Reševanje sistemov linearnih enačb, LU razcep
12.11.2009

Zgled (Newtonova metoda)
Z uporabo Octave-a rešujemo sistem nelinearnih enačb

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x + y &= 1, \\ x^2 - y^2 - x + 10y &= 25. \end{aligned}$$

Zapišimo sistem v matrični obliki,

$$F = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 10x + y - 1 \\ x^2 - y^2 - x + 10y - 25 \end{bmatrix},$$

in izračunajmo Jacobijevo matriko,

$$JF = \begin{bmatrix} 2x - 10 & 2y + 1 \\ 2x - 1 & -2y + 10 \end{bmatrix}.$$

Pomagamo si s programom `newton.m`. Začetni približek in število rešitev določimo iz slike. Na sliki danih krivulj vidimo, da se krivulji sekata v okolici točk $(2, 4)$ in $(9, -3)$, zato ti točki uporabimo za začetna približka v Newtonovi metodi. Podrobnejši potek si oglejte v datoteki `testnewton1.m`. Newtonova metoda z začetnim približkom $(2, 4)$ vrne rezultat $(1.9623, 3.6258)$, z začetnim približkom $(9, -3)$ pa $(9.0944, -3.5799)$. Dobili smo dve različni rešitvi sistema enačb, iz slike pa vidimo, da sta to edini rešitvi. Torej smo poiskali vse rešitve sistema.

Štetje operacij
Za izračun skalarnega produkta vektorjev $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$y^T x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

potrebujemo $2n$ osnovnih operacij (n množenj in $n - 1$ seštevanj $\Rightarrow 2n - 1$ operacij).
Produkt $y = A \cdot x, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, lahko izračunamo kot

$$y_i = \alpha_i^T \cdot x,$$

kjer je α_i^T $i-$ta vrstica matrike A. Za izračun potrebujemo $2n^2$ osnovnih operacij (n skalarnih produktov po $2n - 1$ operacij $\Rightarrow 2n^2 - n$ operacij).

Produkt dveh matrik $C = A \cdot B, A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, izračunamo po stolpcih kot

$$c_i = A \cdot b_i$$

in za izračun potrebujemo $2n^3$ operacij $(n(2n^2 - n) = 2n^3 - n^2)$.

LU razcep brez pivotiranja
Dano matriko A zapišemo kot produkt

$$A = L \cdot U,$$

kjer je L spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali in U zgornje trikotna matrika.
Elemente, s katerimi v algoritmu delimo, imenujemo *pivotni elementi (pivoti).* Postopek deluje le, če so vsi pivoti neničelni, nestabilen pa je tudi, če so pivoti blizu 0. Rešitev obeh problemov je pivotiranje (delno ali kompletno).
Algoritem:

$j = 1, 2, \ldots, n-1$
    $i = j+1, j+2, \ldots, n$
        $\ell_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$
        $k = j+1, j+2, \ldots, n$
            $a_{ik} = a_{ik} - \ell_{ij} a_{jk}$

Število operacij, ki jih potrebujemo za izračun LU razcepa je

$$\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n = \frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2).$$

Če rešujemo sistem $Ax = b$ s pomočjo LU razcepa, to naredimo v treh korakih:

1. izračunamo LU razcep matrike A

$$A = LU,$$

2. prema substitucija

$$Ly = b,$$

3. obratna substitucija

$$Ux = y.$$

Za rešitev sistema potrebujemo

$$\underbrace{\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n}_{\text{LU razcep}} + \underbrace{n^2 - n}_{\text{prema subst.}} + \underbrace{n^2}_{\text{obratna subst.}} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

operacij.

