Rešitve 1. kolokvija iz NUMERIČNIH METOD 1

Praktična matematika

13. december 2011

1. V formatu $P(2, 7, -10, 10)$ zapišite število $x = 13.7$. Izračunajte relativno napako

$$\frac{|x - \mathrm{fl}(x)|}{|x|}$$

in jo primerjajte z osnovno zaokrožitveno napako u v danem formatu.

Rešitev:
Najprej pretvorimo celi del:

$$\begin{aligned} 13 : 2 &= 6 + 1 \\ 6 : 2 &= 3 + 0 \\ 3 : 2 &= 1 + 1 \\ 1 : 2 &= 0 + 1 \end{aligned}$$

Od tod sledi $13_{(10)} = 1101_{(2)}$. Za decimalni del dobimo

$$\begin{aligned} 0.7 * 2 &= 0.4 + 1 \\ 0.4 * 2 &= 0.8 + 0 \\ 0.8 * 2 &= 0.6 + 1 \\ 0.6 * 2 &= 0.2 + 1 \\ 0.2 * 2 &= 0.4 + 0 \\ 0.4 * 2 &= 0.8 + 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

in od tod $0.7_{(10)} = 0.101100\ldots_{(2)}$. Skupaj je

$$13.7_{(10)} = 1101.101100\ldots_{(2)} = 0.1101101100\ldots_{(2)} \cdot 2^4.$$

Ker mora biti mantisa dolga 7, zaokrožimo in dobimo

$$\mathrm{fl}(x) = 0.1101110_{(2)} \cdot 2^4 = 13 + (2^{-1} + 2^{-2}) = 13.75.$$

Sledi

$$\frac{|x - \mathrm{fl}(x)|}{|x|} \sim 0.00364964$$

Osnovna zaokrožitvena napaka pa je $u = 2^{-7} \sim 0.0078125$.

2. Kako bi numerično stabilno izračunali vrednosti funkcije

$$f(x) = \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2}$$

za majhne x? Utemeljite, zakaj pride do težav. S kalkulatorjem stabilno izračunajte vrednosti $f(x)$ za $x = 10^{-5}, 10^{-8}$ ter določite limito $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Rešitev:
Pri majhnih x je $\sqrt{4 - x^2} \sim 2$ in pride do odštevanja skoraj enakih števil, kar vodi do tega, da se izgubi precej točnih decimalk. Pri zelo majhnih x-sih dobimo v števcu kar 0 in zato je vrednost f-a 0. Izraz preoblikujemo v stabilno obliko z racionalizacijo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2} = \frac{(2 - \sqrt{4 - x^2})(2 + \sqrt{4 - x^2})}{x^2(2 + \sqrt{4 - x^2})} = \\ &= \frac{1}{2 + \sqrt{4 - x^2}}. \end{aligned}$$

Iz stabilne oblike takoj dobimo limito

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{4}.$$

S kalkulatorjem izračunamo

$$f(10^{-5}) = \frac{1}{4}, \quad f(10^{-8}) = \frac{1}{4}.$$

Če bi računali direktno, bi dobili

$$f(10^{-5}) = 0, \quad f(10^{-8}) = 0.$$

3. Dana je iteracija

$$x_{r+1} = \frac{2}{3}\left(x_r + \frac{1}{x_r} - \frac{1}{2}\right), \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Izračunajte fiksne točke iteracije ter določite, katere so privlačne in katere odbojne.

(b) V okolici privlačnih fiksnih točk določite red konvergence.

Rešitev:
Iteracijska funkcija je $g(x) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$. Fiksne točke so rešitve enačbe $g(\alpha) = \alpha$. Iz

$$\begin{aligned} g(\alpha) - \alpha &= -\frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3\alpha} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3\alpha}\left(\alpha^2 + \alpha - 2\right) = \\ &= -\frac{1}{3\alpha}(\alpha + 2)(\alpha - 1) \end{aligned}$$

dobimo, da sta fiksni točki $\alpha = -2$ in $\alpha = 1$. Ker je $g'(-2) = \frac{1}{2}$ in $g'(1) = 0$ sta obe točki privlačni fiksni točki.

Ker je $g'(-2) \neq 0$, je v bližini $\alpha = -2$ red konvergence linearen. V bližini $\alpha = 1$ je red konvergence kvadratičen, saj je $g'(1) = 0$ in $g''(1) = \frac{4}{3} \neq 0$.

4. Rešujemo enačbo $p(x) = 0$, kjer je $p(x) = 3x^3 + 2x - 1$.
   (a) Preverite, da ima enačba vsaj eno rešitev na intervalu $[0, 1]$.
   (b) Zapišite tangentno metodo. Z začetnim približkom $x_0 = 0$ izračunajte prva dva približka k rešitvi.
   (c) Zapišite pridruženo matriko C_p polinoma p. Kakšna je povezava med matriko C_p ter ničlami polinoma p?

Rešitev:
Ker je
$$p(0) = -1, \quad p(1) = 4,$$
funkcija p spremeni predznak na $[0, 1]$. Ker je zvezna ima na tem intervalu vsaj eno ničlo.

Tangentna metoda:
$$x_{r+1} = \frac{6x_r^3 + 1}{9x_r^2 + 2}, \quad r = 0, 1, \ldots$$
Z začetnim $x_0 = 0$ dobimo
$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{7}{17} = 0.411765, \quad x_3 = 0.402413, \quad \ldots.$$
Za primerjavo zapišimo še točno rešitev: 0.4023199380628143011.

Pridružena matrika polinoma
$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$
Lastne vrednosti te matrike so natanko ničle polinoma.

5. Rešujemo nelinearen sistem
$$x^2 + 2y^2 = 2,$$
$$y^2 - 2x = -1.$$
Z Newtonovo metodo z začetnim približkom $\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ izračunajte prvi približek k rešitvi. Skicirajte obe krivulji. Koliko je vseh realnih rešitev?

Rešitev:
Izračunamo
$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y^2 - 2 \\ y^2 - 2x + 1 \end{pmatrix}, \quad JF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 4y \\ -2 & 2y \end{pmatrix}.$$
V prvem koraku rešimo sistem
$$JF(1, 1) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -F(1, 1),$$

ki se glasi

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rešitev je enaka $\Delta x = -\frac{1}{6}$, $\Delta y = -\frac{1}{6}$. Od tod dobimo nov približek

$$\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

Pri nalogi dejansko računamo presečišča elipse in parabole. Iz grafa se vidi, da ima sistem dve realni rešitvi.