Primož Potočnik

# Zapiski predavanj
# iz
# Matematike v Praksi

Ljubljana, marec 2011

Naslov: Zapiski predavanj iz Matematike v praksi
Avtor: Primož Potočnik
1. izdaja
Dostopno na spletnem naslovu `www.fmf.uni-lj.si/~potocnik`

CIP – Katložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51-7(0.034.2)
51-8(0.034.2)

POTOČNIK, Primož, 1971 –

Zapiski predavanj iz Matematike v praksi [Elektronski vir]

Primož Potočnik. - 1. izd. – El. knjiga. – Ljubljana : samozal., 2011

Način dostopa (URL):
http://www.fmf.uni-lj.si/∼potocnik/Ucbeniki/MaPra-zapiski.pdf

ISBN 978-961-93056-0-7

255518976

# Kazalo

# 1 V banki

Če želimo denar, ki ga imamo v žepu danes, shraniti za nakup nečesa v prihodnosti, ga navadno nesemo v banko. Banka nam v zameno za pravico upravljati z našim denarjem v vmesnem obdobju plača določen znesek, ki je odvisen od količine denarja, ki ji ga zaupamo, in seveda časa ležanja denarja na bančnem računu.

## 1.1 Varčevanje za eno leto

Denimo, da banka za sredstva na vpogled (sredstva, ki jih lahko kadar koli dvignemo z računa) obljublja $o$-odstotne obresti. To pomeni, da če na začetku leta na bančni račun položimo znesek $a$, nam bo banka ob koncu leta poleg zneska $a$ na račun pripisala še obresti v višini $o$ odstotkov od zneska $a$. Ob koncu leta bomo imeli tako na računu

$$a + \frac{ao}{100} = a(1 + \frac{o}{100}).$$

Na primer, če so obresti 2%, na začetku leta pa vložimo 200 EUR, bomo ob koncu leta imeli na računu

$$200(1 + \frac{2}{100}) = 204$$

evrov. Faktor

$$r = 1 + \frac{o}{100} = 1 + \frac{2}{100} = 1{,}02,$$

s katerim pomnožimo začetni znesek (*glavnico*), da dobimo znesek ob koncu prvega leta obrestovanja, imenujemo *faktor obrestovanja*. Če znesek $ar$, ki ga imamo na računu po prvem letu, pustimo obrestovati še eno leto, bomo po drugem letu tako imeli $(ar)r = ar^2$. Če z varčevanjem nadaljujemo, bomo ob koncu $n$-tega leta imeli na računu

$$a_n = ar^n.$$

ZGLED. *Koliko let moramo pustiti denar na računu, da se nam bo pri* 10% *obrestni meri glavnica vsaj podvojila?*

Ker je obrestna mera 10%, je obrestovalni faktor enak $r = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$. Če na začetku na račun položimo znesek $a$, bomo po $n$ letih imeli na računu $ar^n$. Če naj bo to vsaj $2a$, mora torej veljati

$$ar^n \geq 2a.$$

Iščemo torej najmanjši $n$, pri katerem je $r^n \geq 2$. Če neenakost logaritmiramo, dobimo

$$\log(r^n) \geq \log(2).$$

Ker je $\log(r^n) = n\log(r)$ in ker je pri $r > 1$ logaritem $\log(r)$ pozitiven, je zgornji pogoj ekvivalenten

$$n \geq \frac{\log(2)}{\log(r)} \approx \frac{0{,}69}{0{,}10} \approx 6{,}9.$$

Od tod sledi, da se nam začetni znesek podvoji ob koncu sedmega leta. ■

Zgornji zgled je pokazal na zanimivo lastnost obrestnega računa: Če pri obrestni meri $o$ odstotkov varčujemo $n$ let, skupna obrestna mera ob koncu $n$ let ni $no$ odstotkov začetnega zneska (kot bi morda kdo pričakoval), temveč nekoliko več. Koliko več? Za lažje računanje označimo

$$\bar{o} = \frac{o}{100}.$$

Na primer, če je obrestna mera 2%, je $o = 2$, in zato $\bar{o} = 0{,}02$. Videli smo, da je ob začetnem vložku $a$ ob koncu leta $n$ skupni znesek na računu enak $ar^n$. Ker je bil $a$ naš vložek, je pridobljenih obresti v $n$ letih torej $ar^n - a = a(r^n - 1)$, kar je ravno

$$\bar{o}_n = r^n - 1$$

začetnega vložka. Če izrazimo $r$ z obrestno mero $o$, dobimo

$$\bar{o}_n = (1 + \bar{o})^n - 1 = 1 + n\bar{o} + \binom{n}{2}\bar{o}^2 + \binom{n}{3}\bar{o}^3 \ldots + \bar{o}^n - 1.$$

Razlika med naivno pričakovano obrestno mero po $n$ letih varčevanja $no$ in dejansko obrestno mero $o_n$ je torej

$$n\bar{o} - \bar{o}_n = \binom{n}{2}\bar{o}^2 + \binom{n}{3}\bar{o}^3 \ldots + \bar{o}^n.$$

Če obrestna mera znaša le nekaj odstotkov (tj. če je $\bar{o}$ blizu 0 in če število let varčevanja majhno), razlika ni zelo velika. V časih hiperinflacije, ko se obrestne mere povzpnejo na 100 in več odstotkov, pa postane zgornja razlika ogromna. Na primer, če je obrestna mera $o = 100\%$, je $\bar{o} = 1$ in zato

$$n\bar{o} - \bar{o}_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \ldots + 1 = 2^n - n - 1,$$

Kar zelo hitro raste s številom let $n$.

## 1.2 Krajše kapitalizacijske dobe

V prejšnjem razdelku smo si ogledali preprost primer, pri katerem smo denar na računu pustili polno leto, obresti pa so se pripisale glavnici ob izteku leta. Časovnemu obdobju, po katerem se dogovorjene obresti pripišejo glavnici (so dejansko izplačane) rečemo *kapitalizacijska doba*. Poglejmo si, v kakšne zagate nas lahko pripelje enoletna kapitalizacijska doba.

V primeru enoletne kapitalizacijske dobe, banka obresti pripiše glavnici ob koncu koledarskega leta. Če je denar ležal na bančnem računu od 1. januarja do 31. decembra, ta način obrestovanja ne povzroča večjih težav Kaj pa naj banka naredi, če sredstva na računu ne ležijo polno leto, temveč, na primer, le $n$-ti del leta, po izteku tega obdobja pa varčevalec zahteva zaprtje računa z izplačilom glavnice in vseh natečenih obresti?

Še pred nekaj desetletji so banke pri nas v tem primeru izplačale poleg glavnice $a$ še $a\bar{o}/n$ obresti, skupaj torej $a(1+\bar{o}/n)$. Če je varčevalec nato dobljeni znesek ponovno položil na nov račun in postopek ponovil, se je po drugem obdobju vloženi znesek povečal na $a(1+\bar{o}/n)^2$. Če je postopek ponovil $n$-krat, se je ob koncu koledarskega leta vložek povečal na

$$a(1+\frac{\bar{o}}{n})^n.$$

Varčevalčev dejanski obrestovalni faktor je na letnem nivoju tako znašal

$$(1+\frac{\bar{o}}{n})^n$$

in ne $\bar{o}$, kot je bil prvotni namen banke. Če je bil varčevalec pri tem zelo hiter, si lahko mislimo, da je število $n$ postalo poljubno veliko in se je s tem varčevalčev dejanski obrestovalni faktor poljubno približal limiti

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\bar{o}}{n})^n = e^{\bar{o}}.$$

Varčevalec je pri takšnem načinu obrestovanja od banke "izsilil" obrestno mero blizu $e^{\bar{o}}-1$, namesto obrestne mere $\bar{o}$. Spomnimo se Taylorjeve vrste za eksponento funkcijo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Razlika med njegovo dejansko letno obrestno mero in obrestno mero, ki jo je načrtovala banka, je tako znašala približno

$$e^{\bar{o}} - 1 - \bar{o} = \frac{\bar{o}^2}{2!} + \frac{\bar{o}^3}{3!} + \dots$$

Če obrestna mera $\bar{o}$ znaša nekaj odstotkov do, recimo, 50% (in je zato $\bar{o}$ nekje med 0,01 in 0,5), so členi, ki v zgornji vrsti sledijo členu $\frac{\bar{o}^2}{2!}$, zanemarljivi in je tako zgornja razlika v obrestnih merah približno enaka

$$\frac{\bar{o}^2}{2!}.$$

Dokler je obrestna mera $\bar{o}$ relativno majhna (nekje med 0 in 5%), zgornja razlika ne preseže bistveno vrednosti $1{,}05^2/2 = 0{,}00125 = 0{,}125\%$, kar za banko ni prehud zalogaj. Ko pa so v časih hiperinflacije letne obrestne mere presegle 100%, je razlika med tako izsiljeno obrestno mero in s strani banke predvideno obrestno mero presegla mejo $e^{\bar{o}} - 1 - \bar{o} = e - 1 - 1 \approx 0{,}72 = 72\%$, kar pa je znesek, ki lahko banko pripelje v težak položaj. Zato so banke v časih visoke inflacije prisiljene preiti na krajša kapitalizacijska obdobja v dolžini enega meseca ali celo dneva.

Denimo, da je tako kapitalizacijska doba enaka $\frac{1}{n}$ leta. S kakšim obrestovalnim faktorjem naj banka po eni kapitalizacijski dobi pomnoži glavnico, da bo v primeru, da varčevalec drži celotno glavnico, skupaj z vsemi pripisanimi obrestmi, na računu polno leto, končni obrestovalni faktor enak $r$?

Označimo iskani obrestovalni faktor z $r_n$. Tedaj bo po prvi kapitalizacijski dobi prvotni vložek $a$ skupaj z obrestmi narasel na $ar_n$. Po drugi kapitalizacijski dobi bo znesek na računu enak $ar_n^2$, po $n$ kapitalizacijskih dobah (se pravi, po enem letu) pa $ar_n^n$. Ker želimo, da je ta znesek enak znesku, ki bi ga varčevalec dobil, če bi prvotno glavnico $a$ obrestovali s faktorjem $r$ in letno kapitalizacijsko dobo, mora veljati $ar_n^n = ar$, od koder sledi:

$$r_n = \sqrt[n]{r}.$$

Zgornja formula torej podaja zvezo med letnim faktorjem obrestovanja $r$ in faktorjem obrestovanja vloge, ki leži na računu $n$-ti del leta s pripisom obresti ob izteku te dobe.

Zgled. *Na banki vežemo 1.000 EUR za dobo 1 meseca z letno obrestno mero 5%. Koliko obresti bomo dobili ob izteku te dobe?*

Letni faktor obrestovanja znaša $r = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$. Ker sredstva ležijo na računu $\frac{1}{12}$ leta, obresti pa se pripišejo takoj po izteku te dobe, je kapitalizacijska doba enaka $\frac{1}{12}$ leta, ustrezni obrestovalni faktor pa je enak

$$r_{12} = \sqrt[12]{1{,}05} \approx 1{,}00407.$$

Če znesek 1.000 EUR pomnožimo s faktorjem $r_{12}$, dobimo 1004,07 EUR. Banka nam je torej izplačala 4,07 EUR obresti. ∎

V časih hiperinflacije, in pri nekaterih bankah tudi še danes, je kapitalizacijska doba enaka enemu dnevu. Ustrezni dnevni faktor obrestovanja je tedaj enak

$$r_D = \sqrt[365]{r},$$

Kjer je $r$ letna obrestna mera. Če v takšnih razmerah začetni znek $a$ držimo na računu $m$ dni, bomo ob koncu tega obdobja na računu imeli

$$ar_D^m = a\sqrt[365]{r}^m = ar^{\frac{m}{365}}.$$

## 1.3 Krediti in anuitete

Če želijo banke poslovati z dobičkom, morajo denar, ki so jim ga zaupali varčevalci, smotrno posoditi tistim strankam, ki potrebujejo posojilo. Obresti, ki jih pri tem zaračunajo posojilojemalcem, morajo seveda biti nekoliko višje od tistih, ki jih za bančne vloge ponujajo varčevalcem. Pri posojilih banka stranki na začetku posojilne dobe izplača dogovorjeni znesek kredita, označimo ga z $a$. Posojilojemalec nato preko celotne posojilne dobe mesečno vrača fiksni znesek $b$, ki mu pravimo tudi *anuiteta*. Ob koncu posojilne dobe morajo vplačane anuitete znašati celoten znesek posojila $a$ skupaj s pripadajočimi obrestmi.