Algoritem za premo substitucijo $Ly = b$:

1 $\quad y_1 = b_1$
2 $\quad k = 2, 3, \ldots, n$
3 $\qquad y_k = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj} y_j$

Algoritem za obratno substitucijo $Ux = y$:

1 $\quad k = n, n-1, \ldots, 1$
2 $\qquad x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j \right)$

Primer:

Izračunajmo LU razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

V vsakem koraku popravimo matriko A in dopolnimo matriko L. Zadnja prirejenka je matrika U.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriko A priredimo tako, da prepišemo prvo vrstico, prvi stolpec dopolnimo z ničlami in izpolnimo ostala mesta,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 - 2 \cdot 2 & 6 - 2 \cdot 3 \\ 0 & 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 & 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{\frac{5}{2}} \end{bmatrix},$$

hkrati zgradimo še prvi stolpec matrike L in na diagonali zapišemo enice,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{4}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ \frac{1}{2} & & 1 \end{bmatrix}.$$

Isti postopek ponovimo na manjšem delu matrike (zapisan odebeljeno) in dobimo

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} - 1 \cdot 0 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezultat je

$$A = L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

LU razcep s pivotiranjem

Pri *delnem pivotiranju* dopuščamo zamenjavo vrstic. To pomeni, da ko pridemo do $j-$tega stolpca, poiščemo med $a_{jj}, a_{j+1,j}, \ldots, a_{nj}$ po absolutni vrednosti največji element in zamenjamo $j-$to vrstico in vrstico s po absolutni vrednosti maksimalnim elementom.

Rezultat je

$$PA = LU,$$

kjer je P permutacijska matrika, ki opisuje preureditev vrstic, L spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali in U zgornje trikotna matrika.

Algoritem za LU razcep z delnim pivotiranjem:

$j = 1, 2, \ldots, n-1$
  poišči indeks m, tako da je $|a_{mj}| \geq |a_{ij}|$ za $i = j, j+1, \ldots, n$
  zamenjaj $m-$to in $j-$to vrstico
  $i = j+1, j+2, \ldots, n$
    $\ell_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$
    $k = j+1, j+2, \ldots, n$
      $a_{ik} = a_{ik} - \ell_{ij} a_{jk}$

Velja $|\ell_{ij}| \leq 1$.

Število operacij, ki jih potrebujemo, je $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$, in še $\mathcal{O}(n^2)$ primerjanj za iskanje pivotov.

Če rešujemo sistem $Ax = b$ s pomočjo LU razcepa z delnim pivotiranjem, to storimo v treh korakih:

1. poiščemo LU razcep z delnim pivotiranjem,
$$PA = LU,$$
2. prema substitucija,
$$Ly = Pb,$$
3. obratna substitucija,
$$Ux = y.$$

Primer:
Izračunajmo LU razcep z delnim pivotiranjem matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Začetna permutacijska matrika P je kar identiteta, v matriki A je odebeljeno označen pivot,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zamenjamo 1. in 2. vrstico,

$$P = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj naredimo korak kot v LU razcepu brez pivotiranja,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -\mathbf{2} & -2 \end{bmatrix}, \ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj zamenjamo 2. in 3. vrstico,

$$P = \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}, A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

in naredimo korak LU razcepa,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U, \ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezultat lahko preverimo z Octave-om, vpišemo `[L,U,P] = lu(A)`.
Pri *kompletnem pivotiranju* dopuščamo zamenjavo vrstic in stolpcev. To pomeni, da ko pridemo do $j-$tega stolpca, poiščemo po absolutni vrednosti največji element v podmatriki in zamenjamo ustrezni vrstici in stolpca.
Rezultat je

$$PAQ = LU,$$

kjer je P permutacijska matrika, ki opisuje preureditev vrstic, Q permutacijska matrika za preureditev stolpcev, L spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali in U zgornje trikotna matrika.

