NALOGE IZ NELINEARNIH ENAČB

1. Reši enačbo
$$\frac{x}{1+x^2} = 0$$
z Newtonovo iteracijsko metodo. Kolikšen je red asimptotične konvergence ? Izračunaj stacionarno točko α drugega reda ($-\alpha = g(\alpha)$) in preizkusi ali je interval $[-\alpha, \alpha]$ interval globalne konvergence.

2. Izračunaj prve tri pozitivne korene enačbe $x = 8\sin x$.

3. Pokaži, da za integral
$$I_n(\alpha) = e^{-1}\int_0^1 x^{n+\alpha}e^x dx$$
velja rekurzivna relacija
$$I_n(\alpha) = 1 - (n+\alpha)I_{n-1}(\alpha).$$
Izračunaj $I_n(0.5), \quad n = 0, 1, \ldots, 12 \quad (I_0(0.5) = 0.4619)$.

4. Enačbo
$$x^\alpha f(x) = 0 \qquad f(0) \neq 0 \qquad \alpha > 0$$
rešujemo z Newtonovo iteracijsko metodo. Za katere vrednosti parametra α je red asimptotične konvergence kvadratičen, za katere linearen in za katere zaporedje približkov ne konvergira k rešitvi enačbe $x = 0$?

5. Izračunaj prvih deset členov zaporedja, ki je definirano z
$$y_{k+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-y_k^2}}{2}}, \quad y_0 = 1,$$
na osem decimalnih mest natančno.

6. Enačbi $\sin x = 0$ in $\tan x = 0$ imata iste rešitve $\alpha_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Določi intervale $I_k = (k\pi - \delta, k\pi + \delta)$ za vsako enačbo, kjer iz $x_0 \in I_k$ sledi $\lim_{n\to\infty} = \alpha_k$, če rešujemo enačbi z Newtonovo metodo.

7. Enačbo $\frac{x^2-a}{x^2} = 0$ rešujemo z Newtonovo metodo. Poišči največji interval I za katerega velja $x_0 \in I \Longrightarrow \lim x_r = \sqrt{a}$. Poišči stacionarno točko drugega reda. Določi interval divergence.

8. Prepričaj se, da velja
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}-1}{\tan\alpha}$$
Če označimo s $\tan\alpha_n = t_n, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$, dobimo rekurzijo
$$t_{n+1} = \frac{\sqrt{1+t_n^2}-1}{t_n}, \qquad t_1 = 1$$
Ker je $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$, sledi
$$\lim_{n\to\infty} 2^{n+1}t_n = \pi$$
Izračunaj število π na 9 decimalnih mest natančno. ($2^{17}t_{16} = 3.14159265$).

9. Če v formuli
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}}$$
označimo $s_n = \sin\alpha_n$ in vzamemo za $\alpha_n = \frac{\pi}{2^n}$, dobimo
$$s_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-s_n^2}}{2}}, \qquad s_1 = 1$$
Ker velja
$$\lim_{n\to\infty} = \frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = 1$$
je $\lim_{n\to\infty} 2^n s_n = \pi$.
Izračunaj število π na devet decimalnih mest natančno. ($2^{15}s_{15} = 3.14159265$).

10. Prepričaj se, da zaporedja $a_n = \frac{1}{n}$ zadošča rekurziji
$$a_{n+1} = n(a_n - \frac{1}{n+1}), \quad a_1 = 1.$$
Razloži, kako bi računal prvih 20 členov tega zaporedja z uporabo rekurzije.

11. Izračunaj prve tri pozitivne ekstremne točke funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

12. Pri rekurziji
$$x_{n+1} = 3x_n - 3ax_n^2 + a^2x_n^3, \quad x_0 \qquad (a \neq 0)$$
ugotovi negibne točke. Katere so privlačne in katere odbijajoče? Če je katera privlačna, ugotovi red asimptotične konvergence! Če je zaporedje konvergentno, določi interval, kjer je izpolnjen pogoj
$$0 \leq \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} \leq 1$$
in je zato zaporedje $\{x_n\}$ monotono.

13. Funkcije $f_1(x) = x^2 - a$, $f_2(x) = x - \frac{a}{x}$ in $f_3(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$ imajo ničli $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$. Analiziraj globalno konvergenco Newtonove metode, ki jo prirediš tako definiranim funkcijam.

