NUMERIČNE METODE 1

Praktična matematika

3. domača naloga

Rešitve stisnite v ZIP datoteko z imenom *ime-priimek-vpisna-3.zip* in jih oddajte preko sistema Moodle (http://ucilnica.fmf.uni-lj.si) najkasneje do konca 3. junija 2012. ZIP datoteka mora vsebovati USTREZNO NAPISANO poročilo o rezultatih ter vse programe, s katerimi ste naloge rešili. Naloge naj bodo rešene v Matlabu.

Naj bodo c_1, c_2, c_3, c_4 zadnje štiri cifre vaše vpisne številke.

1. (a) V Matlabu napišite funkcijo `inverzna(`A`,`s`)`, ki z inverzno iteracijo poišče lastno vrednost matrike A, ki je najbližja vrednosti s. Funkcija naj vrne lastno vrednost in normiran lastni vektor. Računajte na natančnost 10^{-10}. Pomagate si lahko s programom za potenčno metodo, ki ga najdete na spletni učilnici.

   (b) Delovanje preizkusite na naslednjem primeru. Vzemite matriko

$$B = \begin{pmatrix} 2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

   in matriko X, ki jo dobite z ukazi

$$\texttt{rand('state', } 0); \qquad X = \texttt{rand}(5).$$

   Naj bo $A = XBX^{-1}$. Z inverzno iteracijo poiščite vse lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A. Za pomike izberite $1.5, 3.5, 5.5, 7.5, 9.5$. Za vsako lastno vrednost tudi izpišite število potrebnih korakov iteracije. Za izpis rezultatov uporabite `format long e`.

2. Matriko imenujemo razpršena matrika, če ima zelo veliko elementov enakih nič, neničelni pa nimajo kakšne posebne strukture. Linearne sisteme z velikimi razpršenimi matrikami ponavadi ne rešujemo z direktnimi metodami, kot sta npr. LU razcep ali razcep Choleskega, ampak jih rešujemo iterativno. Pri iterativnem reševanju tvorimo zaporedje približkov, ki pod določenimi pogoji konvergira k rešitvi.

   Pri razpršenih matrikah shranimo le informacijo o neničelnih elementih:

$$(i, j, a_{ij}), \quad a_{ij} \neq 0.$$

   V Matlabu definiramo razpršeno matriko z ukazom

$$A = \texttt{sparse}(I, J, S, m, n),$$

kjer vektorja $I = (i_1, i_2, \ldots, i_K)$ in $J = (j_1, j_2, \ldots, j_K)$ vsebujeta indekse neničenih matričnih elementov, vektor $S = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ pa vrednosti le teh. Bolj natančno, trojice

$$(i_\ell, j_\ell, s_\ell), \quad \ell = 1, 2, \ldots, K,$$

definirajo točno vse neničelne elemente matrike. Število m je število vrstic, n pa število stolpcev matrike.

Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oblike

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \beta & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \alpha := 1 + c_3, \quad \beta := 1 + c_4,$$

in $b = \left[1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}\right]^T$. V Matlabu izračunajte rešitev sistema $Ax = b$ za

$$n = 1000 \quad \text{in} \quad n = 50000 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4.$$

V obeh primerih izpišite povprečno vrednost rešitve x.