Algoritem za LU razcep s kompletnim pivotiranjem:

$j = 1, 2, \ldots, n-1$
    poišči a_{mr} - po abs. vrednosti maksimalen element v $A(j:n, j:n)$
    zamenjaj $r-$ti in $j-$ti stolpec
    zamenjaj $m-$to in $j-$to vrstico
    $i = j+1, j+2, \ldots, n$
        $\ell_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$
        $k = j+1, j+2, \ldots, n$
            $a_{ik} = a_{ik} - \ell_{ij} a_{jk}$

Velja $|\ell_{ij}| \leq 1$.
Število operacij, ki jih potrebujemo, je $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$, in še $\mathcal{O}(n^3)$ primerjanj za iskanje pivotov. Dodatna cena, ki jo plačamo za iskanje pivotov je običajno prevelika, da bi odtehtala večjo stabilnost.
Če rešujemo sistem $Ax = b$ s pomočjo LU razcepa s kompletnim pivotiranjem, to storimo v štirih korakih:

1. poiščemo LU razcep s kompletnim pivotiranjem,
$$PAQ = LU,$$
2. prema substitucija,
$$Ly = Pb,$$
3. obratna substitucija,
$$U\tilde{x} = y,$$
4. menjava komponent vektorja,
$$x = Q\tilde{x}.$$

1. Izračunaj LU razcep brez pivotiranja danih matrik:

   (a)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix},$$

   (b)
$$B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix},$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix},$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

(e)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -9 & -3 \end{bmatrix},$$

(f)

$$F = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix},$$

(g)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ & 1 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{2}{3} & 1 & \\ -\frac{4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 14 \\ 0 & \frac{17}{2} & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 14 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{5}{2} & 1 & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{17}{7} & 1 \end{bmatrix}.$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -9 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & -15 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{15}{8} & 1 \end{bmatrix}.$$

(f)

$$F = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{19}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{46}{7} \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{4}{9} & 1 & \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}.$$

(g)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Postopka ne moremo nadaljevati, saj je pivot enak 0. V tem primeru moramo uporabiti pivotiranje (glej nalogo 12).

2. S pomočjo LU razcepa reši sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Najprej izračunamo LU razcep za A,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -3 & 1 & \\ 4 & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -3 & 1 & \\ 4 & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ -3y_1 + y_2 &= 0 \Rightarrow y_2 = 3, \\ 4y_1 - \frac{4}{3}y_2 + y_3 &= 4 \Rightarrow y_3 = 4. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

torej

$$
\begin{aligned}
-\frac{5}{3}x_3 = 4 \Rightarrow x_3 &= -\frac{12}{5}, \\
-3x_2 + 4x_3 = 3 \Rightarrow x_2 &= -\frac{21}{5}, \\
2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \Rightarrow x_1 &= \frac{4}{5},
\end{aligned}
$$

in rešitev sistema je $x = [\frac{4}{5}, -\frac{21}{5}, -\frac{12}{5}]^T$.

3. S pomočjo LU razcepa reši sistem $Ax = b$, kjer je

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 2 & -7 & -7 & -6 \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ -4 & -1 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.
$$

Rešitev. Najprej izračunamo LU razcep za A,

$$
A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -7 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U,
$$

$$
L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ -1 & 0 & 1 & \\ -4 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$
\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ -1 & 0 & 1 & \\ -4 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},
$$

torej

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 1, \\
2y_1 + y_2 = 7 \Rightarrow y_2 &= 5, \\
-y_1 + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 &= 1, \\
-4y_1 + 3y_2 - 5y_3 + y_4 = 3 \Rightarrow y_4 &= -3.
\end{aligned}
$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} x_4 &= -3, \\ 2x_3 + x_4 = 1 &\Rightarrow x_3 = 2, \\ -3x_2 + x_3 = 5 &\Rightarrow x_2 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 1 &\Rightarrow x_1 = -2, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [-2, -1, 2, -3]^T$.