14. Ugotovi red asimptotične konvergence v okolici korenov enačbe
$$2x^4 - 13x^3 + 30x^2 - 29x + 10 = 0$$
če jo rešujemo z Newtonovo metodo.

15. Denimo, da računamo ničle polinoma $p(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$ z Newtonovo metodo. Ugotovi red asimptotične konvergence k vsaki ničli posebej in preizkusi z $x_0 = -1.9$, $x_0 = 0.2$, $x_0 = 1.1$

16. Pokaži, da integral $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{a^2+x^2}dx$ zadošča rekurziji

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - a^2 I_{n-1}, \quad I_0 = \frac{1}{a}\arctan\frac{1}{a}$$

Izračunaj prvih deset členov tega zaporedja za $a = 4$ in $a = 0.5$!

17. Očitno ima enačba $x = a\sin x$ za $a > 1$ rešitev na intervalu $(0, \pi)$. Poišči tako rešitev za $a = 3$. Za katere a moreš računati z iteracijo

$$x_{r+1} = a\sin x_r \quad x_0 \in (0, \pi)$$

Navodilo: Iteracijska shema je konvergentna tedaj, ko velja za negibno točko $\alpha = g(\alpha)$ $g'(\alpha) = |a\cos\alpha| \leq 1$. Mejna točka zadošča torej sistemu enačb

$$\alpha = a\sin\alpha \quad a\cos\alpha = -1$$

ki ga reši tako, da računaš

$$a = -\frac{1}{\cos\alpha} \qquad \alpha = -\tan\alpha$$

18. Poišči vse realne negibne točke rekurzije

$$x_{n+1} = \frac{3ax_n^2 + a^2}{x_n^3 + 3ax_n}$$

Ugotovi, katere so privlačne in katere odbijajoče! Koliksen je red asimptotične konvergence?

19. Očitno za vsak $0 < p \leq \pi$ velja

$$x_{r+1} = p\cos x_r, \quad x_0 \in [-\pi, \pi] \Longrightarrow \{x_r\} \subset [-\pi, \pi]$$

Za katere vrednosti parametra p so negibne točke privlačne? Reši enačbo $x = 2.32\cos x$.

20. Ugotovi negibne točke za funkcijo $g(x) = ax - x^3$ pri $a > 1$. Za katere vrednosti parametra a so negibne točke privlačne in za katere ne? Za katero vrednost parametra a je red asimptotične konvergence zaporedja $\{x_r\}$ proti negibni točki α vsaj kvadratičen $(p \geq 2)$?

21. Enačbi $x^3 - 10x^2 + 10x + 1 = 0$ prirediš diferenčno enačbo

$$x_{n+3} - 10x_{n+2} + 10x_{n+1} + x_n = 0 \qquad x_0, x_1, x_2$$

Pokaži, da za poljubne x_0, x_1, x_2 kvocient $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ konvergira proti največjemu korenu kubične enčbe. Izračunaj na 5 decimalnih mest natančno največji koren zgornje enačbe! Razloži, kako bi izračunal najmanjši koren!

22. Prepričaj se, da je $(|z| - Re(z))(|z| + Re(z)) = Im^2(z)$ in

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{|z| + Re(z)}{2}} + isign(Im(z))\sqrt{\frac{|z| - Re(z)}{2}}$$

Izračunaj $\sqrt{5523 - 0.00345i}$ $\qquad \sqrt{-5523 + 0.00345i}$

23. Prepričaj se, da

$$I_n = \pi \int_0^1 x^{2n} \sin \pi x dx$$

zadošča diferenčni enačbi

$$I_n = 1 - \frac{2n(2n-1)}{\pi^2} I_{n-1}, \quad I_0 = 2$$

Izračunaj prvih deset členov tega zaporedja.

24. Če poznamo stranico s_n pravilnega n-kotnika, ki je včrtan v krog s polmerom $r = 1$, velja za stranico s_{2n} rekurzija

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

Če vzameš za $s_6 = 1$ in upoštevaš, da zaporedje $ob_n = n s_n$ konvergira k obsegu kroga $ob = 2\pi$, izračunaj število π na devet decimalnih mest natančno.

25. Naj bo f analitična funkcija. Pokaži, da z iteracijsko metodo

$$x_{r+1} = x_r + \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, \quad x_0$$

izračunaš pol funkcije $f(x)$, če je le x_0 dovolj dober približek. Pokaži tudi, da je vsaka ničla funkcije f odbijajoča negibna točka za $g(x) = x + \frac{f(x)}{f'(x)}$.

