Delitev brez zavisti s pomočjo denarnih nadomestil

Karla Počkaj

24. februar 2009

Povzetek

Smo v družbi prijateljev in imamo posebno nalogo: Razdeliti moramo nekaj predmetov. Ali nam lahko uspe delitev, da ne bo prišlo do zavisti med prijatelji? V svoji predstavitvi bom opisala postopek delitve, ko lahko pride do zavisti, in postopek brez zavisti ob denarnih nadomestilih.

1 Uvod

Med n oseb (poimenovali jih bomo *igralci*) želimo "pravično" razdeliti enega ali več predmetov. Vsak igralec ima svoje vrednotenje predmetov oz. njihovih delov.
Predmeti: Predmeti so lahko deljivi ali pa nedeljivi.

- Če je predmet deljiv, ga lahko razdelimo na dele in posamezne dele dodelimo različnim igralcem.
- Če je predmet nedeljiv, ga je treba v celoti dodeliti enemu igralcu.

Pravičnost: Ogledali si bomo dve vrsti "pravičnosti".

- Delitev je **poštena** oz. **pravična,** če vsak igralec ocenjuje, da je tisto, kar je dobil, vredno vsaj $1/n$ celote.
- Delitev je **brez zavisti**, če vsak igralec ocenjuje, da je njegov delež vreden vsaj toliko, kot so glede na njegovo vrednotenje vredni deleži, ki so jih dobili drugi igralci.

Denar: Obravnavana postopka bosta za vsakega igralca poleg prejetih predmetov izračunala tudi velikost *denarnega nadomestila.* To pomeni, da bo igralec poleg predmetov dobil oziroma moral plačati še nekaj denarnih enot. Denarna nadomestila nam predvsem pri nedeljivih predmetih omogočijo, da lahko dosežemo pravičnost razdelitve.

Denar je sredstvo, ki ga vsi igralci vrednotijo enako, in je poljubno zamenljiv za predmete. To pomeni, da je igralcu vseeno, ali dobi predmet ali pa toliko denarnih enot, kot je njegovo vrednotenje predmeta.

Če postopek uporablja denarna nadomestila, potem je zaželeno, da ne potrebuje zunanjega financiranja (vsota denarnih nadomestil, ki jih plačajo igralci, ne sme biti manjša od vsote denarnih nadomestil, ki jih dobijo igralci).

2 Knasterjev postopek zapečatenih ponudb

Imamo n igralcev in m nedeljivih predmetov. Predmete razdelimo med igralce, na razpolago pa imamo še denarna nadomestila.

Postopek:

1. Vsak igralec v zapečateni kuverti poda svoje vrednotenje za vsakega od predmetov ("zapečatene ponudbe").
2. Predmete dobijo najboljši ponudniki. (Če več igralcev za isti predmet ponudi enako, potem je vseeno, komu ga dodelimo.)
3. Denarna nadomestila določimo tako, da vsak igralec dobi točno svoj pravi delež, tj. $1/n$ svoje celotne ponudbe.
   Matematično bistvo postopka: Za denarna nadomestila ne potrebujemo zunanjega financiranja.
4. Morebitni preostanek vplačil lahko porabimo npr. za stroške postopka ali pa ga enakomerno razdelimo med igralce.

Predstavljamo si lahko, da imamo prisotno blagajno in da blagajna najprej določeni predmet igralcu proda. Seveda proda predmet po maksimalni ceni, torej igralcu, ki je zanj ponudil največ. Za vsak predmet mora blagajna v celoti izplačati njegovo povprečno vrednost za vsakega igralca. Vsakemu igralcu mora izplačati pravičen delež.

Blagajna mora v celoti izplačati:

$$\begin{aligned}\sum_{\text{po igralcih}} \text{izplačila igralcu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \text{vsota ponudb igralca } i \\ &= \frac{1}{n}\text{vsota vseh ponudb.}\end{aligned}$$

Blagajna dobi za vsak predmet maksimalno ceno:

$$\sum_{\text{po igralcih}} \text{max cena predmeta} \geq \frac{1}{n}\text{vsota vseh ponudb}$$

Ker ni maksimalna cena nikoli manjša od povprečne, je v blagajni vedno dovolj denarja.

Opomba: Pri tem postopku lahko pride do zavisti.