4. S pomočjo LU razcepa reši sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & 9 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \\ 7 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Najprej izračunamo LU razcep za A,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \\ 7 \\ -16 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 8, \\ -2y_1 + y_2 &= -14 \Rightarrow y_2 = 2, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 &= 7 \Rightarrow y_3 = -5, \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 &= -16 \Rightarrow y_4 = -1. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} x_4 &= -1, \\ -2x_3 + 3x_4 &= -5 \Rightarrow x_3 = 1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \Rightarrow x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 8 \Rightarrow x_1 = 1, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [1, -1, 1, -1]^T$.

5. S pomočjo LU razcepa reši sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 18, \\ 3x_1 - 9x_2 - 3x_3 &= 6. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

To je matrika iz naloge 1e, zato je

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{15}{8} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{15}{8} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix},$$

torej

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 5,\\
2y_1 + y_2 &= 18 \Rightarrow y_2 = 8,\\
3y_1 + \frac{15}{8}y_2 + y_3 &= 6 \Rightarrow y_3 = -24.
\end{aligned}
$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -24 \end{bmatrix},
$$

torej

$$
\begin{aligned}
-12x_3 &= -24 \Rightarrow x_3 = 2,\\
-8x_2 &= 8 \Rightarrow x_2 = -1,\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \Rightarrow x_1 = 1,
\end{aligned}
$$

in rešitev sistema je $x = [1, -1, 2]^T$.

6. S pomočjo LU razcepa reši sistem linearnih enačb

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0,\\
8x_2 + 6x_3 &= 0,\\
-2x_1 + 5x_3 &= -11.
\end{aligned}
$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$
\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix},
$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = U,
$$

$$
L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.
$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ y_2 &= 0, \\ 2y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3 &= -11 \Rightarrow y_3 = -11. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} 6x_3 = -11 &\Rightarrow x_3 = -\frac{11}{6}, \\ 8x_2 + 6x_3 = 0 &\Rightarrow x_2 = \frac{11}{8}, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 &\Rightarrow x_1 = \frac{11}{12}, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [\frac{11}{12}, \frac{11}{8}, -\frac{11}{6}]^T$.

7. S pomočjo LU razcepa reši sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= -4. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix},$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ 2y_1 + y_2 &= 6 \Rightarrow y_2 = 6, \\ 3y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3 &= -4 \Rightarrow y_3 = -6. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} -2x_3 &= -6 \Rightarrow x_3 = 3, \\ -3x_2 + 3x_3 &= 6 \Rightarrow x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \Rightarrow x_1 = 2, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [2, 1, 3]^T$.

8. S pomočjo LU razcepa reši sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 2x + 6y + 4z &= 5, \\ 6x + 19y + 12z &= 6, \\ 2x + 8y + 14z &= 7. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 19 & 12 \\ 2 & 8 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 19 & 12 \\ 2 & 8 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 3 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $L\tilde{y} = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 3 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= 5, \\ 3\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 &= 6 \Rightarrow \tilde{y}_2 = -9, \\ \tilde{y}_1 + 2\tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 &= 7 \Rightarrow \tilde{y}_3 = 20. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $U\tilde{x} = \tilde{y}$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 20 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} 10z &= 20 \Rightarrow z = 2, \\ y &= -9, \\ 2x + 6y + 4z &= 5 \Rightarrow x = \frac{51}{2}, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = \frac{51}{2}, y = -9, z = 2$.

9. S pomočjo LU razcepa reši sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 14, \\ -2x_1 - x_3 &= -7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 13. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -7 \\ 13 \end{bmatrix},$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -7 \\ 13 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 14, \\ -2y_1 + y_2 &= -7 \Rightarrow y_2 = 21, \\ 2y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3 &= 13 \Rightarrow y_3 = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 21 \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} x_3 &= 1, \\ 6x_2 + 9x_3 &= 21 \Rightarrow x_2 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 14 \Rightarrow x_1 = 3, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [3, 2, 1]^T$.