26. Prepričaj se, da $sh(nd)$ in $ch(nd)$ zadoščata rekurziji

$$y_{n+1} - 2ch(d) y_n + y_{n-1} = 0$$

Če poznamo $ch(d)$ in $sh(d)$, lahko tabeliramo obe funkciji v ekvidistantnih točkah $x_n = nd, \quad n = 0, 1, \ldots$.
Kako bi tabeliral funkcijo $y_n = ch(nd) - sh(nd)$? Preizkusi za $n = 0, 1, \ldots, 15$, če je $d = 0.5$ in $sh(0.5) = 0.521095 \quad ch(0.5) = 1.127626$.

27. Poišči prva dva pozitivna korena enačbe

$$e^{-x} = 4 \sin x$$

z navadno iteracijsko metodo.

28. Za rekurzijo

$$x_{n+1} = x_n \frac{x_n^2 + 3a}{3x_n^2 + a}$$

a) Izračunaj negibne točke!

b) Katere so privlačne in katere odbijajoče?

c) Ugotovi red asiptotične konvergence!

d) Določi interval globalne konvergence $|\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}| < 1$!

29. Razloži, kako bi računal vrednosti funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+2x^2} - \sqrt{2-x^2}}{x^2} \qquad x = 1, \quad 10^{-3}, \quad 10^{-5}, \quad 10^{-7}$$

30. Dana je rekurzija

$$x_{n+1} = a(x_n - x_n^3) \quad x_0 \in [0,1] \quad 1 < a < \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Poišči negibne točke ! Pri katerih pogojih so privlačne. Pokaži, da je za $x_0 \in (0,1)$ zaporedje $\{x_n\} \subset (0,1)$. Preizkusi za $a = 2.1 \quad x_0 = 0.6$.

31. Ugotovi negibne točke diferenčne enačbe

$$x_{n+1} = \frac{3x_n^5 + 5ax_n}{5x_n^4 + 3a}, \quad x_0$$

katere so privlačne in katere odbijajoče? Kolikšen je red asimptotične konvergence? Pokaži, da je za $a > 0$ in $x_0 > 0$ zaporedje monotono!

32. Razloži, kako bi računal vrednosti funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4-x^2}}{x^2} \qquad x = 1, \quad x = 10^{-3}, \quad x = 10^{-7}$$

33. Poišči partikularno rešitev diferenčne enačbe

$$y_{n+1} = \frac{1}{n} - ny_n$$

ki je omejeno zaporedje. Kolikšen je prvi člen y_1 tega zaporedja ?

34. Poišči pozitivne korene enačbe $e^x = 4.9 \sin x$.

35. Ugotovi realne negibne točke diferenčne enačbe

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 2ax_n}{2x_n^3 + a}, \quad x_0$$

katere so privlačne in katere odbijajoče? Kolikšen je red asimptotične konvergence? Pokaži, da je za $a > 0$ in $x_0 > 0$ zaporedje monotono!

36. Poišči prve tri pozitivne korene enačbe $\frac{1}{x-1} = 5 \sin x$.

37. Izračunaj negibne točke za

$$x_{r+1} = \frac{2x_r^2 + x_r + 1}{3x_r + 1}$$

in ugotovi katere so privlačne in katere odbijajoče. Kolikšen je red asimptotične konvergence in določi intervale globalne konvergence.

38. Izračunaj prve tri pozitivne korene enačbe $4 \sin x = \frac{10}{x^2}$

39. Prepričaj se, da je $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}$ in izračunaj iz

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2} \qquad \alpha_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$s_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-s_n}}{2} \qquad s_0 = \frac{1}{4}$$

Pri katerem členu je $|\frac{sin\alpha_n}{\alpha_n} - 1| < 10^{-8}$?

40. Pokaži, da je za Newtonovo iteracijsko metodo pol funkcije $f(x)$ odbijajoča negibna točka.
Navodilo: zapiši

$$f(x) = \frac{h(x)}{(x-\alpha)^p} \quad h(\alpha) \neq 0$$

in pokaži, da je $g'(\alpha) > 1$.

41. Diferenčna enačba

$$a_{n+1} - (n+1+\frac{1}{n})a_n + a_{n-1} = 0$$

ima eno rešitev $a_n = n!$. Obstaja pa tudi druga rešitev, ki je padajoče zaporedje (zakaj). Izračunaj prvih dvanajst členov drugega zaporedja z začetnim členom $a_0 = 1$!