Koliko naj bo anuiteta $b$, če posojilna doba znaša $n$ mesecev, obrestna mera pa je enaka $\bar{o}$? Letni faktor obrestovanja znaša $r_L = 1 + \bar{o}$, mesečni pa zato

$$r = \sqrt[12]{1 + \bar{o}}.$$

Po izteku prvega meseca banka h glavnici $a$ pripiše obresti $\bar{o}a$ in odšteje anuiteto $b$, ki jo je posojilojemalec v tem mesecu vrnil banki. Glavnica po prvem mesecu tako znaša

$$a_1 = ar - b.$$

Po enakem razmisleku je stanje glavnice (po pripisu obresti in upoštevanju vrnjene anuitete) enaka

$$a_2 = a_1 r - b = (ar - b)r - b = ar^2 - br - b.$$

Splošneje, če z $a_k$ označimo stanje glavnice po izteku $k$ mesecev, je $a_{k+1} = a_k r - b$. S pomočje te formule in z uporabo matematične indukcije brž dokažemo, da velja

$$a_k = ar^k - br^{k-1} - br^{k-2} - \ldots - br - b.$$

Ker mora po $m$ mesecih glavnica pasti na 0, od tod spledi enakost

$$b(r^{m-1} + r^{m-2} + \ldots + r + 1) = ar^m.$$

Če na levi strani prepoznamo vsoto geometrijske vrste, vidimo, da od tod sledi

$$b = a\frac{r^m(r-1)}{r^m - 1}.$$

## 2 Pravična delitev kolača

V vsakdanjem življenju se velikokrat znajdemo v situaciji, ko je potrebno neko premoženje razdeliti med več ljudi, tako da se noben ne čuti prikrajšanega. Če gre za premoženje v denarju, je naloga preprosta – vsak upravičenec prejme svoj proporcionalni delež celotnega premoženja. Težava nastopi, če je oblika premoženja takšna, da posamezne dele celote različni upravičenci vrednotijo drugače. Na primer, če je potrebno deliti zapuščino, ki obsega nekaj neprimičnin, avto, zbirko starih starih kovancev in morda nekaj denarja, ni nujno, da vsi dediči posamezni del zapuščine cenijo enako. Možna rešitev problema bi bila, da premoženje najprej prodajo na trgu (in s tem vrednotenje delov premoženja prepustijo trgu), in si iztržek v enakih delih razdelijo med seboj. Kaj pa, če tega nočejo storiti – denimo zato, ker trenutne razmere na trgu niso ugodne za prodajo?

V nadaljevanju bomo opisali, kako poiskati zadovoljivo delitev premoženja v primeru dveh ali treh upravičencev. Premoženje bomo pri tem nazorno imenovali *kolač*, upravičence pa *igralce*. Predpostavili bomo, da lahko kolač delimo v poljubno majhne dele. Pri tem dopuščamo, da vsak igralec po svoje oceni, kolikšen del celote predstavlja posamezen del kolača.

### 2.1 Proporcionalna delitev in delitev brez zavisti

DEFINICIJA 2.1 Naj bo $\mathcal{D}$ delitev kolača med $n$ igralcev. Delitev $\mathcal{D}$ je *proporcionalna*, če vsak igralec meni, da je dobil vsaj $n$-ti del kolača. Delitev $\mathcal{D}$ je *brez zavisti*, če vsak igralec meni, da nihče ni dobil več kot on sam.

TRDITEV 2.2 *Vsaka delitev kolača brez zavisti je tudi proporcionalna.*

DOKAZ: Denimo, da trditev ne drži. Tedaj obstaja delitev kolača $\mathcal{D}$ med $n$ igralcev, ki je brez zavisti, ni pa proporcionalna. Po definiciji proporcionalnosti to pomeni, da obstaja igralec, denimo $A$, ki meni, da je dobil strogo manj kot $\frac{1}{n}$ kolača. Ker pa je delitev brez zavisti, $A$ hkrati meni, da nihče drug ni dobil več kot on. Igralec $A$ torej meni, da je vsak od $n$ igralcev dobil strogo manj kot $\frac{1}{n}$ kolača, in zato vsi skupaj strogo manj kot $n\frac{1}{n}$ kolača. To pa je seveda nemogoče, saj je bil med igralce razdeljen celoten kolač. To protislovje kaže, da je bila naša začetna predpostavka (da trditev ne drži) napačna. ■

Na tem mestu se seveda postavi vprašanje, ali morda pojma "delitev brez zavisti" in "proporcionalna delitev" kar sovpadata. Če kolač delimo med dva igralca, je temu gotovo tako, saj pri proporcionalni delitvi vsak igralec meni, da je dobil vsaj pol kolača, od koder sledi, da drugi igralec ni mogel dobiti več kot on sam. Kot kaže naslednji zgled, pa pri več kot dveh igralcih temu ni več tako.

Zgled. *Poišči proporcionalno delitev kolača med tri igralce, ki ni brez zavisti.*

Denimo, da kolač razrežemo na tri kose, $X$, $Y$ in $Z$, in da trije igralci, $A$, $B$ in $C$, vrednotijo kose kolača kot prikazuje spodnja tabela.

| | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |
| $B$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $C$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

Oglejmo si delitev $\mathcal{D}$, pri kateri $A$ dobi kos $X$, $B$ dobi kos $Y$ in $C$ dobi kos $Z$. Delitev $\mathcal{D}$ je proporcionalna, saj vsak igralec meni, da je prejel natanko $\frac{1}{3}$ kolača. Ni pa brez zavisti, saj igralec $A$ zavida igralcu $B$, ker meni, da je $B$ prejel $\frac{4}{9}$ kolača, on sam pa le $\frac{1}{3}$. ∎

## 2.2 Delitev za dva igralca: reži in izberi

Postopek delitve kolača med dva igralca je preprost. V prvem koraku eden od igralcev (denimo $A$) razreže kolač na dva kosa, v drugem koraku pa igralec $B$ izbere enega od kosov zase. Če je igralec $A$ v prvem koraku kolač razdelil na dva, po njegovem enako velika kosa, bo ne glede na izbiro igralca $B$ po njegovem prejel polovico kolača. Zato $A$ ne zavida igralcu $B$. Seveda pa tudi igralec $B$, ki seveda izbere večjega od obeh kosov (oziroma katerega koli, če sta po njegovem enako velika), ne zavida igralcu $A$. Dobljena delitev kolača je tako brez zavisti.

Zaradi rezanja in izbiranja se zgoraj opisani postopek imenuje tudi *reži in izberi.*

## 2.3 Delitev brez zavisti za tri igralce

Oglejmo si še postopek delitve kolača med tri igralce, denimo $A$, $B$ in $C$, ki vsakemu od njih, če le postopa razumno, zagotavlja, da po končani delitvi ne bo zavidal nikomur. Postopek bomo opisali v obliki korakov. Ob vsakem koraku bomo tudi navedli, kako naj posamezni igralec ravna, da na koncu ne bo zavidal nikomur.

1. Igralec $A$ naj razreže kolač na tri dele.

   Komentar: Igralec $A$ ravna razumno, če jih razdeli na tri zanj enake dele.

2. Igralec $B$ lahko bodisi ne stori nič bodisi od enega od treh kosov odreže del in ga da na stran. V slednjem primeru imenujmo zmanjšani kos $Z$, odrezani del pa $O$. Z odrezkom $O$ se do nadaljenga ne bomo ukvarjali.

   Komentar: Igralec $B$ ravna razumno, če z rezanjem doseže, da sta največja dva kosa enako velika, tretji pa manjši od njiju. Pri tem naj ne stori nič, če sta že na začetku bila največja kosa enako velika.

3. Igralci naj si zaporedoma izberejo po en kos (ne upoštevajoč odrezka $O$). Najprej naj svoj kos izbere igralec $C$, nato igralec $B$ in nazadnje igralec $A$. Če je igralec $B$ v prejšnjem koraku kos zmanjšal, mora zdaj izbrati zmanjšani kos $Z$, razen če ga ni pred njim izbral že igralec $C$. Če v drugem koraku igralec $B$ ni odrezal dela $O$, je s tem delitev končana. Sicer pa si naj igralci razdelijo še odrezek $O$, kot je opisano v nadaljevanju.

   Komentar: V tem trenutku vsak igralec, če je le ravnal razumno, meni, da je njegov kos vsaj tako velik kot kosa drugih dveh igralcev. Res, igralec $C$ gotovo tako misli, saj je izbiral prvi. Igralec $B$ je poskrbel, da sta bila pred izbiranjem največja kosa enako velika (eden od teh je bil ravno kos $Z$), tako da lahko tudi, ko je $C$ že izbral svoj kos, še vedno izbere enega od največjih kosov. Nazadnje izbira $A$. Vendar, ker je na začetku kolač razrezal na tri enake dele, zmanjšani kos $Z$ pa je moral izbrati $B$ (če ga ni izbral že $C$), je tudi on s preostalim kosom zadovoljen.

4. Tisti od igralcev $B$ in $C$, ki ni prejel kosa $Z$, naj razreže odrezek $O$ na tri dele. Tega igralca bomo imenovali *delilec*, drugega od igralcev $B$ in $C$ pa *nedelilec*.

   Komentar: Delilec ravna razumno, če odrezek razdeli na tri zanj enake dele.

5. Igralci izberejo vsak svoj kos odrezka v naslednjem vrstnem redu: Najprej nedelilec, nato igralec $A$ in nazadnje delilec.

   Komentar: Igralci ravnajo razumno, če izberejo po njihovo največji kos, ki je še na razpolago. Premislimo, da po tej delitvi vsak meni, da je prejel vsaj tako velik kos kolača, kot ostala dva igralca. Nedelilec gotovo misli tako, saj je izbiral prvi. Igralec $A$ ni zavisten nedelilcu, saj je nedelilec v prvem krogu delitve prejel zmanjšani kos $Z$, ki je po mnenju igralca $A$ tudi skupaj s celotnim odrezkom $O$ še vedno manjši ali enak kosu, ki ga je sam prejel v prvem krogu. Seveda $A$ ne zavida niti delilcu, saj je izbiral pred njim. Delilec pa tudi ne zavida ostalima dvema, saj je odrezek razrezal v tri zanj enake dele.

Komentarji pri posameznih korakih kažejo, da je delitev, dobljena po opisanem postopku (in pri predpostavki, da se vsi igralci odločajo razumno) brez zavisti.

S podobno enostavnim postopkom lahko dosežemo proporcionalno delitev tudi v primeru poljubno velikega števila igralcev. Delitev brez zavisti je pri večjem številu igralcev precej težje doseči. Algoritma za proporcionalno delitev in delitev brez zavisti sta opisana, na primer, v članku [1].

# 3 Volilna moč

Temelj življenja v skupnosti je sposobnost sporazumnega odločanja tudi v primeru, ko imajo člani skupnosti različna mnenja. V moderni demokraciji odločanje v skupnosti navadno temelji na takšnem ali drugačnem večinskem načelu – odločitev se sprejme, če zanjo glasuje dovolj velika večina članov. Običajno odločanje poteka po načelu "en človek en glas". Obstajajo pa primeri, ko glasovi posameznih članov skupnosti niso enakomerno porazdeljeni. Primer takšne situacije je odločanje na skupščini delničarjev delniške družbe, pri kateri je število glasov posameznega delničarja sorazmerno s številom delnic, ki so v njegovi lastni. Vprašanje, s katerim se bomo ukvarjali v tem poglavju, je, ali je dejanska moč odločanja posameznika sorazmerna s številom glasov (njegovo težo), ki mu pripadajo.

Oglejmo si naslednji zgodovinski zgled. Evropska skupnost je med leti 1958 in 1973 obsegala šest članic: Nemčijo, Francijo, Italijo, Belgijo, Nizozemsko in Luksemburg. V tem obdobju so odločitve v Svetu Evropske skupnosti praviloma sprejemali z 12 od 17 možnih glasov, ki so bili med članice razporejeni takole: Nemčija, Francija in Italija po 4 glasovi, Belgija in Nizozemska po 2 in Luksemburg 1 glas. Glasovi v Svetu so bili tako razporejeni približno v skladu z velikostjo države, kar se morda zdi smiselno in pošteno – pri tem je tudi daleč najmanjša članica, Luksemburg, imela svoj glas. Vendar pa so članice kmalu ugotovile, da je glas Luksemburga pri glasovanju o konkretni odločitvah popolnoma irelevanten: Če so za nek sklep skupaj z Luksemburgom zbrali vsaj 12 glasov, bi jih vsaj 12 zbrali tudi brez Luksemburga. Luksemburg je imel tako enako moč soodločanja v Svetu Skupnosti, kot bi jo imel, če bi bil brez glasu.