10. S pomočjo LU razcepa reši sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ -2 & -2 & 1 & \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ -2 & -2 & 1 & \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ y_1 + y_2 &= 2 \Rightarrow y_2 = 1, \\ -2y_1 - 2y_2 + y_3 &= 3 \Rightarrow y_3 = 7, \\ 2y_1 + y_2 + y_4 &= 1 \Rightarrow y_4 = -2. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} x_4 &= -2, \\ -x_3 + 2x_4 = 7 &\Rightarrow x_3 = -11, \\ -x_2 - 2x_3 = 1 &\Rightarrow x_2 = 21, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 1 &\Rightarrow x_1 = -60, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [-60, 21, -11, -2]^T$.

11. Izračunaj LU razcep z delnim pivotiranjem danih matrik:

(a)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix},$$

(b)
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

(a)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \mathbf{2} & 7 \end{bmatrix},$$

zamenjamo 1. in 2. vrstico,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in naredimo korak LU razcepa,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = U, \ L = \begin{bmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zamenjamo 1. in 2. vrstico,

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

in naredimo korak LU razcepa,

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U,\ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Izračunaj LU razcep z delnim pivotiranjem za matriko iz točke 1g.

Rešitev.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \mathbf{2} & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

zamenjamo 1. in 3. vrstico

$$G \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

in naredimo korak LU razcepa,

$$G \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{-1} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix},$$

zamenjamo 3. in 4. vrstico,

$$G \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U,\ P = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. S pomočjo LU razcepa z delnim pivotiranjem reši sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Najprej izračunajmo LU razcep z delnim pivotiranjem,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ \mathbf{4} & -10 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zamenjali smo 1. in 2. vrstico, zato je

$$P = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem $Ly = Pb$,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= -8, \\ \frac{1}{2}y_1 + y_2 &= 5 \Rightarrow y_2 = 9, \\ \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 &= 13 \Rightarrow y_3 = \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

Rešimo sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 9 \\ \frac{21}{2} \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} \frac{7}{2}x_3 &= \frac{21}{2} \Rightarrow x_3 = 3, \\ 9x_2 &= 9 \Rightarrow x_2 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 2x_3 &= -8 \Rightarrow x_1 = -1, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je torej $x = [-1, 1, 3]^T$.

14. S pomočjo LU razcepa z delnim pivotiranjem reši sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -1, \\ 5x_1 + 2x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej izračunajmo LU razcep z delnim pivotiranjem,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{5} & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{13}{5} & 4 \\ 0 & \mathbf{\frac{16}{5}} & -2 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{5} & 1 & \\ \frac{2}{5} & & 1 \end{bmatrix}.$$

Zamenjali smo 1. in 3. vrstico. Zdaj zamenjamo 2. in 3. vrstico, zato je

$$P = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}.$$

Nadaljujemo z razcepom,

$$A \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & -2 \\ 0 & \frac{13}{5} & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{45}{8} \end{bmatrix} = U, \; L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{2}{5} & 1 & \\ \frac{1}{5} & \frac{13}{16} & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem $Ly = Pb$,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{2}{5} & 1 & \\ \frac{1}{5} & \frac{13}{16} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 2, \\ \frac{2}{5}y_1 + y_2 = 6 &\Rightarrow y_2 = \frac{26}{5}, \\ \frac{1}{5}y_1 + \frac{13}{16}y_2 + y_3 = -1 &\Rightarrow y_3 = -\frac{45}{8}. \end{aligned}$$

Rešimo sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{45}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{26}{5} \\ -\frac{45}{8} \end{bmatrix},$$

torej

$$
\begin{aligned}
x_3 &= -1,\\
\frac{16}{5}x_2 - 2x_3 &= \frac{26}{5} \Rightarrow x_2 = 1,\\
5x_1 + 2x_2 &= 2 \Rightarrow x_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Rešitev sistema je torej $x = [0, 1, -1]^T$.

