vzeti moramo žetone iz kupčka s 17 žetoni, in sicer mora biti novo število $00010_2 = 2$. Torej vzame 15 žetonov. Kupčki so zdaj veliki 13, 8, 2 in 7 žetonov. Nasprotnik izprazni kupček z 2 žetonoma. Zdaj je položaj

$$\begin{array}{rcr} 13 & = & 1101 \\ 8 & = & 1000 \\ 7 & = & 111 \\ \hline \Sigma & = & 0010 \end{array}$$

Sedaj moramo vzeti žetone s kupčka s 7 žetoni, in sicer mora biti novo število $101_2 = 5$, torej vzamemo 2 žetona. To je zdaj najmanjši kupček, zato nasprotnik z njega vzame 3 žetone. Zdaj je stanje

$$\begin{array}{rcr} 13 & = & 1101 \\ 8 & = & 1000 \\ 2 & = & 10 \\ \hline \Sigma & = & 0111 \end{array}$$

Na tej potezi moramo žetone vzeti s kupčka s 13 žetoni. Novo stanje mora biti $1010_2 = 10$. Nasprotnik izprazni kupček z dvema žetonoma. Sedaj imamo

$$\begin{array}{rcr} 10 & = & 1010 \\ 8 & = & 1000 \\ \hline \Sigma & = & 0010 \end{array}$$

Tudi brez računa vemo, da če imamo dva različno velika kupčka, večjega zmanjšamo tako, da bosta enako velika in nato oponašamo dejanja nasprotnika.