## 3.1 Banzhafov indeks volilne moči

Zgoraj opisano neskladje med številom glasov in dejansko močjo soodločanja poskusimo pojasniti z matematičnimi sredstvi. Mislimo si, da pri odločanju sodeluje $n$ *igralcev*, imenujmo jih $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Vsakemu igralcu $P_i$ priredimo njegovo *utež* $\alpha_i$ z intervala med 0 in 1 in predpostavimo, da je vsota uteži vseh igralcev enaka 1. Poljubni podmnožici množice $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ rečemo *koalicija*. *Teža koalicije* je definirana kot vsota uteži posameznih članov koalicije. Pribijmo realno število $r$, $\frac{1}{2} < r \leq 1$, in ga imenujmo *prag odločanja*. Za koalicijo pravimo, da je *zmagovalna (glede na prag $r$)*, brž ko je njena teža vsaj $r$.

Član $P$ zmagovalne koalicije $\mathcal{K}$ je *kritičen*, če koalicija $\mathcal{K} \setminus \{P\}$ ni več zmagovalna. Ideja, ki se strinja v ozadju definicije Banzhafovega indeksa je prepričanje, da je moč soodločanja igralca tem večja, v čim več zmagovalnih koalicijah nastopa kot kritični člen. Naj torej $N(P)$ označuje število vseh zmagovlani koalicij, v kateri je igralec $P$ kritičen. Tedaj je *absolutni Banzhafov indeks* igralca $P$ definiran kot

$$B(P) = \frac{N(P)}{2^{n-1}},$$

relativni Banzhafov indeks pa kot

$$B_r(P) = \frac{B(P)}{S}, \text{ kjer je } S = B(P_1) + B(P_2) + \ldots + B(P_n).$$

Hitro se prepričamo, da je vsota relativnih Banzhofovih indeksov vseh igralcev enaka 1:

$$B_r(P_1) + B_r(P_2) + \ldots + B_r(P_n) = \frac{B(P_1)}{S} + \frac{B(P_2)}{S} + \ldots + \frac{B(P_n)}{S} =$$

$$= \frac{B(P_1) + B(P_2) + \ldots + B(P_n)}{S} = \frac{S}{S} = 1.$$

V tem smislu lahko relativni Banzhafov indeks razumemo kot odstotek dejanske moči odločanja posameznega igralca.

Relativni Banzhafov indeks lahko izračunamo tudi neposredno iz vrednosti $N(P_i)$, ne da bi prej izračunali absolutne Banzhafove indekse:

$$B_r(P) = \frac{B(P)}{B(P_1) + B(P_2) + \ldots + B(P_n)} = \frac{\frac{N(P)}{2^{n-1}}}{\frac{N(P_1)+N(P_2)+\ldots+N(P_n)}{2^{n-1}}},$$

in zato:

$$B_r(P) = \frac{N(P)}{N(P_1) + N(P_2) + \ldots + N(P_n)}.$$

## 3.2 Zgledi

Za prvi zgled izračunajmo Banzhafov indeks treh igralcev $A$, $B$ in $C$, katerih uteži so porazdeljene takole: Igralec $A$ naj nosi 47% glasov, $B$ 44% in $C$ 9% glasov. Prag odločanja postavimo na 51%. Bežen pogled na razdelitev glasov pokaže, da je za sprejem sklepa potrebna podpora vsaj dveh igralcev – in to katerih koli dveh igralcev. Kljub občutni razliki v teži imajo vsi trije igralci enako moč pri sprejemanju odločitev. Če naj Banzhafov indeks pravilno odraža volilne moči, bi moral biti pri vseh treh igralcih enak. Pa ga izračunajmo.

Najprej poiščemo vse možne koalicije. Teh je $2^n$, kjer je $n$ število igralcev, sistematično pa jih naštejemo tako, da navedemo vsa možna zaporedja ničel in enic dolžine $n$, pri čemer posamezno zaporedje interpretiramo kot tisto koalicijo, katere člani so natanko tisti igralci, pri katerih stoji enica. Pri vsaki koaliciji izračunamo njeno težo in glede na prag odločimo, ali je zmagovalna. Nazadnje pri vsaki zmagovalni koaliciji poiščemo še kritične člane. Rezultate tega postopka so predstavljene v tabeli spodaj:

| $A$ | $B$ | $C$ | koalicija | teža | zmagovalna? | kritični |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $\emptyset$ | 0% | NE | |
| 0 | 0 | 1 | $\{C\}$ | 9% | NE | |
| 0 | 1 | 0 | $\{B\}$ | 44% | NE | |
| 0 | 1 | 1 | $\{B, C\}$ | 53% | **DA** | $B, C$ |
| 1 | 0 | 0 | $\{A\}$ | 47% | NE | |
| 1 | 0 | 1 | $\{A, C\}$ | 56% | **DA** | $A, C$ |
| 1 | 1 | 0 | $\{A, B\}$ | 91% | **DA** | $A, B$ |
| 1 | 1 | 1 | $\{A, B, C\}$ | 100% | **DA** | |

Iz tabele je razvidno, da je vsak od igralcev kritičen v natanko dveh koalicijah. Ker je število igralcev $n$ enako 3, je absolutni Banzhafov indeks vseh treh enak

$$B(A) = B(B) = B(C) = \frac{2}{2^{3-1}} = \frac{1}{2},$$

relativni indeks pa

$$B_r(A) = B_r(B) = B_r(C) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

tako kot smo pričakovali.

Za drugi zgled vzemimo situacijo s štirimi igralci, katerih uteži so porazdeljene takole:

$$A: \ 27\%, \quad B: \ 26\%, \quad C: \ 25\%, \quad D: \ 22\%.$$

Prag odločanja naj bo ponovno enak 51%. Iskanje zmagovalnih koalicij izvedemo podobno kot pri prejšnjem zgledu:

| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | koalicija | teža | zmagovalna? | kritični |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | $\emptyset$ | 0% | NE | |
| 0 | 0 | 0 | 1 | $\{D\}$ | 22% | NE | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | $\{C\}$ | 25% | NE | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | $\{C, D\}$ | 47% | NE | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | $\{B\}$ | 26% | NE | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | $\{B, D\}$ | 48% | NE | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | $\{B, C\}$ | 51% | **DA** | $B, C$ |
| 0 | 1 | 1 | 1 | $\{B, C, D\}$ | 73% | **DA** | $B, C$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\{A\}$ | 27% | NE | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $\{A, D\}$ | 49% | NE | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | $\{A, C\}$ | 52% | **DA** | $A, C$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | $\{A, C, D\}$ | 74% | **DA** | $A, C$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | $\{A, B\}$ | 53% | **DA** | $A, B$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | $\{A, B, D\}$ | 75% | **DA** | $A, B$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | $\{A, B, C\}$ | 78% | **DA** | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | $\{A, B, C, D\}$ | 100% | **DA** | |

Izračun Banzhafovega indeksa organizirajmo v obliki spodnje tabe:

| $P$ | $N(P)$ | $B(P)$ | $B_r(P)$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | 4 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $B$ | 4 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $C$ | 4 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $D$ | 0 | 0 | 0 |
| $\Sigma$ | 12 | $\frac{3}{2}$ | 1 |

Kot vidimo, je v tem primeru volilna moč enakomerno porazdeljena med prve tri igralce, medtem ko igralec $D$ nima nobene moči, saj je vsaka zmagovalna koalicija, v kateri sodeluje, zmagovalna tudi brez njega. Do takšnega neravnovesja volilne moči je prišlo kljub temu, da so uteži posameznih igralcev relativno blizu skupaj.

Premisli, kako na volilno moč posameznih igralcev iz zgledov prejšnjega razdelka vpliva dviganje praga odločanja. Ali takšno dviganje vedno koristi najmanjši članici, in to ne glede na velikost dviga praga odločanja?

## 3.3 Združevanje igralcev

Denimo, da se dva igralca združita v novega, združenega igralca, pri čemer utež združenega igralca določimo kot vsoto uteži igralcev, ki sta se združila.

Ali bo relativni Banzhafov indeks združenega igralca enak vsoti Banzhafovih indeksov igralcev, ki sta se združila? Bo morda večji, ali manjši? Na to vprašanje odgovorimo z naslednjimi zgledi.

Denimo, da se igralca $A$ in $B$ v zadnjem primeru iz prejšnjega razdelka združita. Spomnimo se: imeli smo štiri igralce z naslednjimi utežmi: $A:$ 27%, $B:$ 26%, $C:$ 25, $D:$ 22%. Po združitvi dobimo tri igralce: $A+B$, $C$ in $D$ z naslednjim utežmi:

$$A+B: \ 53\%, \quad C: \ 25\%, \quad D: \ 22\%.$$

Ker je prag odločanja enak 51%, vidimo, da so zmagovalne koalicije natanko tiste, pri katerih sodeluje združeni igralec $A+B$. Takšne so 4. V vseh teh koalicijah je $A+B$ edini kritični član. Tedaj Banzhafov indeks izračunamo s pomočjo spodnje tabele:

| $P$ | $N(P)$ | $B_r(P)$ |
|---|---|---|
| $A+B$ | 4 | $\frac{4}{4}=4$ |
| $C$ | 0 | 0 |
| $D$ | 0 | 0 |
| $\Sigma$ | 4 | 1 |

Igralca $A$ in $B$ sta si torej z združitvijo povečala Banzhafov indeks preko vsote njunih starih indeksov. Združitev se jima je torej obrestovala.

Poglejmo si sedaj naslednji zgled s petimi igralci in njihovimi utežmi razporejenimi takole:

$$A: \ 30\%, \quad B: \ 6\%, \quad C: \ 49\%, \quad D: \ 5\%, \quad 10\%.$$

Pri upoštevanju 51% praga odločanja dobimo naslednje relativne Banzhafove indekse:

| $P$ | $B_r(P)$ |
|---|---|
| $A$ | $\frac{1}{11}$ |
| $B$ | $\frac{1}{11}$ |
| $C$ | $\frac{7}{11}$ |
| $D$ | $\frac{1}{11}$ |
| $E$ | $\frac{1}{11}$ |

Po združitvi igralcev $A$ in $B$ pa se Banzhafovi indeksi spremenijo v:

| $P$ | $B_r(P)$ |
|---|---|
| $A+B$ | $\frac{1}{6}$ |
| $C$ | $\frac{1}{2}$ |
| $D$ | $\frac{1}{6}$ |
| $E$ | $\frac{1}{6}$ |

Ker je $B_r(A) + B_r(B) = \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{2}{11}$ strogo več kot $B_r(A + B) = \frac{1}{6}$, se združevanje igralcema $A$ in $B$ v tem primeru ni izplačalo.

### 3.4 Volilna moč strank v Državnem zboru

Na državnozborskih volitvah leta 2008 smo državljani porazdelili poslanske sedeže med sedem političnih strank na način, kot kaže spodnja tabela. Poleg 88 sedežev, ki jih zasedajo čani strank, Ustava zagotavlja tudi dva sedeža za predstavnika italijanske in madržarske skupine. V nadaljevanju bomo na ta dva predstavnika gledali kot na samostojno poslansko skupino (tj. stranko), ki jo bomo označevali z NS (narodne skupnosti).

| stranka | sedeži |
|---|---|
| SD | 29 |
| SDS | 28 |
| ZARES | 9 |
| DeSUS | 7 |
| SNS | 5 |
| SLS | 5 |
| LDS | 5 |
| NS | 28 |
| $\Sigma$ | 90 |

Za izračun Banzhafovega indeksa moramo pregledati $2^8 = 256$ možnih koalicij (v resnici je potrebno obravnavati le zmagovalne koalicije, ki jih je občutno manj). Ker je to kar veliko število, se ga najbrž sami (če ravno nimamo viška časa) ne bomo lotili sami na roke. Lahko pa si pomagamo z računalniškim programom (če ga znamo sestaviti) ali pa tako, da na pomoč pokličemo prijatelje. V skupini 16 ljudi lahko delo organiziramo tako, da vsak od njih pregleda vse koalicije, ki imajo članstvo prvih štirih strank predpisano. Na primer, prvi pregleda vse koalicije, ki vključujejo SD, SDS, Zares in DeSUS; drugi vse koalicije s SD, SDS, ZARES in brez DeSUS; tretji vse koalicije s SD, SDS, brez ZARES in z DeSUS itd.

