Rešitve 1. kolokvija iz NUMERIČNIH METOD 1

Praktična matematika

12. januar 2010

1. V formatu $P(2,7,-10,10)$ zapišite število $x = 13.21$. Izračunajte relativno napako

$$\frac{|x - \mathrm{fl}(x)|}{|x|}$$

in jo primerjajte z osnovno zaokrožitveno napako u v danem formatu.

Rešitev:
Najprej pretvorimo celi del:

$$\begin{aligned} 13 : 2 &= 6 + 1 \\ 6 : 2 &= 3 + 0 \\ 3 : 2 &= 1 + 1 \\ 1 : 2 &= 0 + 1 \end{aligned}$$

Od tod sledi $13_{(10)} = 1101_{(2)}$. Za decimalni del dobimo

$$\begin{aligned} 0.21 * 2 &= 0.42 + 0 \\ 0.42 * 2 &= 0.84 + 0 \\ 0.84 * 2 &= 0.68 + 1 \\ 0.68 * 2 &= 0.36 + 1 \\ 0.36 * 2 &= 0.72 + 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

in od tod $0.21_{(10)} = 0.00110\ldots_{(2)}$. Skupaj je

$$13.21_{(10)} = 1101.00110\ldots_{(2)} = 0.110100110\ldots_{(2)} \cdot 2^4.$$

Ker mora biti mantisa dolga 7, zaokrožimo in dobimo

$$\mathrm{fl}(x) = 0.1101010_{(2)} \cdot 2^4 = (2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6}) \cdot 2^4 = 13.25.$$

Sledi

$$\frac{|x - \mathrm{fl}(x)|}{|x|} \sim 3.028 \cdot 10^{-3}$$

Osnovna zaokrožitvena napaka pa je $u = 2^{-7} \sim 7.8125 \cdot 10^{-3}$.

2. Kako bi numerično stabilno izračunali vrednosti funkcije

$$f(x) = \frac{\cos(2+x) - \cos(2-x)}{x}$$

za majhne x? Utemeljite, zakaj pride do težav. Stabilno izračunajte vrednosti $f(x)$ za $x = 10^{-5}, 10^{-8}$ ter določite limito $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Rešitev:
Pri majhnih x pride v števcu do odštevanja skoraj enakih števil, kar vodi do numeričnih napak. Izraz preoblikujemo v stabilno obliko s pomočjo adicijskega izreka:

$$f(x) = \frac{\cos 2\,\cos x - \sin 2\,\sin x - (\cos 2\,\cos x + \sin 2\,\sin x)}{x} = -2\,\sin 2\,\frac{\sin x}{x}.$$

Iz stabilne oblike takoj dobimo limito

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -2\,\sin 2 = -1.818594854,$$

saj je $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. S kalkulatorjem izračunamo

$$f(10^{-5}) = -1.818594854, \quad f(10^{-8}) = -1.818594854.$$

3. Dana je iteracija

$$x_{r+1} = x_r \left(3 - \frac{3}{2}x_r + \frac{1}{4}x_r^2\right), \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

   (a) Izračunajte fiksne točke iteracije. Katere so privlačne in katere odbojne.

   (b) V okolici privlačnih točk določite red konvergence.

Rešitev:
Iteracijska funkcija je $g(x) = x\left(3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}x^2\right)$. Fiksne točke so rešitve enačbe $g(x) = x$. Iz

$$g(x) - x = \frac{1}{4}x(x-2)(x-4) = 0$$

dobimo, da so fiksne točke $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$ in $\alpha_3 = 4$. Ker je $g'(0) = 3$, $g'(2) = 0$ in $g'(4) = 3$, sta α_1 in α_3 odbojni, α_2 pa je privlačna točka.

V bližini $\alpha_2 = 2$ je red konvergence kubičen, saj je $g'(2) = g''(2) = 0$ in $g'''(2) = \frac{3}{2}$.

4. Rešujemo enačbo $1 - x\,e^x = 0$. Preverite, da ima enačba vsaj eno rešitev na intervalu $[0, 1]$. Zapišite tangentno metodo. Z začetnim približkom $x_0 = \frac{1}{2}$ izračunajte prva dva približka k rešitvi.

Rešitev:
Rešujemo enačbo $f(x) = 0$ za $f(x) = 1 - x\,e^x$. Ker je

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 1 - e = -1.71828,$$

funkcija f spremeni predznak na $[0,1]$. Zato ima na tem intervalu vsaj eno ničlo. Če enačbo preoblikujemo v $\frac{1}{x} = e^x$ in narišemo obe funkciji $\frac{1}{x}$ in e^x vidimo, da imata eno samo presečišče. Torej ima enačba eno samo rešitev. Tangentna metoda se glasi

$$x_{r+1} = \frac{e^{-x_r} + x_r^2}{1 + x_r}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Z začetnim $x_0 = 0.5$ dobimo

$$x_1 = 0.571020439, \quad x_2 = 0.567155569.$$

5. Dana je matrika A in vektor x,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 12 & 5 & 7 \\ -8 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$ ter $\|A\,\boldsymbol{x}\|_1$, $\|A\,\boldsymbol{x}\|_\infty$, $\|A\,\boldsymbol{x}\|_2$.

Rešitev:

$$\begin{aligned} &\|A\|_1 = 24, \quad \|A\|_\infty = 24, \quad \|A\|_F = \sqrt{319} = 17.86057, \\ &\|A\,\boldsymbol{x}\|_1 = 49, \quad \|A\,\boldsymbol{x}\|_\infty = 29, \quad \|A\,\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{1049} = 32.38826. \end{aligned}$$