15. Reši sistem s pomočjo LU razcepa s kompletnim pivotiranjem:

$$
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.
$$

Rešitev. Najprej izračunajmo LU razcep s kompletnim pivotiranjem

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & \mathbf{4} & 2 \end{bmatrix},
$$

zamenjamo 1. in 3. vrstico, 1. in 2. stolpec,

$$
A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}.
$$

Naredimo korak LU algoritma brez pivotiranja,

$$
A \sim \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ -\frac{1}{2} & & 1 \end{bmatrix},
$$

zamenjamo 2. in 3. vrstico, 2. in 3. stolpec,

$$
A \sim \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U,\ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
P = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}.
$$

Rešimo sistem $Ly = Pb$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 2, \\ -\frac{1}{2}y_1 + y_2 &= 1 \Rightarrow y_2 = 2, \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 &= 4 \Rightarrow y_3 = 2. \end{aligned}$$

Rešimo sistem $U\tilde{x} = y$,

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3 &= 2, \\ 2\tilde{x}_2 &= 2 \Rightarrow \tilde{x}_2 = 1, \\ 4\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3 &= 2 \Rightarrow \tilde{x}_1 = 1, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = Q\tilde{x} = [2, 1, 1]^T$.

16. Izračunaj $\det A$ z uporabo LU razcepa,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

in preštej število operacij.

Rešitev. Izračunajmo LU razcep matrike A,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \ L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{3}{2} & & 1 & \\ -\frac{1}{2} & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker bi morali deliti z 0, uporabimo pivotiranje in zamenjamo 2. in 3. vrstico,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{3}{2} & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ -\frac{1}{2} & & & 1 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Nadaljujmo z LU razcepom,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U, \; L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{3}{2} & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Velja $PA = LU$, torej $\det(PA) = \det P \cdot \det A = \det L \cdot \det U$,

$$-1 \cdot \det A = 1 \cdot \left(2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot (-2) \cdot 1\right) = 14,$$

torej je $\det A = -14$. Ker smo enkrat menjali vrstici, je $\det P = -1$. Če bi menjali sodo število vrstic, bi bila $\det P = 1$.

Število operacij, ki so potrebne za izračun $\det A$, je

$$\underbrace{\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)}_{\text{LU razcep}} + \underbrace{n-1}_{\det U}.$$

17. Sestavi učinkovit algoritem za LU razcep brez pivotiranja tridiagonalne matrike

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_3 & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_n & a_n \end{bmatrix}$$

in preštej število operacij.

Pomagaj si s primerom na matriki

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Najprej izračunajmo LU razcep matrike B,

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{7} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{7} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{11} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 4 & 1 & & \\ 0 & -\frac{2}{7} & 1 & \\ 0 & 0 & \frac{7}{11} & 1 \end{bmatrix}.$$

Torej je matrika L oblike

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_2 & 1 & & & \\ & \ell_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ell_n & 1 \end{bmatrix},$$

matrika U pa oblike

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & v_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo produkt, saj hočemo $A = LU$,

$$L{\cdot}U = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 0 & \dots & & \\ \ell_2 u_1 & \ell_2 v_1 + u_2 & v_2 & 0 & \dots & \\ 0 & \ell_3 u_2 & \ell_3 v_2 + u_3 & v_3 & \dots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ell_{n-1} u_{n-2} & \ell_{n-1} v_{n-2} + u_{n-1} & v_{n-1} \\ & & & & \ell_n u_{n-1} & \ell_n v_{n-1} + u_n \end{bmatrix},$$

zdaj pa primerjajmo istoležne elemente matrik,

$$
\begin{aligned}
v_i &= b_i, \\
u_1 &= a_1, \\
\ell_2 &= \frac{c_2}{u_1}, \\
u_2 &= a_2 - \ell_2 v_1,
\end{aligned}
$$

v $i-$ti vrstici dobimo:

$$
\begin{aligned}
\ell_i u_{i-1} = c_i &\Rightarrow \ell_i = \frac{c_i}{u_{i-1}}, \\
\ell_i v_{i-1} + u_i = a_i &\Rightarrow u_i = a_i - \ell_i v_{i-1}.
\end{aligned}
$$