Primer:
Imamo igralce A, B in C ter predmete $1, 2, 3$ in 4. Vhodni podatki ("zapečatene ponudbe"):

	1	2	3	4
A	$\boxed{300}$	80	100	$\boxed{90}$
B	50	$\boxed{320}$	170	60
C	250	200	$\boxed{180}$	90

Predmete smo dodelili najboljšim ponudnikom. Pri predmetu 4 sta dva najboljša, zato se odločimo poljubno.
Izračunamo denarna nadomestila. Pri tem negativna vrednost pomeni, da igralec dobi denar, pozitivna pa, da mora ta znesek plačati.

	pravični delež	dobil s predmeti	doplačilo
A	190	390	200
B	200	320	120
C	240	180	-60
vsota	630	890	260

Vsota doplačil je 260. Lastnost postopka je, da je ta vsota vedno nenegativna.
Poglejmo si še, kako je z zavistjo:

	A	B	C
A	190	$80 - 120 = -40$	$100 + 60 = 160$
B	$50 + 60 - 200 = -90$	200	$170 + 60 = \boxed{230}$
C	$250 + 90 - 200 = 140$	$200 - 120 = 80$	240

Vidimo, da pride do zavisti: Igralec B zavida igralcu C.

3 Delitev brez zavisti ob denarnih nadomestilih

Imamo n igralcev in n (skupin) predmetov. Iščem tako razdelitev predmetov, da vsak dobi natanko enega. Na razpolago imamo tudi denarna nadomestila.

Pri tej delitvi ne sme biti zavisti.

Vhodni podatki: Matrika B velikosti $n \times n$, pri tem b_{ij} pomeni, koliko je za igralca i vreden predmet j.

Izhod: Kateri predmet dobi posamezen igralec in koliko mora plačati/prejeti posamezen igralec, da ne bo zavisti.

Postopek:

1. Določimo razdelitev predmetov. Razdelimo tako, da za njih iztržimo čim več. Vsak igralec plača svojo ceno c_i za predmet, ki ga dobi. Predmet, ki ga dobi, označimo z i.

   V nadaljevanju računamo popuste d_i.

2. Izračunamo pomožno matriko A :

$$a_{ij} := b_{ij} - c_j = b_{ij} - b_{jj} + d_j,$$

   kjer je:
   a_{ij} ... koliko se zdi igralcu i, da je dobil igralec j,
   b_{ij} ... vrednost, ki jo za igralca i predstavlja predmet j,
   b_{jj} ... plačilo igralca j za predmet j,
   d_j ... popust (na začetku je $d_j = 0$).

3. Naredimo en krog poračunavanj:

   - Določimo zavistne igralce, ki zavidajo nezavistnim igralcem (vzamem največje zavidanje). Če jih ni, končamo.
   - Zavistnim damo toliko popusta, da se izenačijo z nezavistnimi.

   Vrnemo se na 2. točko.

Primer:
Znane so ponudbe štirih igralcev za štiri skupine predmetov. Vhodne podatke vpišem v tabelo in opravim prvi korak postopka.

	P_1	P_2	P_3	P_4
I_1	$\boxed{50}$	20	10	20
I_2	60	$\boxed{40}$	15	10
I_3	0	40	$\boxed{25}$	35
I_4	50	35	10	$\boxed{30}$
Vrednost dobljenih predmetov	50	40	25	30

Začetna "vplačila" igralcev so 145 enot.

Izračunamo pomožno tabelo z ocenami vrednosti dobljenega:

	I_1	I_2	I_3	I_4
I_1	0	-20	-15	-10
I_2	$\boxed{10}$	0	-10	-20
I_3	-50	0	0	$\boxed{5}$
I_4	0	-5	-15	0

Začetni popusti so enaki 0 (to so diagonalni elementi).
Zavidanje: I_2 zavida I_1, I_3 zavida I_4.
Dodelimo popuste: I_2 dobi 10 enot, I_3 pa 5.