42. Prepričaj se, da velja za

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{a+x}}$$

naslednja rekurzivna relacija

$$(2n+1)I_n = 2\sqrt{a+1} - 2anI_{n-1}, \quad I_0 = 2(\sqrt{a+1} - \sqrt{a})$$

Izračunaj prvih dvanajst členov tega zaporedja z $a = 20$.

43. Izračunaj negibne točke za

$$x_{n+1} = \frac{2x_n - 1}{x_n^2}$$

Ugotovi, katere so privlačne in katere odbijajoče. Kolikšen je red asimptotične konvergence.

44. Dano je pozitivno realno števila a, katerega kubični koren bi želeli izračunati iterativno.

a) Določi parametre p, q in r v rekurziji

$$x_{n+1} = px_n + \frac{q}{x_n^2} + \frac{r}{x_n^5}, \qquad x_0$$

tako, da bo negibna točka $\alpha = \sqrt[3]{a}, \quad a > 0$ privlačna oziroma, da bo imelo zaporedje približkov red asimptotične konvergence $p = 3$.

b) Izračunaj realne negibne točke za

$$x_{n+1} = \frac{1}{9}(5x_n + \frac{5a}{x_n^2} - \frac{a^2}{x_n^5})$$

Ugotovi katere so privlačne in katere odbijajoče. Določi interval globalne konvergence za privlačne točke. (Navodilo: Reši neenačbo $0 < \frac{g(x)-\alpha}{x-\alpha} < 1$ s čimer določiš interval monotone konvergence.).

45. Izračunaj vse korene enačbe

$$x^4 = e^x$$

z navadno iteracijsko metodo na pet decimalnih mest natančno.

46. Enačbo $x^3 - 5x + 1 = 0$ lahko zapišemo v ekvivalentni obliki $x^2 = 5 - \frac{1}{x}$. Izračunaj vse korene te enačbe z navadno iteracijsko metodo na pet decimalnih mest natančno!

47. Prepričaj se, da so recipročni koreni enačbe $x^3 - ax + 1 = 0$ koreni enačbe $x^3 - ax^2 + 1 = 0$.
Izračunaj najmanjši koren enačbe $x^3 - 5x + 1 = 0$ tako, da z Bernoullijevo metodo izračunaš največji koren enačbe $x^3 - 5x^2 + 1 = 0$.

48. Določi intervale, ki vsebujejo natanko eno ničlo polinoma $p_3(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, tako, da vzameš za $p_2(x) = p_3'(x)$ in tvoriš Sturmovo zaporedje kot ostanke pri deljenju

$$p_{k+1}(x) = q(x)p_k(x) - p_{k-1}(x)$$

49. Oceni za polinom $p_5(x)$, ki je definiran rekurzivno z

$$p_{k+1}(x) = (x - a_k)p_k(x) - b_k p_{k-1}(x) \quad p_{-1}(x) = 0 \quad p_0(x) = 1$$

kjer vzameš za

$$\underline{a} = \{2, 1, 0, 1, 2\} \quad \underline{b} = \{1, 1, 1, 1, 1\}$$

lego ničel tako, da upoštevaš, da tvorijo $\{p_0, \ldots p_5\}$ Sturmovo zaporedje. Upoštevaj, da so vse ničle na intervalu $[-2, 3]$ (zakaj?).

1. Razloži, kako bi izračunal $\|A\|_2^2 = \max \lambda_i(A^T A)$ s potenčno metodo, ne da bi računal $A^T A$. Kako bi z inverzno iteracijo računal $\|A^{-1}\|_2$. Preizkusi za matriko $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Zapiši algoritem za razcep matrike A reda $n \times n$ v produkt LQ^T, kjer je Q ortonormirana in L spodnja trikotna matrika, z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo vrstic matrike A.

3. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
Po Gerschgorinovemu izreku velja za vse lastne vrednosti $-2 \le \lambda_i \le 3$ (Zakaj). Ugotovi z upoštevanjem, da tvorijo determinante glavnih minorjev Sturmovo zaporedja, število lastnih vrednosti na intervalih $(i, i+1), \quad i = -2, \cdots, 2$.

4. Zapiši algoritem za razcep matrike A reda $m \times n \quad m > n$ v produkt QU, kjer je Q ortonormirana matrika reda $m \times m$ in U zgornja trikotna matrika reda $m \times n$. (Z rotacijskimi matrikami R^T množi matriko A tako, da bo produkt $R_N^T \ldots R_1^T A = U$).