Algoritem je torej

```
1   u_1 = a_1, v_1 = b_1
2   i = 2, 3, ..., n
3       v_i = b_i
4       ℓ_i = c_i / u_{i-1}
5       u_i = a_i - ℓ_i v_{i-1}
```

Preštejmo število operacij: v četrti vrstici algoritma imamo 1 deljenje, v peti vrstici pa 2 operaciji (množenje in odštevanje). Število operacij je torej enako

$$\sum_{i=2}^{n} 3 = 3(n-1) = 3n - 3.$$

Za polno matriko je število operacij $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.

18. Reši sistem $Ax = b$, kjer je A tridiagonalna matrika, in preštej število operacij. Pomagaj si z rezultatom iz naloge 17.

    Rešitev. Sistem bomo rešili v treh korakih,

    (a) LU razcep,
    $$A = LU,$$

    (b) prema substitucija,
    $$Ly = b,$$

    (c) obratna substitucija,
    $$Ux = y.$$

Najprej rešujemo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_2 & 1 & & & \\ & \ell_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ell_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1, \\ \ell_2 y_1 + y_2 &= b_2 \Rightarrow y_2 = b_2 - \ell_2 y_1, \\ \ell_3 y_2 + y_3 &= b_3 \Rightarrow y_3 = b_3 - \ell_3 y_2, \\ i-&\text{ta vrstica:} \\ \ell_i y_{i-1} + y_i &= b_i \Rightarrow y_i = b_i - \ell_i y_{i-1}. \end{aligned}$$

Algoritem je torej:

1 $\quad y_1 = b_1$
2 $\quad i = 2, 3, \ldots, n$
3 $\qquad y_i = b_i - \ell_i y_{i-1}$

Število operacij, ki jih potrebujemo, je $2(n-1) = 2n - 2$.

Zdaj rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & v_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} u_n x_n = y_n &\Rightarrow x_n = \frac{y_n}{u_n}, \\ u_{n-1} x_{n-1} + v_{n-1} x_n = y_{n-1} &\Rightarrow x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - v_{n-1} x_n}{u_{n-1}}, \\ u_{n-2} x_{n-2} + v_{n-2} x_{n-1} = y_{n-2} &\Rightarrow x_{n-2} = \frac{y_{n-2} - v_{n-2} x_{n-1}}{u_{n-2}}, \\ i-\text{ta vrstica: } x_i &= \frac{y_i - v_i x_{i+1}}{u_i}, \end{aligned}$$

in algoritem je:

1 $\quad x_n = \frac{y_n}{u_n}$

$i = n-1, n-2, \ldots, 1$
    $x_i = \frac{y_i - v_i x_{i+1}}{u_i}$

Število operacij, ki jih potrebujemo je

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} 3 = 1 + 3(n-1) = 3n - 2,$$

torej za rešitev celotnega sistema potrebujemo

$$\underbrace{3n + \mathcal{O}(1)}_{\text{LU razcep}} + \underbrace{2n + \mathcal{O}(1)}_{\text{prema subst.}} + \underbrace{3n + \mathcal{O}(1)}_{\text{obratna subst.}} = 8n + \mathcal{O}(1)$$

operacij.

Da algoritem deluje, morajo biti vsi $u_i \neq 0$. Kdaj se zgodi, da je kakšen $u_i = 0$? Oglejmo si determinanto

$$\det A = \det L \cdot \det U = 1 \cdot u_1 u_2 \cdots u_n,$$

torej je nek $u_i = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$, kar pomeni, da A ni obrnljiva in imamo težave z reševanjem sistema. Takrat ni rešitve ali pa jih je neskončno, taki sistemi pa nas ne zanimajo.