3. IZPIT IZ MATEMATIKE V PRAKSI
Praktična matematika VSŠ
6. september 2011

Vse rešitve ustrezno utemeljite. Naloge so enakovredne. Profesor in asistent vam želita veliko uspeha.

(1) Starša ob rojstvu sina odpreta poseben račun in naj položita 10000 €. Namenjen je renti za študentske dni. Mesečni obrok rente bo 500 €, prvega pa bo sin prejel ob svojem 19. rojstnem dnevu.

(a) Koliko časa bo prejemal rento?
(b) Koliko bo star, ko bo prejel zadnji obrok (koliko let in mesecev)?
(c) Koliko bo znašal zadnji obrok?

Letna obrestna mera je vseskozi 5 % z mesečnim pripisom obresti, obrestovanje pa je konformno.

Ker je obrestovanje konformno lahko kljub mesečnemu pripisu obresti vsoto po 19 letih izračunamo po formuli

$$10000 \text{ €} \cdot 1{,}05^{19} = 25269{,}50 \text{ €}.$$

Tedaj sin prejme prvi obrok $b = 500$ € in je stanje na računu

$$a_0 = 25269{,}50 \text{ €} - 500 \text{ €} = 24769{,}50 \text{ €}.$$

Nato se vsak mesec vsota obrestuje in izplača en obrok. Tako je po enem mesecu

$$a_1 = a_0 r - b,$$

kjer je $r = \sqrt[12]{1{,}05} = 1{,}004074$ faktor obrestovanja. Po drugem mesecu je

$$a_2 = a_1 r - b = a_0 r^2 - br - b,$$

in po n-tem mesecu

$$a_n = a_{n-1} r - b = a_0 r^n - b r^{n-1} - \ldots - br - b = a_0 r^n - b\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Zanima nas, za koliko časa bo vsota zadoščala, torej kdaj bo račun prazen:

$$0 = a_0 r^n - b\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Če označimo $x = r^n$, je

$$x = \frac{b}{b - a_0(r-1)} = \frac{500}{500 - 24769{,}50 \cdot 0{,}004074} = 1{,}253$$

in $n = \frac{\log x}{\log r} = 55{,}44$. Po 55 mesecih torej ostane še nekaj na računu, in sicer

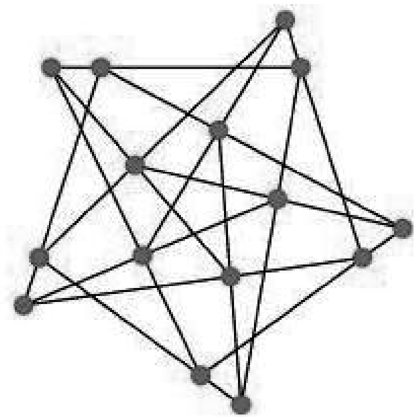
$$a_{55} = a_0 r^{55} - b\frac{r^{55} - 1}{r - 1} = 24769{,}50 \text{ €} \cdot 1{,}004074^{55} - 500 \text{ €} \cdot \frac{1{,}004074^{55} - 1}{0{,}004074} = 221{,}78 \text{ €}.$$

To se obrestuje še en mesec, tako da je zadnji obrok

$$a_{56} = a_{55} r = 221{,}78 \text{ €} \cdot 1{,}004074 = 222{,}68 \text{ €}.$$

Zadnji obrok prejme po 56 mesecih, ko je star 23 let in 8 mesec, mesec prej pa prejme zadnji poln obrok.

(2)



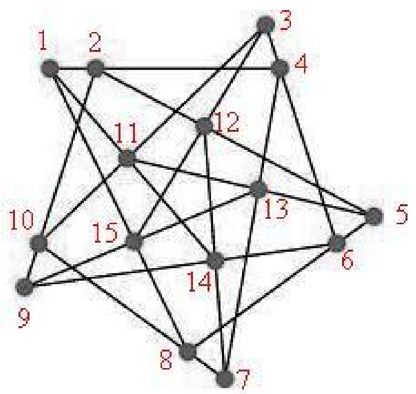
Na sliki je narisana Cremona-Richmondova konfiguracija. Debele pike predstavljajo točke, daljice pa bloke.

(a) Utemelji, zakaj gre za kominatorično konfiguracijo.

(b) Katerega tipa je?

(c) Oštevilči točke in zapiši vse bloke.

(č) Koliko parov se ne sreča?



Na sliki smo oštevičili točke. Potem imamo naslednje bloke:

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \{1,2,4\}, & B_9 &= \{4,7,13\},\\
B_2 &= \{1,11,14\}, & B_{10} &= \{5,6,8\},\\
B_3 &= \{1,8,15\}, & B_{11} &= \{5,11,13\},\\
B_4 &= \{2,5,12\}, & B_{12} &= \{6,9,14\},\\
B_5 &= \{2,9,10\}, & B_{13} &= \{7,8,9\},\\
B_6 &= \{3,4,6\}, & B_{14} &= \{7,12,14\},\\
B_7 &= \{3,10,11\}, & B_{15} &= \{9,13,15\}.\\
B_8 &= \{3,12,15\}, & &
\end{aligned}
$$

Gre za kominatorično konfiguracijo, saj so izpolnjeni vsi trije pogoji:

- vsaka točka je vsebovana v istem številu blokov (v našem primeru $r = 3$),
- vsak blok vsebuje enako število točk (v našem primeru $k = 3$),
- noben par točk ni hkrati v več kot enem bloku.