V spodnji tabeli so navedeni Banzhafovi indeksi pri dveh pragih odločanja (običajne večinskem, ki zahteva 46 glasov, in dvotretjinskim s 60 glasovi).

| stranka | sedeži | $r = 46/90$ | $r = 60/90$ |
|---|---|---|---|
| SD | 29 | 28% | 42% |
| SDS | 28 | 24% | 41% |
| ZARES | 9 | 13% | 3% |
| DeSUS | 7 | 11% | 3% |
| SNS | 5 | 7% | 3% |
| SLS | 5 | 7% | 3% |
| LDS | 5 | 7% | 3% |
| NS | 28 | 2% | 1% |

# 4 Pošteni razporedi soočenj

Leta 1997 smo imeli v Sloveniji predsedniške volitve, na katerih je kandidiralo osem predsedniških kandidatov: Bernik, Cerar, Kovač, Kučan, Miklavič, Peršak, Podobnik in Poljšak. V predvolilnem času je nacionalna televizija organizirala osem soočenj kandidatov, pri čemer so na vsakem soočenju sodelovali trije izmed osmih kandidatov. Ker so se na televiziji odločili za ravno toliko soočenj kot je bilo kandidatov, so lahko soočenja organizirali tako, da je vsak izmed kandidatov nastopil enako mnogokrat – tako nenazadnje veleva tudi zakon.

Kljub temu pa pozornemu gledalcu ni ušlo, da sta se Kučan in Podobnik srečala na dveh soočenjih, medtem ko se nekateri pari kandidatov sploh niso srečali. Takšno neravnovesje bi morda nekateri lahko razumeli kot favoriziranje kandidatov Kučana in Podobnika. Bi se televizija tej nerodnosti lahko izognila? Vprašanje torej je: Ali obstaja razpored osmih soočenj osmih kandidatov – po trije na vsakem soočenju – pri katerem se vsak par sreča največ enkrat?

## 4.1 Kombinatorčne konfiguracije

Nalogo razporeda soočenj lahko matematično formuliramo v jeziku *kombinatoričnih konfiguracij.*

Definicija 4.1 Naj bo $\mathcal{V}$ poljubna neprazna končna množica in $\mathcal{B}$ poljubna družina podmnožic množice $\mathcal{V}$; elemente množice $\mathcal{V}$ imenujmo *točke*, elemente množice $\mathcal{B}$ pa *bloki* ali tudi *premice*. Tedaj paru $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$ rečemo *kombinatorična konfiguracija*, če so izpolnjeni naslednji trije aksiomi.

A1. Obstaja takšno naravno število $r$, da je vsaka točka iz $\mathcal{V}$ vsebovana v natanko $r$ blokih iz $\mathcal{B}$.

A2. Obstaja takšno naravno število $k$, da vsak blok iz $\mathcal{B}$ vsebuje natanko $k$ točk iz $\mathcal{V}$.

A3. Vsak par točk iz $\mathcal{V}$ je hkrati vsebovan v največ enem bloku iz $\mathcal{B}$.

Če z $v = |\mathcal{V}|$ označimo število točk, z $b = |\mathcal{B}|$ pa število blokov, tedaj rečemo, da je takšna konfiguracija *tipa* $(v_r; b_k)$. Kadar je $v = b$ in $r = k$, govorimo o *simetrični konfiguraciji* tipa $(v_r)$.

Vprašanje "poštenega" razporeda soočenj osmih kandidatov s predsedniških volitev leta 1997 se torej prevede na vprašanje obstoja kombinatorične konfiguracije tipa $(8_r; 8_3)$. Pri tem za množico točk vzamemo kar množico predsedniških kandidatov, vsak posamezni blok pa razumemo kot trojico kandidatov, ki so se srečali na danem soočenju.

Premislimo najprej, da lahko število $r$ (tj. število pojavitev posameznega kandidata v osmih soočenjih) določimo na podlagi ostalih podatkov. Splošneje, dokažimo, da velja naslednja trditev.

TRDITEV 4.2 *Če obstaja kombinatorična konfiguracija tipa* $(v_r; b_k)$*, tedaj je* $vr = bk$.

DOKAZ: Dokaz izpeljimo s pomočjo "računovodskega pravila". Definirajmo množico

$$\mathcal{M} = \{(x, \ell) : x \in \mathcal{V}, \ell \in \mathcal{B}, x \in \ell\}$$

in preštejmo njene elemente na dva različna načina. Najprej opazimo, da se vsak $x \in \mathcal{V}$ pojavi kot prva komponenta v parih iz $\mathcal{M}$ natanko $r$-krat – z vsakim blokom, v katerem je vsebovan, enkrat. Ker je točk v $\mathcal{V}$ ravno $v$, je torej parov v $\mathcal{M}$ natanko $vr$.

Po drugi strani pa vsak $\ell \in \mathcal{B}$ nastopi kot druga komponenta v parih iz $\mathcal{M}$ natanko $k$-krat – z vsako točko, ki jo vsebuje, po enkrat. Zato je $|\mathcal{M}| = |\mathcal{B}|k = bk$. Ker morata oba načina štetja elementov množice $\mathcal{M}$ dati enak rezultat, dobimo enakost $vr = bk$. ■

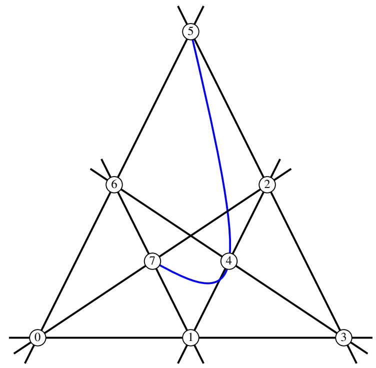
Od tod sledi, da je pri iskani konfiguraciji tipa $(8_r; 8_3)$ parameter $r$ enak 3. Iščemo torej simetrično konfiguracijo tipa $(8_3)$.

## 4.2 Möbius-Kantorjeva konfiguracija

Izkaže se, da obstaja (do preimenovanja točk natančno) natanko ena simetrična konfiguracija tipa $(8_3)$. Imenuje se *Möbius-Kantorjev konfiguracija* in je definirana takole:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \\
\mathcal{B} &= \{\{0, 1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 0\}, \{6, 7, 1\}, \{7, 0, 2\}\}.
\end{aligned}$$

Če števila $0, 1, 2, \ldots, 7$ nadomestimo z imeni osmih predsedniških kandidatov, dobimo optimalni razpored soočenj, ki bi zagotavljal, da se vsaka dva kandidata srečata natanko enkrat. Grafično si lahko konfiguracijo predočimo s pomočjo spodnje sheme.




Möbius-Kantorjeva konfiguracija $(8_3)$.

Pri tej shemi vidimo osem točk: tri oglišča trikotnika, tri razpolovišča trikotnikov in dve točki, ki ležita na presečišču težiščnice in povezovalke dveh razpolovišč stranic. Vidimo tudi osem črt: tri stranice trikotnika, dve težiščnici, dve povezovalki razpolovišč stranic in eno krivo črto. Vsaka točka leži na natanko treh črtah in vsaka črta vsebuje natanko tri točke. Vsaki dve točki ležita na največ eni črti. Obstajajo pa tudi štirje pari točk, ki ne ležijo na nobeni črti. To so pari $\{0,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,6\}$ in $\{3,7\}$.

## 4.3 Pari, ki se ne srečajo

V kombinatorični konfiguraciji zahtevamo, da se vsaki dve točki pojavita v največ enem skupnem bloku. Premislimo, koliko parov točk $\{x,y\} \subseteq \mathcal{V}$, $x \neq y$, v kombinatorični komnfiguraciji tipa $(v_r; b_k)$ je takšnih, da niso vsebovani v nobenem bloku (za točki, ki tvorita takšen par, bomo rekli, da se *ne srečata*).

Dokažimo najprej naslednji pomožni rezultat.

LEMA 4.3 *Naj bo $A$ poljubna množica z $n$ elementi. Tedaj je število neurejenih parov $\{x,y\} \subseteq A$, $x \neq y$, množica $A$ enako*

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

DOKAZ: V to se najlažje prepričamo, če elemente množice $A$ uredimo,

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

in sestavimo kvadratno tabelo

$$\begin{bmatrix} X & \{a_1, a_2\} & \{a_1, a_3\} & \cdots & \{a_1, a_n\} \\ \{a_2, a_1\} & X & \{a_2, a_3\} & \cdots & \{a_2, a_n\} \\ \{a_3, a_1\} & \{a_3, a_2\} & X & \cdots & \{a_3, a_n\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{a_n, a_1\} & \{a_n, a_2\} & \{a_n, a_3\} & \cdots & X \end{bmatrix}$$

V tej tabeli vsak par $\{a_i, a_j\}$, $i \neq j\}$, nastopa natanko dvakrat: enkrat na presečišču $i$-tega stolpca in $j$-te vrstice, drugič na presečišču $j$-tega stolpca in $i$-te vrstice. Ker je parov v tabeli $n^2 - n$ (saj $n$ izmed možnih $n^2$ pozicij zasedajo simboli $X$) in ker se vsak par pojavi natanko dvakrat, je parov ravno $\frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{n(n-1)}{2}$. ■

Iz zgornje trditve sledi, da je vseh parov $\{x, y\}$ točk iz $\mathcal{V}$ ravno $\frac{v(v-1)}{2}$, v posamičnem bloku pa se pojavi natanko $\frac{k(k-1)}{2}$ parov. Ker je blokov $b$, vsak par pa se pojavi v največ enem bloku, se torej v vseh blokih skupaj pojavi natanko $b\frac{k(k-1)}{2}$ parov. Od tod sledi naslednja trditev.

TRDITEV 4.4 *V kombinatorični konfiguraciji tipa* $(v_r; b_k)$ *je natanko*

$$\binom{v}{2} - b\binom{k}{2} = \frac{v(v-1) - bk(k-1)}{2}$$

*takšnih parov, ki se v konfiguraciji ne srečajo.*

Če se omejimo na konfiguracije tipa $(v_3)$, dobimo naslednjo posledico zgornje trditve.

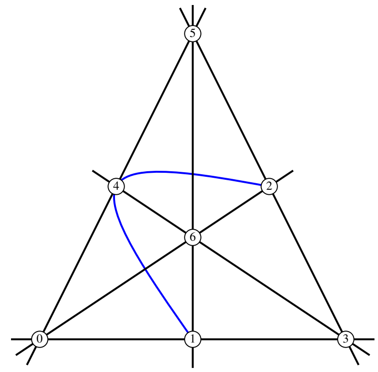
POSLEDICA 4.5 *V simetrični konfiguraciji tipa* $(v_3)$ *je natanko*

$$\frac{v(v-7)}{2}$$

*takšnih parov, ki se v konfiguraciji ne srečajo.*

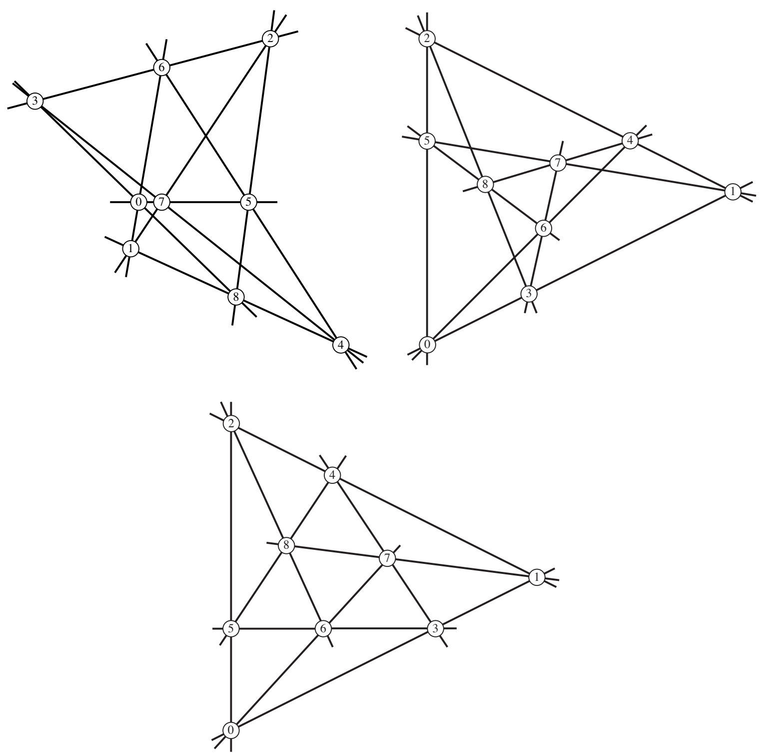
Kot smo že ugotovili v prejšnjem razdelku, se v Möbius-Kantorjevi konfiguraciji, ki je tipa $(8_3)$, ne srečajo štirje pari.

Nadalje, iz zgornje posledice sledi, da ima vsaka kombinatorična konfiguracija vsaj 7 točk, morebitna kombinatorična konfiguracija z natanko sedmimi točkami pa ima dodatno lastnost, da se v njej vsak par točk pojavi v *natanko* enem bloku. Takšna konfiguracija tipa $(7_3)$ res obstaja in se imenuje *Fanova ravnina* (glej sliko)




Fanova ravnina – simetrična konfiguracija tipa $(7_3)$.

