Rešitve 1. kolokvija iz NUMERIČNIH METOD 1

Praktična matematika

10. december 2013

1. V formatu $P(10, 5, -100, 100)$ izračunajte vrednost polinoma

$$p(x) = 5.5555x^2 - 3.2111x + 9.8765$$

za $x = 12.345$ po Hornerjevem algoritmu. Izračunajte relativno napako

$$\frac{|\widehat{p}(x) - p(x)|}{|p(x)|}$$

ter jo primerjajte z osnovno zaokrožitveno napako v dani aritmetiki.

Rešitev:
S Hornerjevim algoritmom izračunamo vrednost polinoma $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ s sledečimi elementarnimi operacijami:

$$\begin{aligned} p_1 &= a_2x, \\ v_1 &= p_1 + a_1, \\ p_2 &= v_1x, \\ v_2 &= p_2 + a_0. \end{aligned}$$

Zadnja izračunana vrednost je vrednost polinoma v točki x: $v_2 = p(x)$. V danem primeru dobimo

$$\begin{aligned} \widehat{p}_1 &= fl\,(68.5826475) = 0.68583 \cdot 10^2, \\ \widehat{v}_1 &= fl\,(65.3718999) = 0.65372 \cdot 10^2, \\ \widehat{p}_2 &= fl\,(807.01734) = 0.80702 \cdot 10^3, \\ \widehat{v}_2 &= fl\,(816.8965) = 0.81690 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

Izračunana vrednost je tako enaka

$$\widehat{p}(x) = 816.9,$$

točna pa se glasi

$$p(x) = 816.8882538875.$$

Relativna napaka je velikosti $1.438 \cdot 10^{-5}$ in je manjša od osnovne zaokrožitvene napake, ki je enaka $u = 5 \cdot 10^{-5}$.

2. Dokažite, da integral

$$I_n = \pi \int_0^1 x^{2n} \sin(\pi x) dx$$

zadošča rekurzivni enačbi

$$I_n = 1 - \frac{2n(2n-1)}{\pi^2} I_{n-1}.$$

Utemeljite, kako bi numerično stabilno izračunali člene I_n za velike n. Na stabilen način izračunajte I_{20}.

Rešitev:

Rekurzivno zvezo izpeljemo tako, da dvakrat izvedemo integracijo per partes. V prvem koraku dobimo

$$\begin{aligned} I_n &= \pi \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) x^{2n} \Big|_0^1 + \frac{2n}{\pi} \int_0^1 x^{2n-1} \cos(\pi x) dx \right) = \\ &= \pi \left(\frac{1}{\pi} + \frac{2n}{\pi} \int_0^1 x^{2n-1} \cos(\pi x) dx \right) = \\ &= 1 + 2n \int_0^1 x^{2n-1} \cos(\pi x) dx \end{aligned}$$

S ponovno integracijo per partes izpeljemo

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{2n-1} \cos(\pi x) dx &= \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) x^{2n-1} \Big|_0^1 - \frac{2n-1}{\pi} \int_0^1 x^{2n-2} \sin(\pi x) dx = \\ &= -\frac{2n-1}{\pi} \int_0^1 x^{2n-2} \sin(\pi x) dx = \\ &= -\frac{2n-1}{\pi} \frac{1}{\pi} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$I_n = 1 - \frac{2n(2n-1)}{\pi^2} I_{n-1}.$$

Prvi člen zaporedja je enak $I_0 = 2$. Ker velja ocena

$$0 \le \pi \int_0^1 x^{2n} \sin(\pi x) dx \le \pi \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{\pi}{2n+1},$$

morajo členi z naraščajočim n padati proti 0. Če člene računamo numerično od prvega naprej, pa to ne drži. Napaka, ki se pojavi pri členu I_1, se na vsakem koraku pomnoži s faktorjem $\frac{2i(2i-1)}{\pi^2}$, $i = 2, 3, \ldots$. Napaka tako slej kot prej prevlada nad točnimi vrednostmi (ki so majhne) in numerično izračunani členi začnejo po absolutni vrednosti naraščati. Stabilno lahko člene izračunamo v obratnem vrstnem redu. Postavimo $I_N = 0$ za nek dovolj velik N in računamo

$$I_{n-1} = \frac{\pi^2(1 - I_n)}{2n(2n-1)}, \quad n = N, N-1, \ldots, 1.$$

Čeprav je člen I_N napačen, se napaka na vsakem koraku deli s faktorjem $\frac{\pi^2}{2i(2i-1)}$, $i = N, N-1, \ldots$ in zato prej ali slej izgine.