	I_1	I_2	I_3	I_4
I_1	0	-10	-10	-10
I_2	10	10	-5	-20
I_3	-50	$\boxed{10}$	5	5
I_4	0	$\boxed{5}$	-10	0
Popust	0	10	5	0

Nova zavist: I_3 in I_4 zavidata I_2.
Določim nove popuste: I_3 in I_4 dobita po 5 enot popusta.
Nova nezavistna tabela:

	I_1	I_2	I_3	I_4
I_1	0	-10	-5	-5
I_2	10	10	0	-15
I_3	-50	10	10	10
I_4	0	5	-5	5
Popust	0	10	10	5

Razdelili smo 25 enot popusta. Ostane še 120 enot. Recimo, da je cena postopka $C = 100$. Ostanek 20 razdelimo enakomerno, tj. vsakemu igralcu po 5 enot dodatnega popusta.

	I_1	I_2	I_3	I_4
Popust	5	15	15	10
Cene	45	25	10	20

Lastnosti postopka:

Razdelitev predmetov v prvi točki postopka opravimo s pomočjo grafov.

Problemu priredimo poln dvodelen graf. Točke ene množice naj bodo igralci, druge pa predmeti. Za uteži vzamemo kar ustrezne elemente matrike B. V dobljenem grafu poiščemo najtežje popolno prirejanje, kar lahko naredimo z madžarsko metodo.

Zavidanje lahko predstavimo z usmerjenim grafom. Točke grafa naj bodo igralci. Ta graf naj ima dve vrsti povezav, polne in črtkane. Če obstaja povezava ij, potem igralec i maksimalno zavida igralcu j (tj. nobenemu drugemu igralcu ne zavida bolj, če pa imamo več možnosti, se odločimo za eno in jo ohranjamo tudi v nadaljevanju). Polna povezava ij pomeni, da igralec i res zavida igralcu j ($a_{ii} < a_{ij}$). Črtkana povezava ij pa pomeni, da sta igralca i in j izenačena ($a_{ii} = a_{ij}$), kar je posledica dodelitve popusta v enem izmed prejšnjih korakov. Izhodna stopnja točke je enolično določena in predstavlja število puščic, ki se začnejo v tej točki. Vsaka točka v grafu ima izhodno stopnjo največ 1.

1. Na poljubnem koraku postopka je največja permutacijska vsota po diagonali matrike A.

   DOKAZ: *Permutacijska vsota izbere en element iz vsake vrstice in vsakega stolpca ter oblikuje novo vsoto. Opazimo, da na prvem koraku permutacija pomeni razdelitev predmetov. V grafu, ki je bil prirejen problemu, je bilo to ustrezno prirejanje. Ker smo izbrali največje popolno prirejanje in predmete preštevilčili tako, da oseba i dobi predmet i, je vsota po diagonali največja. Če ni zavisti, je to konec. Sicer pa v naslednjih korakih le prištevamo in odštevamo enako število po stolpcih. To ne vpliva na neenakost, ker v vsaki permutacijski vsoti to spremembo upoštevamo natanko enkrat.* ■

2. Na nobenem koraku postopka graf ne vsebuje cikla.

   DOKAZ: *Denimo, da imamo cikel $i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1$. To pomeni:*

   $$a_{i_1,i_1} \leq a_{i_1,i_2}, \quad a_{i_2,i_2} \leq a_{i_2,i_3}, \quad \ldots \quad a_{i_k,i_k} \leq a_{i_k,i_1}.$$

   Te neenakosti seštejemo. Na levi in desni strani prištejemo še preostale diagonalne elemente. Tako dobimo dve permutacijski vsoti. Če v kakšni izmed zgornjih neenakosti nastopa stroga neenakost, pridemo v protislovje s prvo lastnostjo. Če pa povsod nastopajo enakosti, potem so vse te povezave črtkane. Te pa lahko nastanejo le iz polnih povezav. Pogledamo prejšnji korak. Tam bi moral biti cikel, ki je imel vsaj eno povezavo polno. To pa smo že videli, da ni mogoče. ■

   Ker imamo na vsakem koraku postopka acikličen graf, ga lahko razdelimo na drevesa. Vsako drevo ima koren, tj. točko, ki ima izhodno stopnjo 0 in predstavlja nezavistnega igralca, ki še ni občutil zavisti. Vsaki točki določimo nivo glede na oddaljenost od korena (koren je na nivoju 0).