Navedimo na tem mestu še tri konfiguracije tipa $(9_3)$. Prvi od treh rečemo tudi *Pappusova konfiguracija*. Za vse slike v tem razdelku se zahvaljujem Marku Bobnu.



Tri simetrične konfiguracije tipa $(9_3)$, začenši s Pappusovo.

## 5 Steinerjevi sistemi trojk

Pričnimo poglavje z naslednjo nalogo, ki jo je daljnega leta 1850 v ameriški družabni reviji *Lady's and Gentleman's Diary* objavil Thomas Kirkman. Naloga se glasi takole:

*Petnajst šolark se sprehaja vsak dan v tednu v petih vrstah, po tri v vrsti. Organiziraj njihove sprehode tako, da nobeni dve ne bosta hodili v isti vrsti več kot enkrat. (V angleškem orignalu: Fifteen young ladies of a school walk out three abreast for seven days in succession: it is required to arrange them daily so that no two shall walk abreast more than once.)*

Ker ima teden sedem dni, v enem tednu šolarke oblikujejo $7 \cdot 5 = 35$ vrst (vsak dan po 5). Ker gre vsaka šolarka na sprehod vsak dan v tednu, pomeni, da se pojavi v natanko sedmih trojkah. Če z $\mathcal{V}$ označimo množico 15 šolark, z $\mathcal{B}$ pa množico 35 trojk, ki jih v sedmih dneh sprehajanja oblikujejo šolarke, nam pogoj, da se nobeni dve šolarki ne sprehajata v isti vrsti več kot enkrat, zagotovi, da je par $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$ kombinatorična konfiguracija tipa $(15_7; 35_3)$.

Pa vstavimo podatke $v = 15$, $r = 7$, $b = 35$ in $k = 3$ v formulo iz trditve 4.4:

$$\frac{v(v-1) - bk(k-1)}{2} = \frac{15 \cdot 14 - 35 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 0.$$

To pa pomeni, da se pri takšnem razporedu sprehodov vsaki dve šolarki sprehajata v isti vrsti *natanko enkrat* (in ne zgolj največ enkrat) na teden. Iskana konfiguracija šolark in trojk ima torej dodatno lastnost, da se v njej prav vsak par šolark sreča natanko enkrat. Pri tem rečemo, da par $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$ tvori *Steinerjev sistem trojk.*

Definicija 5.1 Naj bo $\mathcal{V}$ poljubna neprazna množica in $\mathcal{B}$ množica nekih trielementnih podmnožic množice $\mathcal{V}$. Če za vsak par $\{x, y\} \subseteq \mathcal{V}$, $x \neq y$, obstaja natanko ena trojka $B \in \mathcal{B}$, ki vsebuje tako $x$ kot $y$, potem rečemo, da par $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$ tvori *Steinerjev sistem trojk.*

Ker v zgornji definiciji ne zahtevamo izrecno, da je vsaka točka vsebovana v istem številu blokov, ni povsem očitno, da je Steinerjev sistem trojk nujno tudi kombinatorična konfiguracija. Da je temu tako, bomo med drugim dokazali v naslednji trditvi.

Izrek 5.2 *Za par $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$, $|\mathcal{V}| = v$, $|\mathcal{B}| = b$, sta ekvivalentni naslednji trditvi:*

(i) *$(\mathcal{V}, \mathcal{B})$ je Steinerjev sistem trojk;*

(ii) $(\mathcal{V},\mathcal{B})$ *je kombinatorična konfiguracija tipa* $(v_r;b_k)$, *kjer je* $k=3$, $r=\frac{v-1}{2}$ *in* $b=\frac{v(v-1)}{6}$.

DOKAZ: Predpostavimo najprej, da velja (i). Dokažimo najprej, da je $(\mathcal{V},\mathcal{B})$ kombinatorična konfiguracija. Če primerjamo definiciji sistema Steinerjevih trojk in kombinatorične konfiguracije, vidimo, da moramo le še dokazati, da obstaja takšno naravno število $r$, da se vsaka točka iz $\mathcal{V}$ pojavi v natanko $r$ blokih iz $\mathcal{B}$. Še več, radi bi videli, da je takšen $r$ enak $\frac{v-1}{2}$. V ta namen vzemimo $x\in\mathcal{V}$ in si oglejmo množico vseh trojic

$$\{x,y_1,z_1\},\ \{x,y_2,z_2\},\ \{x,y_3,z_3\},\ldots$$

iz $\mathcal{B}$, v katerih nastopa točka $x$. Ker $x$ z vsakim elementom množice $\mathcal{V}\setminus\{x\}$ nastopi v trojici natanko enkrat (to nam zagotavlja definicija Steinerjevega sistema trojk), se vsak element iz množice $\mathcal{V}\setminus\{x\}$ med elementi $y_1,z_1,y_2,z_2,y_3,z_3,\ldots$ pojavi natanko enkrat. Od tod sledi, da je zgoraj naštetih trojk natanko $\frac{v-1}{2}$, oziroma z drugimi besedami, točka $x$ se pojavi v natanko $\frac{v-1}{2}$ trojkah iz $\mathcal{B}$. S tem smo dokazali, da je $(\mathcal{V},\mathcal{B})$ kombinatorična konfiguracija tipa $(v_r;b_k)$, pri čemer je $r=\frac{v-1}{2}$. Ker je $k=3$ po definiciji, se lahko v pravilnost formule za $b$ prerpičamo s pomočjo enakosti $vr=bk$, ki velja pri poljubni kombanitorični konfiguraciji.

Predpostavimo sedaj, da velja (ii). Če želimo dokazati, da je v tem primeru par $(\mathcal{V},\mathcal{B})$ Steinerjev sistem trojk, moramo dokazati, da se vsak par točk v konfiguraciji sreča. To pa sledi iz trditve 4.4, saj je

$$\frac{v(v-1)-bk(k-1)}{2}=\frac{1}{2}(v(v-1)-\frac{v(v-1)}{6}\cdot 6)=0.$$

■

Od to sledi naslednji pogoj na obstoj Steinerjevega sistema trojk z $v$ točkami.

TRDITEV 5.3 *Če obstaja Steinerjev sistem trojk z* $v$ *točkami, tedaj je* $v$ *oblike* $6t+1$ *ali pa oblike* $6t-3$ *za neko naravno število* $t$.

DOKAZ: Naj bo $(\mathcal{V},\mathcal{B})$ Steinerjev sistem trojk z $v$ točkami. Tedaj se, po prejšnji trditivi, vsaka točka pojavi v $r=\frac{v-1}{2}$ trojkah, od koder sledi, da je $r$ naravno število, in zato $v$ liho število. Od tod sledi, da lahko $v$ zapišemo v obliki $v=2s-1$ za neko naravno število $s$. Po drugi strani je število trojk v $\mathcal{B}$ enako

$$b=\frac{v(v-1)}{6}=\frac{(2s-1)(2s-2)}{6}=\frac{(2s-1)(s-1)}{3}.$$

Ker je tudi $b$ naravno število, od tod sledi, da 3 deli $2s-1$ ali pa $s-1$. V prvem primeru je $2s-1=3m$ za neko naravno število $m$. Ker je $v=2s-1$ liho število, mora biti tudi število $m$ liho, in zato

$$v = 2s - 1 = 3(2t-1) = 6t-3$$

za neko naravno število $t$.

Če pa 3 deli $s-1$, je $s-1=3t$ za neko naravno število $t$, in zato

$$v = 2s - 1 = 2(3m+1) - 1 = 6t+1.$$

Trditev je s tem dokazana. ■

V resnici velja tudi obrat zgornje trditve: Za vsako število $v$ oblike $6t-3$ ali $6t+1$, $t \in \mathbb{N}$, obstaja Steinerjev sistem trojk z $v$ točkami. To dejstva je precej težje dokazati kot zgornjo trditev.

## 5.1 Kirkmanovi sistemi trojk

Vrnimo se sedaj prvotni nalogi o petnajst šolarkah. Pri tej nalogi iščemo sistem trojk $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$ na $v = 15$ točkah z dodatno lastnostjo, da lahko množico $b = \frac{v(v-1)}{6} = \frac{15\cdot 14}{6} = 35$ trojk razbijemo v sedem skupin (dni) po pet trojk (vrste v sprehodu danega dne), tako da se v vsaki skupini vsaka točka pojavi natanko enkrat. Steinerjevim sistemom trojk, ki omogočajo takšno razbitje množice trojk, pravimo tudi *Kirkmanovi sistemi trojk*.

Trditev 5.4 *Če obstaja Kirmanov sistem trojk na $v$ točkah, je $v = 6t-3$ za neko naravno število $t$.*

Podobno kot pri Steinerjevih sistemih tudi tu velja obrat zgornje trditve, ki pa ga je zelo težko dokazati: Za vsako število $v$ oblike $6t-3$, $t \in \mathbb{N}$, obstaja Kirmanov sistem trojk na $v$ točkah. To nam pove, da je osnovni Kirkmanov problem s 15 šolarkami rešljiv, saj je $15 = 6 \cdot 3 - 3$. Eno od možnih rešitev si lahko ogledate, denimo, na Wikipediji.

# 6 Eulerjev problem 36 častnikov

Legenda pravi, da je Katarina Velika Eulerju, ko je le-ta živel na njenem dvoru, zadala naslednjo nalogo: "Na dvoru bom sprejela predstavnike 6 regimentov. Vsak regiment bo predstavljalo 6 častnikov, po en častnik vsakega od 6 činov. Razvrsti teh 36 častnikov v $6 \times 6$ formacijo tako, da bo v vsaki vrsti in v vsaki koloni natanko en častnik iz vsakega regimenta in natanko en častnik vsakega čina."

Euler naj bi po daljšem iskanju rešitve obupal in Carici Katarini zagotovil, da takšen razpored ni možen. Da bi svojo trditev tudi ustrezno matematično podkrepil, je pričel raziskovati tako imenovane *latinske kvadrate*.

## 6.1 Latinski kvadrati

Latinski kvadrat velikosti $n$ je razporeditev števil $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ (ali elementov katere koli druge $n$ elementne množice) v $n \times n$ mrežo, pri kateri se v vsaki vrstici mreže in v vsakem stolpcu mreže pojavi vsako število iz množice $N$ natanko enkrat. Zgledov latinskih kvadratov ni težko najti. Najpreprostejši način konstrukcije latinskega kvadrata velikosti $n$ je naslednji: V prvo vrstico kvadrata zapovrstjo navedemo števila $1, 2, \ldots, n$. V drugo vrstico navedemo ta-ista števila v zamaknenjem vrstnem redu: $2, 3, \ldots, n, 1$. Postopek nadaljujemo tako, da v vsaki naslednji vrstici števila iz prejšnje vrstice ciklično zamaknemo še za eno mesto v levo. Tako v tretji vrstici dobimo števila z vrstnim redom $3, 4, \ldots, n, 1, 2$. Končamo z $n$-to vrstico, v kateri so števila navedena v vrstnem redu $n, 1, 2, \ldots, n-1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

S pomočjo latinskega kvadrata velikosti 6 lahko Eulerjevo nalogo rešimo "na pol". Dosežemo namreč lahko, da se v vsaki vrstici in vsakem stolpcu pojavi natanko en predstavnik vsakega od šestih regimentov. To pač storimo tako, da vse častnike 1. regimenta označimo s številom 1, častnike 2. regimetna s številom 2 itd. Latinski kvadrat velikosti 6 nam potem predstavlja raporeditev častnikov glede na njihovo pripadnost regimentom. Seveda nam takšna rešitv še ne zagotavlja, da se bo v vsaki vrstici in vsakem stolpcu pojavil vsak čin natanko enkrat.

Podobno bi lahko latinski kvadrat velikosti 6 uporabili za razvrstitev, pri kateri bi se vsak posamezni čin pojavil v vsaki vrstici in vsakem stolpcu natanko enkrat – le števila med 1 in 6 bi morali interpretirati kot čine namesto kot regimente. Če nam uspe dva latinska kvadrata (enega, ki podaja razporeditev regimentov, in drugega, ki podaja razporeditev po činih) združiti na tak način, da vsako kombinacijo čina in regimenta podamo natanko enkrat, smo nalogo častnikov rešili.

Preden nadaljujemo z Eulerjevim problemom častnikom, si oglejmo, ali znamo latinske kvadrate velikosti $n$ konstruirati še kako drugače.