5. Dana je simetrična tridiagonalna pozitivno definitna matrika A. ($a_{i,i} = d_i, \quad a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = b_i$) Zapiši algoritem za razcep matrike A v produkt $U^T U$, kjer je U zgornja trikotna matrika, po metodi Choleskega. Nato izračunaj matriko $B = UU^T$. Pokaži, da je matrika B simetrična, pozitivno definitna in podobna matriki A !

6. Reši sistem linearnih enačb $Ax = b$, za
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$
Če nima rešitve poišči $\min_x \|Ax - b\|_2, \qquad \min \|x\|_2$.

7. Zapiši algoritem za reševanje linearnega sistema $Ax = d$ kjer je matrika A oblike
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & f \\ c_2 & a_2 & b_2 & & 0 \\ & c_3 & \ddots & & 0 \\ & & & & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{bmatrix}$$
Upoštevaj, da je matrika podana s tremi vektorji $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ in skalarjem f.

8. Preveri, da sistema linearnih enačb $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ni mogoče reševati z Seidlovo iteracijsko metodo! Ali najdeš z zamenjavo vrstic tak sistem, da je zanj Seidlova iteracijska metoda konvergentna?

9. Dana je simetrična matrika A. Zapiši algoritem za razcep matrike C

$$C = \begin{bmatrix} A & I \\ I & A \end{bmatrix}$$

v produkt $U^T U$, kjer je U zgornja trikotna matrika po metodi Choleskega. Pri katerih pogojih je matrika C pozitivno definitna ?

10. Pokaži, da imata matriki $A^T A$ in AA^T iste lastne vrednosti λ_i z izjemo $\lambda_i = 0$.
Preizkusi za primer

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Naj bo A simetrična pozitivno definitna matrika. Pokaži, da je matrika

$$B = A - \frac{1}{a_{11}} \underline{a}_1 \underline{a}_1^T$$

kjer je $\underline{a}_1$ prvi stolpec matrike A, tudi simetrična pozitivno definitna.

Navodilo: Pokaži s protislovjem in upoštevaj, da je matrika B oblike

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & \tilde{B} \end{bmatrix}$$

12. Zapiši algoritem za razcep simetrične matrike $A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & I \end{bmatrix}$ v produkt $U^T U$, kjer je U zgornja trikotna matrika, po metodi Choleskega. Pri katerih pogojih je matrika A pozitivno definitna ?

13. Za katere vrednosti realnega parametra a je Jacobijeva in za katere Seidlova iteracijska metoda konvergentna:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Navodilo: Pri obeh metodah je $\lambda_1 = \frac{1}{a}$ lastna vrednost iteracijske matrike.

14. Zapiši algoritem za razcep tridiagonalne matrike $A(a_{i,i} = d_i, \quad a_{i,i+1} = b_i, \quad a_{i+1,i} = c_i)$ v produkt LU, kjer je L spodnja in U zgornja trikotna matrika, po Gaussovi eliminacijski metodi. Izračunaj matriko $B = UL$ in pokaži, da je podobna matriki A. Primer $d_i = 2, i = 1, \ldots, 5$ $b_i = c_i = 1, \quad i = 1, \ldots, 4$

15. Izračunaj matriki

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \\ 15 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

inverzno matriko tako, da rešiš sistem $AX = I$ z Gaussovo eliminacijsko metodo. Kolikšno je število občutljivosti $cond_\infty(A)$?

16. Zapiši algoritem za razcep matrike A reda $m \times n \quad m > n$ v produkt QU, kjer je Q ortonormirana matrika reda $m \times m$ in U zgornja trikotna matrika reda $m \times n$. (Z rotacijskimi matrikami R^T množi matriko A tako, da bo produkt $R_N^T \ldots R_1^T A = U$).

17. Dana je simetrična tridiagonalna pozitivno definitna matrika A. $(a_{i,i} = d_i, \quad a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = b_i)$ Zapiši algoritem za razcep matrike A v produkt $U^T U$, kjer je U zgornja trikotna matrika, po metodi Choleskega. Nato izračunaj matriko $B = UU^T$. Pokaži, da je matrika B simetrična, pozitivno definitna in podobna matriki A !