3. Na začetku obstaja igralec, ki ostane nezavisten skozi celoten postopek.

   DOKAZ: *Pomagamo si z dejstvom, da se izhodna stopnja točke med postopkom ne zmanjša. O tem se prepričamo tako: Gledamo točke iz katerih izhaja puščica. Če igralec med postopkom dobi popust, lahko še vedno zavida (sedaj maksimalno zavida drugemu igralcu) ali pa se čuti "izenačen" z igralcem kateremu je prej zavidal. Če popusta ne dobi, kvečjemu še bolj zavida. Na začetku postopka imamo množico točk stopnje* 0*. Ta množica se skozi kompenzacije kvečjemu zmanjša, saj lahko kateri izmed nezavistnih igralcev postane zavisten. Vsak igralec, ki čuti zavist, je lahko po kompenzaciji samo še "izenačen" z igralcem, kateremu je prej zavidal. Ves čas imamo vsaj en koren in ta predstavlja igralca, ki ni nikoli zavisten.* ■

4. Če se med poračunavanjem igralcu I_1 spremeni pot do korena, mora nova pot vsebovati igralca I_2 različnega od I_1, ki je dobil popust. V novem grafu ima I_1 višji nivo kot I_2.

   DOKAZ: *Če se je igralcu I_1 spremenila pot do korena, je moral postati zavisten nekemu igralcu I_2. To pomeni, da je na tej poti nova povezava, ki se začne v I_1 in konča v I_2. I_1 je res na višjem nivoju kot I_2. Imamo drevo, v katerem obstaja pot od I_2 do korena (tj. točke z izhodno stopnjo* 0*), to pa pomeni, da je moral v prejšnjem krogu poračunavanj I_2 dobiti popust.* ■

5. Če naredimo vsaj k krogov poračunavanj, potem nimamo več zavistnih igralcev na nivojih od 0 do k.

   DOKAZ: *Dokazujemo z indukcijo po k.*
   $k = 1:$ *V prvem krogu poračunavanj damo popust tistim, ki zavidajo korenu. Koreni ne zavidajo nobenemu, zaradi popustov pa ni zavistnih igralcev tudi na prvem nivoju.*
   $k \rightarrow k+1:$ *Naredimo m krogov poračunavanj, kjer je $m \geq k+1$. Po indukcijski predpostavki ni zavistnih igralcev na nivojih od* 0 *do k. Recimo, da je igralec I_1, ki leži na nivoju $k+1$, zavisten. Igralcem na nižjih nivojih ne more biti zavisten, ker smo to odpravili s popusti v prejšnjih krogih poračunavanj. Torej je zavisten igralcu na istem ali višjem nivoju. V tem primeru se mu spremeni pot do korena. Po prejšnji lastnosti mora ta pot vsebovati od sebe različnega igralca, ki je v prejšnjem krogu poračunavanj dobil popust na nižjem nivoju. Takih*

pa ni. Torej tudi na nivoju $k+1$ ne dobimo zavistnih igralcev. ■

Dokazali smo naslednji izrek:

Izrek 1 *Imamo n igralcev. Postopek potrebuje $\leq n-1$ krogov poračunavanj, da odpravi zavist.*

Izrek 2 *Naj bo C cena izvedbe postopka (lahko $C=0$) in M začetna vplačila. Če vsak igralec izpolnjuje pogoj*

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \geq C,$$

potem na koncu postopka dodeljeni popusti ne presegajo začetnih vplačil M, zmanjšanih za C.

DOKAZ: *Ker na koncu postopka ni več zavisti, velja $a_{ii} \geq a_{ij}$ za vsak i, j. Potem: $(d_j - d_i) \leq (b_{jj} - b_{ij})$ za vsak i, j.*
Sedaj seštejemo za vsak i po j :

$$\sum_{j=1}^{n}(d_j - d_i) \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_{jj}}_{M} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}}_{\geq C}.$$

Za i izberem igralca, ki med postopkom nikoli ne dobi popusta (obstoj takega igralca smo že dokazali). Torej $d_i = 0$. Potem velja:

$$\sum_{j=1}^{n} d_j \leq M - C.$$

■

Literatura

[1] Martin Juvan: *Pravična delitev in delitev brez zavisti*, Seminar Matematične igre *II*, DMFA, Ljubljana, 2008.

[2] Romana Valner: *Delitev brez zavisti*, diplomska naloga, Falulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2005.

[3] Steven J. Brams, Alan D. Taylor: *An Envy-Free Cake Division Protocol*, Amer Math Monthly, 1995, str. 9–18.