## 6.2 Modularna aritmetika

Za naravni števili $n$ in $x$ naj $x \bmod n$ označuje ostanek števila $x$ pri deljenju z $n$ in naj

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

označuje množico vseh možnih ostankov pri deljenju s številom $n$. Za $x, y \in \mathbb{Z}_n$ definirajmo

$$x \oplus y = x + y \bmod n \quad \text{ in } x \odot y = xy \bmod n.$$

Ni se težko prepričati, da operaciji $\oplus$ in $\odot$ zadoščata mnogim običajnim pravilom, ki veljajo za običajno seštevanje in množenje v množici celih števil. Na primer, za poljubne $x, y, z \in \mathbb{Z}_n$ velja naslednje:

1. $x \oplus y = y \oplus x$ in $x \odot y = y \odot x$ (komutativnost);
2. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ in $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$ (asociativnost);
3. $(x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z)$ (distributivnost);
4. $x \oplus 0 = x$, $x \odot 0 = 0$, $x \odot 1 = x$;
5. Za vsak $a \in \mathbb{Z}_n$ obstaja neki $b \in \mathbb{Z}_n$, za katerega je $a \oplus b = 0$ (namreč, za $b$ lahko vzamemo element $n - a$).

Če za kako število $x \in \mathbb{Z}_n$ obstaja število $y \in \mathbb{Z}_n$, za katerega velja, da je $x \odot y = 1$, potem rečemo, da je $y$ *multiplikativni inverz* elementa $x$ in ga označimo z $x^{-1}$, za število $x$ pa rečemo, da je *obrnljivo*. Množico obrnljivih števil v $\mathbb{Z}_n$ označimo z $\mathbb{Z}_n^*$.

Na primer, v $\mathbb{Z}_5$ velja $2 \odot 3 = 6 \bmod 5 = 1$, zato je $3^{-1} = 2$ in seveda $2^{-1} = 3$. Velja tudi $1^{-1} = 1$ in $4^{-1} = 4$ (saj $4 \odot 4 = 16 \bmod 5 = 1$). Po drugi strani pa 0 ni obrnljiv element, saj je $0 \odot x = 0 \neq 1$ za vsak $x \in \mathbb{Z}_5$. Zato je

$$\mathbb{Z}_5^* = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Nekoliko drugačna je situacija v množici $\mathbb{Z}_6$. Tam sta ponovno obrnljiva elementa 1 in 5, saj je $1^{-1} = 1$ in $5^{-1} = 5$, med tem ko elementi $0, 2, 3$ in 4 niso obrnljivi. Denimo, če bi 2 bil obrnljiv element in bi bil $x$ njegov inverz, bi veljalo

$$3 = 1 \odot 3 = (x \odot 2) \odot 3 = x \odot (2 \odot 3) = x \odot 0 = 0,$$

kar je očitno protislovje. Podobno poteka premislek za števila $0, 3$ in 4. Zato velja

$$\mathbb{Z}_6^* = \{1, 5\}.$$

V splošnem velja naslednja trditev, ki pa je ne bomo dokazali.

TRDITEV 6.1 *V množici $\mathbb{Z}_n$ so obrnljiva natanko tista neničelna števila, ki so tuja številu $n$. Če je $n$ praštevilo, so v $\mathbb{Z}_n$ torej obrnljivi vsi neničelni elementi.*

## 6.3 Konstrukcija latinskih kvadratov

Operaciji $\oplus$ in $\odot$ lahko uporabimo za konstrukcijo latinskih kvadratov na naslednji način. Izberimo obrnljiv element $a \in \mathbb{Z}_n^*$ in konstruirajmo matriko $L_a(n)$ velikosti $n \times n$, katere vrstice in stolpce oštevilčimo z elementi $0, 1, \ldots, n-1 \in \mathbb{Z}_n$. Na presečišče vrstice $x \in \mathbb{Z}_n$ in stolpca $y \in \mathbb{Z}_n$ v $L_a(n)$ vstavimo element $a \odot x + y$. Predem dokažemo, da smo tako res dobili latinski kvadrat, si oglejmo konkretni zgled. Naj bo $n = 5$ in $a = 2$. Tedaj je

$$L_2(5) = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array}$$

TRDITEV 6.2 *Če je $a$ obrnljiv element množice $\mathbb{Z}_n$, tedaj je $L_a(n)$ latinski kvadrat.*

DOKAZ: Dokazati moramo, da v nobeni vrstici in v nobenem stolpcu ne dobimo dveh enakih števil. Pa denimo, da bi v vrstici $x \in \mathbb{Z}_n$ dobili enaki števili v stolpcih $y_1 \neq y_2$. Tedaj bi veljalo

$$a \odot x \oplus y_1 = a \odot x \oplus y_2.$$

Če na levi in desni strani prištejemo število $n - a \odot x$, dobimo $0 \oplus y_1 = 0 \oplus y_2$, in zato $y_1 = y_2$, kar je v protislovju z našo predpostavko.

Če pa bi se ujemala elementa v stolpcu $y$, in sicer v vrsticah $x_1$ in $x_2$, bi pa dobili

$$a \odot x_1 \oplus y = a \odot x_2 \oplus y,$$

od koder najprej sledi $a \odot x_1 = a \odot x_2$ (prištejemo $n - y$ na levi in desni strani), nato pa še $x_1 = x_2$ (pomnožimo levo in desno stran z $a^{-1}$, kar smemo, saj je $a \in \mathbb{Z}_n^*$). To pa je ponovno protislovje. ■

## 6.4 Pari ortogonalnih latinskih kvadratov

Naj bosta $A$ in $B$ dva latinska kvadrata velikosti $n$ zapolnjena s števili $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Element, ki stoji na presečišču $i$-te vrstice in $j$-tega stolpca matrike $A$ označimo z $a_{ij}$, enako ležeči element v matriki $B$ pa z $b_{ij}$. Za latinska kvadrata $A$ in $B$ pravimo, da sta *ortogonalna*, če za vsak urejeni par $(x, y) \in N \times N$ obstaja natanko en par indeksov $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tako da je $a_{ij} = x$ in $b_{ij} = y$. Z drugimi besedami, $A$ in $B$ sta ortogonalna, če pari $(a_{ij}, b_{ij})$ enako ležečih elementov iz $A$ in $B$ opišejo celotno množico urejenih parov iz $N \times N$.

Za zgled si oglejmo naslednje tri latinske kvadrate velikosti 4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kvadrata $A$ in $B$ nista ortogonalna, saj se denimo par $(1, 1)$ pojavi na dveh mestih (skrajno levo zgoraj in na tretjem mestu glavne diagonale), par $(1, 2)$ pa se sploh ne pojavi. Po drugi strani pa kvadrata $A$ in $C$ sta pravokotna, v kar se najlažje prepričamo, če sestavimo kvadrat parov in preverimo, da se v njem res pojavijo vsi pari števil med 1 in 4 (vsak natanko enkrat).

$$(B, C) = \begin{bmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) & (4,4) \\ (2,3) & (1,4) & (4,1) & (3,2) \\ (3,4) & (4,3) & (1,2) & (2,1) \\ (4,2) & (3,1) & (2,4) & (1,3) \end{bmatrix}$$

Par ortogonalnih latinskih kvadratov velikosti $n$ lahko uporabimo za rešitev različice Eulerjeve naloge z $n$ častniki iz $n$ regimentov. Na primer, če regimente označimo z $a, b, c$ in $d$, čine pa z gen, pol, maj in por, tedaj iz zgornjega para kvadratov dobimo zahtevano razporeditev častnikov, če prve komponente parov zamenjamo po pravili $1 \mapsto$ gen, $2 \mapsto$ pol, $3 \mapsto$ maj in $4 \mapsto$ por, druge komponente pa po pravilu $1 \mapsto a$ , $2 \mapsto b$, $3 \mapsto c$ in $4 \mapsto d$. Tako dobimo naslednjo razporeditev:

$$\begin{bmatrix} (\mathrm{gen}, a) & (\mathrm{pol}, b) & (\mathrm{maj}, c) & (\mathrm{por}, d) \\ (\mathrm{pol}, c) & (\mathrm{gen}, d) & (\mathrm{por}, a) & (\mathrm{maj}, b) \\ (\mathrm{maj}, d) & (\mathrm{por}, c) & (\mathrm{gen}, b) & (\mathrm{pol}, a) \\ (\mathrm{por}, b) & (\mathrm{maj}, a) & (\mathrm{pol}, d) & (\mathrm{gen}, c) \end{bmatrix}$$

Poglejmo si sedaj kako poiskati par ortogonalnih latinskih kvadratov velikosti $n$ za vsako liho število $n$.

IZREK 6.3 *Naj bo $n$, $n \geq 3$, naravno število in naj bosta $a$ in $b$ obrnljiva elementa množice $\mathbb{Z}_n$, za kateri je tudi razlika $|b - a|$ obrnljiva v $\mathbb{Z}_n$. Tedaj sta $L_a(n)$ in $L_b(n)$ ortogonalna latinska kvadrata velikosti $n$.*

DOKAZ: To, da sta $L_a(n)$ in $L_b(n)$ latinska kvadrata, že vemo. Dokažimo še, da sta ortogonalna. Zaradi enostavnosti bomo operaciji $\oplus$ in $\odot$ v $\mathbb{Z}_n$ pisali kar kot običajno seštevanje in množenje. Če kvadrata $L_a(n)$ in $L_b(n)$ nista ortogonalna, tedaj obstajata dva para indeksov $(x, y) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ in $(s, t) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, za katera velja $(ax + y, bx + y) = (as + t, bs + t)$. Od tod sledi $a(x - s) = y - t$ in $b(x - s) = y - t$. Če ti dve enakosti odštejemo med seboj, dobimo $(a - b)(x - s) = 0$. Ker pa je element $a - b$ obrnljiv v $\mathbb{Z}_n$, od tod sledi $x = s$. Če to vstavimo v enakost $a(x - s) = y - t$, dobimo še $y = t$, kar je v protislovju s predpostavko, da sta para $(x, y)$ in $(s, t)$ različna. ■

POSLEDICA 6.4 *Za vsako liho število $n$ obstaja par ortogonalnih latinskih kvadratov velikosti $n$.*

DOKAZ: Ker je $n$ liho število, je za $a = 1$ in $b = n-1$ števila $b-a = n-2$ tuje številu $n$. Zato sta latinska kvadrata $L_1(n)$ in $L_{n-1}(n)$ ortogonalna. ■

## 6.5 Rešljivost Eulerjeve naloge

V prejšnjem razdelku smo videli, kako Eulerjevo rešimo nalogo za liho število regimentov. Kaj pa, če je regimentov sodo mnogo, kot je to primer v originalni Eulerjevi nalogi ($n = 6$). Izkaže se, da je naloga rešljiva prav za vse $n$, razen za $n = 2$ in 6. Rešitev za števila $n$, ki so deljiva s 4 je dokaj enostavno poiskati (pomagamo si z rešitvijo za $n = 4$, ki smo jo navedli zgoraj), za števila, ki pa dajo ostanek 2 pri deljenju s 4 pa je konstrukcija mnogo težja.

# 7 Igra nim

Igra nim je igra za dva igralca, ki izmenično jemljeta vžigalice s treh kupčkov, pri čemer sme igralec na potezi vzeti s poljubnega (vendar le enega) kupčka poljubno število vžigalic (vsaj eno, lahko pa tudi vse). Zmaga igralec, ki vzame zadnjo vžigalico. Koliko vžigalic naj bo na kupih, da bo igra dobljena za igralca na potezi (ob njegovi pravilni igri, seveda) in koliko, da bo dobljena za igralca, ki ni na potezi?

## 7.1 Nim vsota

Kot bomo videli v naslednjem razdelku, je odgovor na zgornje vprašanje zelo enaostaven, če vpeljemo nekoliko nenavaden način seštevanja naravnih števil, ki gaimenujemo *nim vsota*.

