NUMERIČNE METODE 1, praktična matematika

Naloge za utrjevanje znanja

Napake pri numeričnem računanju

1. V formatu $P(2, 10, -100, 100)$ zapišite število $x = 121.4_{(10)}$.

   (a) Poiščite prvo večje in prvo manjše predstavljivo število za x.

   (b) Izračunajte relativno napako $\dfrac{|\mathrm{fl}(x) - x|}{|x|}$. Primerjajte jo z osnovno zaokrožitveno napako u.

   (c) Izračunajte največje in najmanjše pozitivno predstavljivo število v danem formatu.

   REŠITEV:
   Število v danem formatu: $\mathrm{fl}(x) = 0.1111001011_{(2)} \cdot 2^7 = 121.375_{(10)}$
   Prvo večje predstavljivo število: $0.1111001100_{(2)} \cdot 2^7$
   Prvo manjše predstavljivo število: $0.1111001011_{(2)} \cdot 2^7$
   Osnovna zaokrožitvena napaka: $u = 2^{-10} = 9.765625 \cdot 10^{-4}$
   Relativna napaka: $2.059308 \cdot 10^{-4}$
   Največje pozitivno predstavljivo število: $1.266412660188944 \cdot 10^{30}$
   Najmanjše pozitivno predstavljivo število: $3.944304526105059 \cdot 10^{-31}$

2. V formatu $P(2, 24, -125, 128)$ zapišite število $x = 2.3_{(10)}$.

   (a) Poiščite prvo večje in prvo manjše predstavljivo število za x.

   (b) Izračunajte relativno napako $\dfrac{|\mathrm{fl}(x) - x|}{|x|}$. Primerjajte jo z osnovno zaokrožitveno napako u.

   (c) Izračunajte največje in najmanjše pozitivno predstavljivo število v danem formatu.

   REŠITEV:
   Število v danem formatu: $\mathrm{fl}(x) = 0.100100110011001100110011_{(2)} \cdot 2^2 = 2.299999952316284_{(10)}$
   Prvo večje predstavljivo število: $0.100100110011001100110100_{(2)} \cdot 2^2$
   Prvo manjše predstavljivo število: $0.100100110011001100110011_{(2)} \cdot 2^2$
   Osnovna zaokrožitvena napaka: $u = 2^{-24} = 5.960464477539063 \cdot 10^{-8}$
   Relativna napaka: $2.073205027942470 \cdot 10^{-8}$
   Največje pozitivno predstavljivo število: $3.402823466385289 \cdot 10^{38}$
   Najmanjše pozitivno predstavljivo število: $1.175494350822288 \cdot 10^{-38}$

3. V formatu $P(2, 53, -1021, 1023)$ zapišite število $x = 0.2_{(10)}$.

4. Katero število predstavlja

1	0 0 1 0 0 1 1 0	1 0 1 0 . . . 0

v formatu IEEE, enojna natančnost.

5. Katero število predstavlja

1	0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0	1 0 1 0 . . . 0

v formatu IEEE, dvojna natančnost.

6. V formatu $P(10, 5, -100, 100)$ izračunajte vrednost izraza $y = 2x + x^2$ za $x = 1.2289$. Izračunajte relativno napako $\dfrac{|\mathrm{fl}(y) - y|}{|y|}$.

7. V formatu $P(10, 6, -100, 100)$ izračunajte vrednost izraza $z = x^2 - y^2$ za $x = 10.8877$ ter $y = 10.8888$. Izračunajte relativno napako $\dfrac{|\mathrm{fl}(z) - z|}{|z|}$.

8. V formatu $P(10, 6, -100, 100)$ izračunajte vrednost izraza $z = (x - y)(x + y)$ za $x = 10.8877$ ter $y = 10.8888$. Izračunajte relativno napako $\dfrac{|\mathrm{fl}(z) - z|}{|z|}$.

9. Naj bosta x in y predstavljivi števili. Vrednost $z = x^2 - y^2$ računamo na dva načina:

   (a) $z = x^2 - y^2$

   (b) $z = (x - y)(x + y)$

   Analizirajte oba algoritma. Pri obeh algoritmih ocenite relativno napako $\dfrac{|\mathrm{fl}(z) - z|}{|z|}$. Ali sta algoritma direktno stabilna? Kaj pa obratno stabilna?

10. Naj bo $p(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$, kjer so $a_n, c_1, c_2, \ldots, c_n$ predstavljiva števila. Računamo vrednost polinoma p v točki x, ki naj bo tudi predstavljivo število. Zapišite eksaktni in dejanski algoritem. Analizirajte direktno in obratno stabilnost.

11. V formatu $P(10, 5, -100, 100)$ izračunajte skalarni produkt $s = x^T y$ vektorjev

$$x = \begin{bmatrix} 1.0011 \\ 2.1101 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -1.1122 \\ 3.2111 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte relativno napako $\dfrac{|\mathrm{fl}(s) - s|}{|s|}$

12. Dokažite, da zaporedje $a_n = \frac{1}{n}$ zadošča rekurziji

$$a_{n+1} = n\left(a_n - \frac{1}{n+1}\right), \quad a_1 = 1.$$

Razložite, kako bi numerično stabilno izračunali 20 členov tega zaporedja.

13. Kako bi numerično stabilno izračunali vrednosti funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+2x^2} - \sqrt{2-2x^2}}{x^2}, \quad x = 1, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}.$$

Izračunajte limito $\lim_{x\to 0} f(x)$.

14. Vrednost funkcije $\sin(x)$ lahko računamo s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto:

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \pm \ldots$$

- Zapišite algoritem v Matlabu za računanje vrednosti $\sin(x)$ za dan x. Uporabite zanko `while`, ki naj se izvaja tako dolgo, dokler je relativna razlika med zaporednima členoma v razvoju nad neko izbrano toleranco.
- Algoritem pri velikih x odpove. Kako bi ga dopolnili, da bi bil numerično stabilen tudi pri velikih x.

15. Dana je tričlenska rekurzivna enačba

$$5y_{n+1} - 16y_n + 3y_{n-1} = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{2}{5}.$$

Določite splošno rešitev. Kako bi numerično stabilno izračunali 50-ti člen zaporedja. Zapišite algoritem. Utemeljite!

REŠITEV:
Splošna rešitev: $y_n = C_1 3^n + C_2\left(\frac{1}{5}\right)^n$
Rešitev pri danih pogojih: $y_n = 2\left(\frac{1}{5}\right)^n$
Stabilno računanje členov je v obratnem vrstnem redu ...