Če izberemo $I_{25} = 0$, dobimo

$$
\begin{aligned}
I_{24} &= \frac{\pi^2(1 - I_{25})}{50(50-1)} = 4.02840996 \cdot 10^{-3}, \\
I_{23} &= \frac{\pi^2(1 - I_{24})}{48(48-1)} = 4.357201056 \cdot 10^{-3}, \\
I_{22} &= \frac{\pi^2(1 - I_{23})}{46(46-1)} = 4.747150024 \cdot 10^{-3}, \\
I_{21} &= \frac{\pi^2(1 - I_{22})}{44(44-1)} = 5.191729338 \cdot 10^{-3}, \\
I_{20} &= \frac{\pi^2(1 - I_{21})}{42(42-1)} = 5.701721305 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}
$$

Če bi izračunali integral I_{20} brez uporabe rekurzivne formule, bi dobili $5.701721304 \cdot 10^{-3}$. Z rekurzivnim računanjem v obratni smeri smo torej dobili natančen rezultat.

3. Enačbo $x^2 - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, rešujemo z iteracijo

$$x_{r+1} = \frac{x_r^3}{Ax_r^2 + B}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Določite neznana koeficienta A in B tako, da bo red konvergence v okolici rešitve $\sqrt{a}$ vsaj kvadratičen. Kakšen je točno red konvergence? Z iteracijo, ki jo dobite, izračunajte $\sqrt{5}$ z začetnim $x_0 = 2$ na pet decimalnih mest natančno.

Rešitev:
Iteracijska funkcija je enaka

$$g(x) = \frac{x^3}{Ax^2 + B}.$$

Da bo red konvergence v okolici $\sqrt{a}$ vsaj kvadratičen, mora veljati

$$g\left(\sqrt{a}\right) = \sqrt{a}, \quad g'\left(\sqrt{a}\right) = 0.$$

Izračunamo

$$g'(x) = \frac{Ax^4 + 3Bx^2}{(Ax^2 + B)^2}, \quad g'(a) = \frac{Aa^2 + 3Ba}{(Aa + B)^2}.$$

Zgornji enačbi se poenostavita v

$$Aa + B = a, \quad Aa^2 + 3aB = 0$$

in rešitev se glasi

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = -\frac{a}{2}.$$

Iteracija je torej oblike

$$x_{r+1} = \frac{2x_r^3}{3x_r^2 - a}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Ker je $g''\left(\sqrt{a}\right) = \frac{3}{\sqrt{a}} \neq 0$, je konvergenca točno kvadratična.
Za $a = 5$ dobimo z začetnim $x_0 = 2$ sledeče približke:

$$x_1 = \frac{16}{7}, \quad x_2 = 2.237639989, \quad x_3 = 2.236069633, \quad \ldots$$

Ker je $\sqrt{5} = 2.236067977$, je zahtevana natančnost dosežena že po treh korakih.

4. Dan je polinom
$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 1.$$
   (a) Določite število različnih ničel na intervalu $(0, 1)$.
   (b) Dokažite, da ni nobene ničle na intervalu $[3, \infty) \cup (-\infty, -1]$.
   (c) S tangentno metodo in začetnim približkom $x_0 = 1$ izračunajte eno od rešitev na tri decimalna mesta natančno.
   (d) K polinomu p zapišite pridruženo matriko C_p.

Rešitev:
Za dan polinom izračunamo Sturmovo zaporedje:
$$\begin{aligned} p_0(x) &= x^3 - 3x^2 + 1, \\ p_1(x) &= 3x^2 - 6x, \\ p_2(x) &= 2x - 1, \\ p_3(x) &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Dalje izračunamo
$$\begin{aligned} \{p_0(0), p_1(0), p_2(0), p_3(0)\} &= \left\{1, 0, -1, \frac{9}{4}\right\}, \\ \{p_0(1), p_1(1), p_2(1), p_3(1)\} &= \left\{-1, -3, 1, \frac{9}{4}\right\}, \\ \{p_0(3), p_1(3), p_2(3), p_3(3)\} &= \left\{1, 9, 5, \frac{9}{4}\right\}, \\ \{p_0(-1), p_1(-1), p_2(-1), p_3(-1)\} &= \left\{-3, 9, -3, \frac{9}{4}\right\}, \end{aligned}$$
od koder preberemo spremembe predznaka
$$\sigma(0) = 2, \quad \sigma(1) = 1, \quad \sigma(3) = 0, \quad \sigma(-1) = 3.$$
Vidimo tudi, da $p(-1), p(0), p(1), p(3) \neq 0$. Število različnih ničel na intervalu $(0, 1)$ je torej enako $\sigma(0) - \sigma(1) = 1$. Ker je $\sigma(-1) - \sigma(3) = 3$ so na intervalu $(-1, 3)$ tri različne ničle. Ker pa je p polinom stopnje 3, so to vse njegove ničle.

Tangentna metoda se glasi
$$x_{r+1} = \frac{2x_r^3 - 3x_r^2 - 1}{3x_r(x_r - 2)}, \quad r = 0, 1, \dots$$
Z začetnim približkom $x_0 = 1$ dobimo
$$x_1 = 0.6666666667, \quad x_2 = 0.6527777778, \quad x_3 = 0.6527036468.$$

Ker je relativna razlika

$$\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0.000113575 < 10^{-3},$$

je x_3 izračunan na zahtevano natančnost.

Pridružena matrika k polinomu se glasi

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$