Vzemimo naravni števili $a$ in $b$ (v tem poglavju bomo med naravna števila prištevali tudi število 0) ter ju zapišimo dvojiško (po potrebi manjšemu od števil dodajmo na začetek nekaj ničel, da bosta obe števili imeli enako dolg zapis):

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \ldots + a_n \cdot 2^n = a_n a_{n-1} \ldots a_{0(2)}\,; \quad a_i \in \{0,1\} \\ b &= b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \ldots + b_n \cdot 2^n = b_n b_{n-1} \ldots b_{0(2)}\,; \quad b_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Nim-vsoto števil $a$ in $b$ definirajmo na običajen način, le da pri seštevanju *v kupčku* ne prenašamo *viška* v naslednji stolpec. Da ne bo prihajalo do zmede, bomo nim-seštevanje označevali s $\oplus$, navadno pa s $+$. Velja torej

$$c = a \oplus b\,, \quad \text{kjer} \quad c = c_n c_{n-1} \ldots c_{o(2)}\,, \quad c_k = a_k + b_k \mod 2\,.$$

Oglejmo si zgled. Vzemimo $a = 5 = 101_{(2)}$ in $b = 3 = 11_{(2)}$

$$\begin{array}{c} 101 \\ 011 \\ \hline 110 \end{array}$$

Ko smo v skrajno desnem stolpcu sešteli $1+1$, smo dobili 2 kar je po modulu 2 enako 0. Dobljeni rezultat ponovno interpretiramo kot število v dvojiškem zapisu in dobimo

$$5 \oplus 3 = 110_{(2)} = 6.$$

Ni težko videti, da je nim vsota *komutativna* (tj. $a \oplus b = b \oplus a$) in *asociativna* (tj. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$). Vlogo ničle, tako kot pri običajnem seštevanju, igra število 0. Poleg tega pa za vsako naravno število $a$ velja nekoliko nenavadna enakost

$$a \oplus a = 0.$$

## 7.2 Zmagovalna strategija

Poglejmo, kako si z nim vsoto lahko pomagamo pri igranju igre nim. Prepričajmo se, da velja naslednje:

IZREK 7.1 *Igra nim je v poziciji* $(x, y, z)$ *dobljena za igralca na potezi, če in samo če je nim vosta* $x \oplus y \oplus z$ *neničelna. Zmagovalna poteza je tista, ki prevede igro v pozicijo z nim-vsoto enako* 0.

DOKAZ: Izrek lahko dokažemo z indukcijo na skupno število vžigalic. Če je to število enako 0, potem igra izgubljena za igralca na potezi (saj je zadnjo vžigalico v prejšnji potezi vzel njegov nasprotnik). Denimo, sedaj, da je na mizi vsaj ena vžigalica in da izrek velja za vse pozicija s strogo manj vžigalicami.

Za začetek predpostavimo, da je nim vsota neničelna. Dokazati moramo, da je tedaj igra dobljena za igralca na potezi. Zaradi indukcijske predpostavke je dovolj dokazati, da obstaja poteza, ki prevede igro v ničelno nim vsoto. Do takšne poteze pridemo tako, da števila vžigalic v posmaeznik kupčih zapišemo v dvojiškem sistemu, jih podpišemo in po stolpcih seštejemo v njihovo nim vsoto. Ker je le-ta neničlena, lahko v vsoti najdemo vsaj eno enico. Vzemimo prvo enico z desne in si oglejmo njen stolpec (imenujmo ha stolpec $X$. Ker je vsota stolpca $X$ enaka 1, je v njem liho mnogo enic, in zato obstaja vrstica (imenujmo jo vrstica $Y$), ki ima v stolpcu $X$ enico. Vrstico $Y$ spremenimo tako, da v vseh tistih stolpcih, kjer ima vsota enice, spremenimo vrednost vrstice $Y$ (iz 1 na 0 ter iz 0 v 1). Dobljeno vrstico imenujmo $Y'$. Če vrstico $Y$ nadomestimo z vrstico $Y'$, se nim vsota vrstic spremeni v 0 (tako smo namreč zgradili vrstico $Y'$). Po drugi strani pa je število, ki ga predstavlja vrstica $Y'$, manjše od števila , ki ga predstavlja vrstica $Y$, saj smo v vrstici $Y$ sreminjali le stolpce desno od stolpca $X$, pri stolpcu $X$ pa smo 1 spremenili v 0. Označimo razliko teh dveh števil z $a$. To pomeni, da lahko igralec na potezi z odstranjevanjem $a$ vžigalic iz kupa vžigalic, ki ustreza stolpcu $Y$, spremeni nim vsoto v 0 in s tem (po indukcijski predpostavki) postavi nasprotnika v izgubljen položaj.

Obratno, če je nim vsota dane pozicije enaka nič, potem bo igralec na potezi, ne glede na to, kaj odigra, nim vsoto spremenil (premislek!) in tako nasprotnika postavil v pozicijo z neničelno nim vsoto. Po indukcijski predpostavki pa je takšna pozicija dobljena za igralca, ki bo takrat na potezi – torej za nasprotnika. Pozicija z ničelna nim vsoto je zato izgubljena za igralca na potezi. ■

ZGLED. *Na treh kupčih imamo zaporedoma* 6, 13 *in* 14 *vžigalic. Ali je igra dobljena za igralca na potezi ali za igralca, ki ni na potezi?*

Zapišimo števila 6, 13 in 14 v dvojiškem zapisu in jim poiščimo nim vsoto.

$$\begin{array}{rl} 6: & 0110 \\ 13: & 1101 \\ 14: & 1110 \\ \hline \oplus: & 0101 \end{array}$$

Nim vsota je neničelna, kar pomeni, da je igra dobljena za igralca na potezi. Postavimo se v njegovo vlogo in razmislimo, kaj moramo odigrati, da bo igra ostala dobljena za nas.

Gledano z leve proti desni se prva enica v vsoti pojavi v drugem stolpcu. Izberimo vrstico, ki ima v tem stolpcu enico. Na izbiro imamo kar vse tri vrstice – odločimo se, na primer, za drugo (1101). Ker se v vsoti enica pojavi še v zadnjem stolpcu, popravimo drugo vrstico na drugem in zadnjem stolpcu – dobimo 1000, kar v dvojiškem zapisu pomeni število 8. To pomeni, da moramo z drugega kupčka vzeti toliko vžigalic, da jih bo ostalo 8. Ker je na začetku tam 13 vžigalic, jih moramo torej vzeti 5. S tem bomo igro prevedli v situacijo

$$\begin{array}{rl} 6: & 0110 \\ 8: & 1000 \\ 14: & 1110 \\ \hline \oplus: & 0000 \end{array}$$

z ničelno vsoto, ki je izgubljena za našega nasprotnika, ki se v tej situaciji znajde na potezi. ■

# 8 Zapornikova dilema

Denimo, da policija zasači pri nečednih poslih dva nepridiprava, zaradi pomanjkljivih dokazov pa ni prepričana, da bo na sodišču dosegla obsodilne sodbe brez priznanja sodelujočih. Zato si izmisli naslednji postopek:

Osumljenca zapre v ločeni sobi in vsakega od njiju pozove, da dejanje prizna in hkrati obtoži svojega pajdaša. Pri tem policija (v sodelovanju s tožilstvom, seveda) obljubi, da bo v primeru, če en prizna, drugi pa ne, tistega, ki je priznal, izpustila, za drugega pa zahtevala 10 let zapora. Če priznata oba, gresta tudi v zapor oba, vsak za 7 let, če pa ne prizna nihče od njiju, bodo že našli kaj, za kar ju bodo zaprli – vsakega za 1 leto.

Nepridiprava sta se tako znašla v klasični *zapornikovi dilemi*. Kako bosta dilemo razrešila racionalna osebka? Prvi nepridiprav razmišlja takole:

*Če drugi ne prizna, je zame gotovo bolje, da priznam, saj bom tako prost, sicer pa bi odsedel 1 leto. Če pa drugi prizna, pa je spet bolje, da tudi sam priznam, saj bom tako dobil le* 7 *let namesto* 10*. V vsakem primeru je torej bolje, da priznam.*

Racionalna zapornika se bosta torej oba odločila za priznanje, kar ju bo na koncu popeljalo vsakega za 7 let v zapor. S tem seveda zapravita odlično priložnost, da ob hkratnem vztrajanju pri nedolžnosti odslužite le vsak po 1 leto. Poskusimo zgornjo situacijo posplošiti in jo izraziti v matematičnem jeziku.

Imejmo dva *igralca* (v zgornjem primeru *zapornika*): $P_1$ in $P_2$. Vsak od njiju ima na voljo množico *akcij*, ki jih lahko izvede – množico akcij igralca $P_i$ označimo z $A_i$ (v zgonjem primeru je $A_1 = A_2 = \{\mathrm{P}, \mathrm{NP}\}$). Igra, ki jo igralca igrata je preprosta: vsak od njiju izbere eno od akcij iz svoje množice možnih akcij. To storita istočasno, tako da noben od njiju ne ve, katero akcijo je izbral drugi. Paru akcij $(a_1, a_2)$, $a_i \in A_i$, ki jih igralca izbereta, rečemo *profil*. Množica vseh možnih profilov je torej enaka $A_1 \times A_2$. V primeru zgoraj opisane zapornikove dileme imamo torej štiri možne profile: (P, P), (P, NP), (NP, P) in (NP, NP).

Ko oba igralca izbereta svojo akcijo in tako določita nek profil $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, dobita *nagrado*, ki jo izrazimo kot realno število. Pri tem si mislimo, da si vsak igralec želi čim večje število za nagrado. Nagrado igralca $P_i$ pri profilu $(a_1, a_2)$ označimo z $u_i(a_1, a_2)$. V primeru zapornikov je za *nagrade* smiselno vzeti negativno število let prisojenega zapora, saj gre v resnici za kazen in ne nagrado v pravem pomenu besede – tako dobimo:

$$u_1(P, P) = -7,\ u_1(P, NP) = 0,\ u_1(NP, P) = -10,\ u_1(NP, NP) = -1,$$

$$u_2(P,P) = -7,\ u_2(P,NP) = -10,\ u_2(NP,P) = 0,\ u_2(NP,NP) = -1.$$

Funkcijama $u_1\colon A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ in $u_2\colon A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ rečemo *funkciji preferenc* igralcev $P_1$ in $P_2$.

Igra postane preglednejša, če nagrade zložimo v *bimatriko*, katere vrstice so oštevilčene z elementi iz množice $A_1$, stolpci iz množice $A_2$, na presečišču vrstice $a_1 \in A_1$ in stolpca $a_2 \in A_2$ pa stoji par $u_1(a_1,a_2), u_2(a_1,a_2)$. V primeru zapornikove dileme je taka bimatrika torej enaka

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathrm{P} & \mathrm{NP} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{P} \\ \mathrm{NP} \end{array} & \begin{pmatrix} -7,-7 & 0,-10 \\ -10,0 & -1,-1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Ko imamo bimatriko dano, lahko pozabimo na originalno igro in si mislimo, da igralca igrata igro kar na bimatriki: Prvi igralec izbere vrstico, drugi stolpec, nagrado pa prečitata na presečišču izbrane vrstice in stolpca – prvo število na presečišču je nagrada prvega igralca, drugi število pa nagrada drugega igralca. Takšno igro v literaturi poznamo pod pojmom *strateška igra s funkcijo preferenc za dva igralca*.

## 8.1 Nashevo ravnovesje

Oglejmo si ponovno bimatriko, ki ustreza zapornikovi dilemi. Pojasnili smo že, kakšno (sicer povsem racionalno) razmišljanje napelje zapornika, da izbereta profil (P,P), ki je očitno za oba neugodnejši od profila (NP,NP).

Srž problema tiči v tem, da ima med vsemi možnimi profili le profil (P,P) naslednjo lastnost: Če je kateremu koli od obeh igralcev dana možnost, da svojo akcijo spremeni (drugemu pa ne), igralec nima nobene motivacije, da bi to storil. Premislimo, da je temu res tako: Če je možnost spremembe akcije dana prvemu igralcu, se zanjo ne bo odločil, saj bi to privedlo do profila (NP,P), ki je zanj še slabši kot profil (P,P). Podobno, če je možnost spremembe akcije dana drugemu igralcu, se zanjo ne bo odločil, saj je zanj profil (P,NP) slabši kot profil (P,P).

Profilom, ki imajo zgoraj opisano lastnost, rečemo *Nasheva ravnovesja.* Zapišimo definicijo Nashevega ravnovesja še matematično korektno: Profil $(a_1^*, a_2^*)$ je Nashevo ravnovesje strateške igre s funkcijama preferenc $u_1$ in $u_2$, če velja naslednje:

$$\forall a_1 \in A_1 \setminus \{a_1^*\} :\ u_1(a_1, a_2^*) \leq u_1(a_1^*, a_2^*),$$

$$\forall a_2 \in A_2 \setminus \{a_2^*\} :\ u_2(a_1^*, a_2) \leq u_2(a_1^*, a_2^*).$$

Če v zgornjih dveh neenakostih nadomestimo šibko neenakost $\leq$ s strogo neenakosjo $<$, potem govorimo o *strogem Nashevem ravnovesju*.

Nekatere igre imajo lahko več Nashevih ravnovesij, nekatere natanko eno, nekatere pa nobenega. Primer z natanko enim Nashevim ravnovesjem smo že videli (zapornikova dilema). Oglejmo is še primera z več in z nobenim Nashevim ravnovesjem.