Število točk je $v = 15$, blokov pa $b = 15$. Opravka imamo s konfiguracijo $(15_3, 15_3)$, oziroma na kratko s simetrično konfiguracijo (15_3).

Število parov, ki se ne sreča, nam da formula

$$\binom{v}{2} - b\binom{k}{2} = \binom{15}{2} - 15\binom{3}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} - 15 \cdot 3 = 105 - 45 = 60.$$

(3) V dvoboju teniških ekip s po petimi igralci se pomerita Latinska ekipa z igralci a, b, c, d, e in Grška ekipa s tenisači $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$. Vsak igra proti vsakemu (natanko enkrat). Dvoboj poteka pet dni od ponedeljka do petka, igre pa sodi pet sodnikov ①, ②, ③, ④ in ⑤. Sestavi tak urnik tekmovanj, da bo vsak dan na sporedu pet iger, da bo vsak igralec igral vsak dan natanko eno igro, da bo vsak sodnik vsak dan sodil natanko eno igro in da bo vsak sodnik sodil vsem igralcem natanko enkrat. (Na primeren način moraš izpolniti spodnjo tabele. Nasvet: ortogonalni latinski kvadrati.)

	①	②	③	④	⑤
ponedeljek	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)
torek	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)
sreda	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)
četrtek	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)
petek	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)

Naša naloga je poiskati dva latinska kvadrata (to bo izpolnilo pogoj, da je vsak igralec po natanko enkrat v vsaki vrstici in vsakem stolpcu), ki sta ortoganalna (na ta način se bo vsak par pojavil natanko enkrat). Latinske kvadrate znamo skonstruirati z modularno aritmetiko. Vemo, da je $L_a(n)$ latinski kvadrat, če je a obrnljiv element v $\mathbb{Z}_n$, kar je res natanko tedaj, ko je število a tuje številu n. V našem primeru je $n = 5$ praštevilo, tako da lahko vzamemo za a kateri koli neničelen element $\mathbb{Z}_5$. Nadalje vemo, da sta $L_a(n)$ in $L_b(n)$ ortogonalna, če je poleg a in b tudi $|a - b|$ obrnljiv v $\mathbb{Z}_n$. Za nas bosta torej dobra kakršna koli različna neničelna a in b. Lahko vzamemo kar

$$L_1(5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad L_2(5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Če v prvem zamenjamo po vrsti številke z igralci Latinske ekipe, v drugem pa Grške, dobimo en možen razpored

	①	②	③	④	⑤
ponedeljek	(a,α)	(b,β)	(c,γ)	(d,δ)	(e,ε)
torek	(b,γ)	(c,δ)	(d,ε)	(e,α)	(a,β)
sreda	(c,ε)	(d,α)	(e,β)	(a,γ)	(b,δ)
četrtek	(d,β)	(e,γ)	(a,δ)	(b,ε)	(c,α)
petek	(e,δ)	(a,ε)	(b,α)	(c,β)	(d,γ)

(4) Kolikšna je verjetnost, da v sedmih metih kovanca trikrat zapored pade grb? Vsaj kolikokrat moramo vreči kovanec, da bo verjetnost takega niza vsaj 40%?

Če je verjetnost, da poizkus uspe p in ga ponavljamo, potem smo z $v_{n,k}$ označili verjetnost, da bo v n ponovitvah poizkus uspel k-krat zapored. Z $w_{n,k} = 1 - v_{n,k}$ pa smo označili verjetost nasprotnega dogodka (torej, da poizkus ne uspe k-krat zapored). Pokazali smo, da če definiramo (za fiksen k) $a_n = \frac{w_{n,k}}{p^n}$, potem za ta števila velja zveza

$$a_n \frac{p}{q} = a_{n-1} + \ldots + a_{n-k},$$

prvih k členov pa je

$$a_0 = 1,\ a_1 = \tfrac{1}{p},\ \ldots,\ a_{k-1} = \tfrac{1}{p^{k-1}}.$$

Mi iščemo $v_{7,3}$, pri čemer je $p = \frac{1}{2}$. Zato je

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

in

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 4.$$

Računamo naprej:

$$a_3 = 7,\ a_4 = 13,\ a_5 = 24,\ a_6 = 44,\ a_7 = 81.$$

Potem je

$$w_{7,3} = a_7 p^7 = \frac{81}{128}$$

in

$$v_{7,3} = 1 - w_{7,3} = \frac{47}{128} = 36{,}7\ \%.$$

Verjetnost, da v sedmih metih kovanca trikrat zapored pade grb je torej 36,7 %.

Pri sedmih ponovitvah je verjetnost še pod 40 %. Naslednji člen je $a_8 = 149$. Potem je

$$w_{8,3} = a_8 p^8 = \frac{149}{256}$$

in

$$v_{8,3} = 1 - w_{8,3} = \frac{107}{256} = 41{,}8\ \%.$$

Torej moramo kovanec vreči vsaj osemkrat.