Rešitve 2. kolokvija iz NUMERIČNIH METOD 1

Praktična matematika

11. marec 2014

1. Izračunajte LU razcep z delnim pivotiranjem za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & -8 & 19 \\ 8 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

S pomočjo izračunanega razcepa določite zadnji stolpec matrike A^{-1} ter $\det A$.

Rešitev: Izračunajmo najprej LU razcep z delnim pivotiranjem:
1.korak

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & -8 & 19 \\ 4 & 6 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 12 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & -6 & 17 \\ \frac{1}{2} & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

2.korak

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 & 0 & -4 \\ \frac{1}{2} & 1 & -6 & 17 \\ 0 & 1 & 12 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 & 0 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -6 & 18 \\ 0 & \frac{1}{4} & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

3.korak

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 & 0 & -4 \\ 0 & \frac{1}{4} & 12 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -6 & 18 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 & 0 & -4 \\ 0 & \frac{1}{4} & 12 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 16 \end{pmatrix}.$$

Dobimo

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

in velja $PA = LU$.

Iz razcepa dobimo, da je

$$\begin{aligned} &\det P \det A = \det L \det U \\ &-\det A = 8 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 16 = 6144 \\ &\det A = -6144. \end{aligned}$$

Da izračunamo četrti stolpec inverza, moramo rešiti sistem enačb $Ax = (0,0,0,1)^T$. Najprej rešimo spodnje trikotni sistem $Ly = P(0,0,0,1)^T$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Rešimo še zgornje trikotni sistem $Ux = y$,

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} \frac{1}{64} \\ \frac{1}{32} \\ \frac{3}{32} \\ \frac{1}{32} \end{pmatrix}.$$

Zadnji stolpec inverza je torej enak

$$\left(A^{-1}\right)_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{64} \\ \frac{1}{32} \\ \frac{3}{32} \\ \frac{1}{32} \end{pmatrix}.$$

2. Računamo ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 5x - 6y.$$

Minimum je dosežen v bližini točke $(-1,1)$. Izračunajte natančnejši približek.

Rešitev:
Kandidati za ekstreme funkcije f so stacionarne točke, ki jih dobimo z rešitvijo nelinearnega sistema enačb

$$f_x(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 + 5 = 0, \quad f_y(x,y) = 4y^3 + 4x^2y - 6 = 0.$$

Le te lahko numerično izračunamo z uporabo Newtonove metode. Definirajmo

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4xy^2 + 5 \\ 4y^3 + 4x^2y - 6 \end{pmatrix}, \quad JF(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y^2 & 8xy \\ 8xy & 4x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Za določitev novega približka $(x_1, y_1)^T$ iz približka $(x_0, y_0)^T = (-1,1)^T$ moramo rešiti linearen sistem

$$JF(-1,1)\begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = -F(-1,1).$$

Dobimo

$$\begin{pmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{24} \end{pmatrix},$$

nov približek pa je enak

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{23}{24} \end{pmatrix}.$$

3. V tabeli so podane meritve povprečne temperature zraka v nekem mestu v preteklem tednu:

dan :	1	2	3	4	5	6	7
povp.temperatura :	5°	4°	5°	6°	5°	7°	8°

Izračunajte premico, ki po metodi najmanjših kvadratov najboljše opisuje gibanje temperature. Nalogo rešite preko normalnega sistema in razcepa Choleskega.

Rešitev:
Iščemo premico $y = a_0 + a_1 x$, katere koeficienta sta določena z rešitvijo predoločenega sistema enačb $A(a_0, a_1)^T = b$, kjer sta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Normalni sistem $A^T A(a_0, a_1)^T = A^T b$, ki določa rešitev, se glasi

$$\begin{pmatrix} 7 & 28 \\ 28 & 140 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 175 \end{pmatrix}.$$

Razcep Choleskega za matriko $A^T A$ je enak

$$A^T A = V V^T, \quad V = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 4\sqrt{7} & 2\sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

Najprej izračunamo rešitev sistema $Vz = A^T b$:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 4\sqrt{7} & 2\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 175 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40\sqrt{7}}{7} \\ \frac{15\sqrt{7}}{14} \end{pmatrix}.$$

Iz rešitve sistema $V^T(a_0, a_1)^T = z$,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{7} & 4\sqrt{7} \\ 0 & 2\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40\sqrt{7}}{7} \\ \frac{15\sqrt{7}}{14} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{7} \\ \frac{15}{28} \end{pmatrix},$$

dobimo iskano premico

$$y = \frac{25}{7} + \frac{15}{28} x.$$

4. Izračunajte QR razcep matrike

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -2 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

ter določite $x \in \mathbb{R}^3$, pri katerem je dosežen minimum izraza $\|Ax - b\|_2$ za $b = (5, 5, 10, 10)^T$.

Rešitev:
Izračunajmo najprej QR razcep matrike A z uporabo modificiranega Gram-Schmidtovega postopka:

1.korak:

$$r_{1,1} = \left\|(-2, 2, -2, 2)^T\right\| = 4, \quad q_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$r_{1,2} = q_1^T a_2 = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2, \quad q_2 = a_2 - r_{1,2}q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_{1,3} = q_1^T a_3 = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = 2, \quad q_3 = a_3 - r_{1,3}q_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

2.korak:

$$r_{2,2} = \left\|(3, 0, -3, 0)^T\right\| = 3\sqrt{2}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_{2,3} = q_2^T q_3 = 4\sqrt{2}, \quad q_3 = q_3 - r_{2,3}q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

3.korak:

$$r_{3,3} = \left\|(0, 5, 0, -5)^T\right\| = 5\sqrt{2}, \quad q_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dobili smo, da je $A = QR$ za

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Rešitev predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov dobimo z rešitvijo zgornje trikotnega sistema $Rx = Q^T b = \left(0, -\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^T$, ki je enaka

$$x = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)^T.$$