**Bitka spolov**

Fant in punca se odpravljata v kino, kjer v prvi dvorani igra akcijski film, v drugi pa romantična komedija. Vsak zase se morata odločiti, katerega od filmov si bosta ogledala. Fantu bi bilo najbolj všeč, da gresta oba gledat akcijski film (to opcijo oceni z oceno 10), če to ne gre, bi se zadovoljil tudi s skupnim ogledom romantične komedije (to opcijo oceni s 5), najmanj zadovoljen pa bi bil, če si film ogleda sam – v tem primeru mu je celo vseeno kaj gleda (ti dve opciji oceni z 0). Situacija pri punci je simetrična. Najraje bi gledala romantično komedijo skupaj s fantom (ocena 10), če to ne gre, potem akcijski film skupaj s fantom (ocena 5), sicer pa bo nezadovoljna (ocena 0). Njuno dilemo lahko opišemo z bimatriko

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathrm{AF} & \mathrm{RK} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{AF} \\ \mathrm{RK} \end{array} & \begin{pmatrix} 10,5 & 0,0 \\ 0,0 & 5,10 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Hitro se prepričamo, da ima ta igra dve Nashevi ravnovesji (obe strogi), namreč (AF,AF) in (RK,RK). Kako se bo igra v resnici razpletla, je težko napovedati. Če v pogovoru eden od obeh ne bo popustil, se jima prav lahko primeri, da bosta šla gledat vsak svoj film, kar je za oba najmanj ugoden razplet. Njuna dilema se v literaturi imenuje *bitka spolov*.

**Par nepar**

Dva igralca istočasno pokažeta en ali dva prsta. Če je skupno število pokazanih prstov sodo, tedaj prvi igralec drugemu plača en evro, sicer pa drugi igralec plača prvemu en evro. Pripadajoča bimatrika je takšnale:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{1 prst} & \text{2 prsta} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{1 prst} \\ \text{2 prsta} \end{array} & \begin{pmatrix} -1,1 & 1,-1 \\ 1,-1 & -1,1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ta igra, ki jo imenujemo tudi *par nepar* (ali tudi *matching coins* v angleščini) nima Nashevega ravnovesja. Omenimo še, da ima ta igra lastnost, da je vsota preferenčnih funkcij $u_1(a_1, a_2) + u_2(a_1, a_2)$ pri vsakem profilu $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ anaka 0. Takšnim igram rečemo tudi igre z ničelno vsoto in jih lahko enolično opišemo z eno samo matriko, namreč z matriko vrednosti $u_1(a_1, a_2)$. Vrednosti, ki pripadajo drugemu igralcu dobimo tako, da vrednosti preferenčne funkcije drugega igralca pomnožimo z $-1$. V konkretnem primeru tako dobimo matriko

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 8.2 Dominantne akcije

Pri strateški igri se včasih primeri, da je kaka od akcij takšna, da je racionalni igralec ne bo v nobenem primeru izbral. Na primer, če obstajata akciji $a_1, a_1' \in A_1$, za kateri pri vsakem $a_2 \in A_2$ velja:

$$u_1(a_1, a_2) \leq u_2(a_1', a_2),$$

potem racionalni prvi igralec ne bo izbral akcije $a_1$, saj je ne glede na izbiro drugega igralca zanj bolje (ali pa vsaj ne slabše) izbrati akcijo $a_1'$. V tem primeru rečemo, da akcija $a_1'$ dominira akcijo $a_1$, oziroma, da je akcija $a_1$ dominirana z akcijo $a_1'$. Na analogen način lahko definiramo tudi pojem dominacije med akcijami drugega igralca.

Ob predpostavki racionalnosti igralcev lahko torej dominirane akcije kar izbrišemo iz množice akcij in tako zmanjšamo velikost igre. V zelo posebnih primerih lahko s postopkom brisanja dominiranih akcij igro prevedemo do le ene možne akcije za vsakega igralca. V takšnem primeru lahko rezultat igre (ob predpostavki racionalnosti igralcev) natančno napovemo. Profil akcij, ki ga pri tem dobimo, je hkrati tudi edino Nashevo ravnovesje igre.

# 9 Pasti statistike

## 9.1 Simpsonov paradoks

Zamislimo si naslednjo hipotetično situacijo. Na dveh košarkarskih tekmah ekpie Zmajčkov igralca Jože in Lojze mečeta proste mete z naslednjim izkoristkom:

| | 1. tekma | 2. tekma |
|---|---|---|
| Jože | 50% | 75% |
| Lojze | 25% | 70% |

Zvesti navijači Zmajčkov iz tega brž sklepajo, da je Jože boljši izvajalec prostih metov kot Lojze. Pa si poglejmo še, koliko prostih metov sta Jože in Lojze na vsaki od tekem vrgla in koliko zadela.

| | 1. tekma | 2. tekma |
|---|---|---|
| Jože | 8 : 16 | 3 : 4 |
| Lojze | 1 : 4 | 7 : 10 |

Na obeh tekmah skupaj je torej Jože zadel 11 metov od 20, kar pomeni, da je bil 55% uspešen. Lojze pa je zadel 8 metov od 14, kar znese dobrih 57%. Gledano na obeh tekmah skupaj, je bil torej Lojze boljši od Jožeta (pa čeprav je bil na vsaki tekmi slabši).

Kratek premislek nam pove, da je do takšne presenetljive situacije prišlo zato, ker je Lojze na 2. tekmi (kjer je bil izkoristek metov obeh igralcev precej večji kot izkoristek na 1. tekmi) vrgel precej več prostih metov kot Jože, na 1. tekmi (ko sta oba metala slabo), pa je večkrat metal Jože. Zato ima v skupnem Lojzetovem rezultatu poglavitno vlogo 2. tekma, v Jožetovem pa 1. tekma.

Zgoraj opisani nenavadni pojav se v literature pojavlja pod imenov *Simpsonov paradoks*, poimenovan po britanskem statistiku Edwardu Simpsonu. Ta navidezni paradoks se v najrazličnejših preoblekah pogosto pojavlja v vsakdanjem življenju. Oglejmo si nekaj primerov.

### Vpisi na podiplomski študij na univerzi Berkley

Leta 1973 se je na podiplomski študij na univerzo v Berkleyju poskušalo vpisati 12.763 kandidatov, od tega 8.442 moških in 4.321 žensk. Na študij je bilo sprejetih 3.738 moških in 1.494 žensk. Če izračunamo uspešnost po spolih, dobimo naslednjo tabelo:

| | prijavljeni | sprejeti | delež |
|---|---|---|---|
| moški | 8.442 | 3.738 | 44% |
| ženske | 4.321 | 1.494 | 35% |
| skupaj | 12.763 | 5.232 | 41% |

Tako velika razlika med uspešnostjo moških in žensk je sprožila namigovanja, da dajejo vpisne komisije prednost moškim (hote ali nehote), kar bi ob predpostavki, da je usposobljenost kandidatov enakomerno porazdeljena med moške in ženske, pomenilo spolno diskriminacijo. Ker poteka izbirni proces na vsakem oddelku univerze ločeno, so nato pogledali, kateri izmed oddelkov kažejo najhujšo sliko. Rezultat te podrobne analize pa je pokazal presenetljivo sliko: Na veliki večini oddelkov je bila uspešnost ženskih kandidatk višja od uspešnost moških kandidatov, na tistih, kjer pa so bili moški uspešnejši, pa je bila razlika tako majhna, da jo je bilo moč pripisati naključju. Ugotovili so torej, da sprejemni postopki na nobenem od oddelkov niso diskriminatorni v škodo žensk. Od kod torej navidezna diskriminatorna slika na nivoju celotne univerze?

Odgovor se skriva v dejstvu, da porazdelitve kandidatk po oddelkih in kandidatov po oddelkih nista bili enaki: ženske so se v večini vpisovale na popularnejše oddelke, kjer je bilo razmerje med prijavljenimi in sprejetimi zelo veliko (in zato uspešnost pri sprejemu nizka), moški pa so se v večji meri kot ženske odločali za manj popularne študije, kjer je bilo prijavljenih glede na število vpisnih mest relativno malo in zato uspešnost pri sprejemu visoka. Zato je na nivoju celotne univerze uspešnost moških bližje povprečni uspešnosti na teh, manj popularnih oddelkih, uspešnost žensk pa bližje povprečni uspešnosti na popularnih oddelkih. Na videz diskriminatorne številke so torej posledica neenakih preferenc žensk in moških in ne diskriminacije vpisnih komisij.

### Uspešnost zdravljenja

Primer v tem razdelku je sicer hipotetičen, sloni pa na konkretni študiji o zdravljenju ledvičnih kamnov, ki so jo izvajali v Angliji med leti 1972 in 1985. Zaradi enostavnosti smo sicer kompleksno študijo nekoliko poenostavili.

Mislimo si, da zdravimo 100 bolnikov z boleznijo $X$. Na razpolago imamo dva načina zdravljenja: $A$ in $B$. Bolezen $X$ lahko nastopi v dveh oblikah $X_1$ in $X_2$. Glede na tip bolezni in na način zdravljenja, za katerega smo se odločili, bolnike razdelimo v štiri skupine. V naslednji tabeli podajmo število bolnikov v pozamezni skupini in število bolnikov, pri katerih je bilo zdravljenje uspešno. Dodajmo še odstotek uspešnih zdravljenj.

| | tip $X_1$ | tip $X_2$ | skupaj |
|---|---|---|---|
| zdravljenje $A$ | 30 : 60 (50%) | 7 : 10 (70%) | 37 : 70 (53%) |
| zdravljenje $B$ | 2 : 5 (40%) | 15 : 25 (60%) | 17 : 30 (57%) |

Zgornja tabela nas po eni strani napeljuje na zaključek, da je način zdravljenja $A$ pri obeh tipih bolezni uspešnejši od tipa zdravljenja $B$. Po drugi strani pa je zdravljenje $B$ uspešnejše na skupini vseh bolnikov z boleznijo $X$. Do tega, na videz protislovnega zaključka smo prišli zaradi neenakomerne porazdelitve zdravljenj $A$ in $B$ znotraj posameznih tipov bolezni.

## 9.2 Muldoonov paradoks

Nekdanji ministrski predsednik Nove Zelandije Robert Muldoon (1921–1992) je ob neki priložnosti izjavil:

*Ko se novozelandec preseli na Avstralijo, dvigne povprečni IQ obema državama.*

Ta, na videz protislovna trditev, bi lahko bila resnična, če bi bil povprečni IQ Avstralcev nižji od IQ-ja novozelandcev in bi se novozelandec, ki ima nižji IQ od povprečnega novozelandskega, vendar višjega od povprečnega avstralskega, preselil iz NZ v Avstralijo.

Variacij na izjavo Roberta Muldoona je veliko. Spet omenimo primer iz medicinske statistike:

Če uvedemo presejalne teste za zgodnje odkrivanje težke bolezni, se že s tem poveča pričakovana življenska doba tako v skupini bolnih kot v skpupini zdravih. S tem, ko smo uvedli presejalne teste, smo namreč iz skupine zdravih v skupino bolnih preselili tiste, ki so sicer manj zdravi kot je povprečno zdravje v skupini zdravih, vendar bolj zdravi kot je povprečno zdravje v skupini bolnih. S tem smo skupino zdravih naredili še bolj zdravo (saj smo izločili med njimi manj zdrave) ter s tem povečali pričakovano življenskko dobo v tej skupini. Podobno pa smo povečali pričakovano življensko dobo v skupini bolnih, saj smo jim dodali manj bolne (in se je s tem povprečno zdravje v tej skupini povečalo).

## 9.3 Paradoks prijateljev

Ljudje imamo večkrat občutek, da imamo premalo prijateljev – še posebej, če število svojih prijateljev primerjamo s številom prijateljev svojih prijateljev. Ta občutek morda ni povsem brez podlage. V večini socialnih omrežji namreč velja, da ima večina ljudi manj prijateljev kot njihovi prijatelji.

Razlaga za ta pojav je zelo preprosta: Med svojimi prijatelji bomo z večjo verjetnostjo našli tiste, ki imajo veliko prijateljev (in tako tudi nas) kot tiste, ki imajo malo prijateljev. Zato je za veličino ljudi povprečno število prijateljev njihovih prijateljev večje kot povprečno število prijateljev v celotni populaciji.

# Literatura


[1] S. J. Brams, A. D. Taylor: *An Envy-Free Cake Division Protocol*, The American Mathematical Monthly **102** (1995), 9–18.

[2] D. Marušič, T. Pisanski *Möbius-Kantorjeva konfiguracija v politiki*, Presek **28** (2000–2001), 264–268.

[3] S. Cabello, M. Juvan *Strateške igre s funkcijami preferenc*, rokopis.