18. Zapiši algoritem za razcep matrike A reda $m \times n \quad m > n$ v produkt QU, kjer je Q ortogonalna matrika $(Q^T Q = diag(d_i)_n)$ in U zgornja trikotna matrika, po Gram-Schmidtovi metodi za ortogonalizacijo stolpcev matrike A. Kako bi rešil problem $\min_{x \in R^n} \|Ax - b\|$

    Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Izračunaj x in kolikšen je $\min \|Ax - b\|$. Prepričaj se, da je residualni vektor $r = Ax - b$ ortogonalen na stolpce matrike A.

19. Pokaži, da za singularno matriko A pri reševanju sistema $Ax = b$ nobena iteracijska metoda $Nx^{r+1} = Px^r + b \quad A = N - P$ ne izpolnjuje potrebnega in zadostnega pogoja za konvergenco $\rho(M) < 1$, kjer je $M = N^{-1}P$.

20. Pokaži, da je Jacobijeva iteracijska metoda konvergentna za vsako simetrično pozitivno definitno matriko reda 2×2. Ali velja ta trditev tudi za matrike višjega reda ? Preizkusi na primeru

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

21. Zapiši algoritem za razcep matrike A reda $n \times n$ v produkt LQ^T, kjer je Q ortonormirana in L spodnja trikotna matrika, z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo vrstic matrike A.

22. Napiši algoritem za razcep simetrične pozitivno definitne tridiagonalne matrike

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & \ddots & & \\ & & & & b_{n-1} \\ & & b_{n-1} & & a_n \end{bmatrix}$$

v produkt $U^T U$, kjer je U zgornja trikotna matrika, po metodi Choleskega. Izračunaj matriko $B = UU^T$ in pokaži, da je podobna matriki A.

23. Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(a) Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.

(b) Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje u_i matrike $A^T A$.

(c) Preizkusi, da sta $q_i = Au_i, i = 1, 2$ ortogonalna vektorja.

Teoretična naloga. Za vsako matriko A reda $m \times n, \quad m > n$ velja

(a) Pokaži, da imata matriki $A^T A$ in AA^T iste lastne vrednosti z izjemo $\lambda_i = 0$.

(b) Naj bodo u_i lastni vektorji matrike $A^T A$. Pokaži, da so $q_i = Au_i, i = 1, \ldots, n$ ortogonalni vektorji.

24. Razloži, kako bi računal lastne vrednosti simetrične matrike $A = \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}$ reda n, kjer sta B in C kvadratni matriki reda p in $n - p$ Kakšni so lastni vektorji in lastne vrednosti matrike A. Preizkusi za

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

25. Reši sistem linearnih enačb $Ax = b$, za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 20 \\ 23 \end{bmatrix}$$

Če nima rešitve poišči $\min_x \|Ax - b\|_2, \qquad \min \|x\|_2$.

26. Zapiši ekonomičen algoritem za računanje matrike $X = U^T AU$, kjer je A simetrična in U zgornja trikotna matrika.
Navodilo:

$$\begin{bmatrix} U^T & 0 \\ \underline{u}^T & \nu \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \underline{a} \\ \underline{a}^T & \alpha \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & \underline{u} \\ 0 & \nu \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & \underline{x} \\ \underline{x}^T & \xi \\ & \end{bmatrix}$$

27. Ali je za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Seidlova iteracijska metoda konvergentna?
Prizkusi za b in začetni približek x_0

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

28. Za katere vrednosti parametra a je za matriko A Seidlova iteracijska metoda konvergentna?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$$

29. Izračunaj lastne vrednosti matrike $A^T A$ in matrike

$$B = \begin{bmatrix} O & A^T \\ A & O \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

30. Razcepi matriko

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) v produkt LU po Gaussovi eliminacijski metodi

b) v produkt $U^T U$ po metodi Choleskega.

31. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Po Gerschgorinovemu izreku velja za vse lastne vrednosti $-2 \leq \lambda_i \leq 3$ (Zakaj). Ugotovi z upoštevanjem, da tvorijo determinante glavnih minorjev Sturmovo zaporedja, število lastnih vrednosti na intervalih $(i, i+1), \quad i = -2, \cdots, 2$.

32. Reši sistem linearnih enačb $Ax = b$, za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Če nima rešitve poišči $\min_x \|Ax - b\|_2, \qquad \min \|x\|_2$.

33. Zapiši algoritem za reševanje linearnega sistema $Ax = d$ kjer je matrika A oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & f \\ c_2 & a_2 & b_2 & & 0 \\ & c_3 & \ddots & & 0 \\ & & & & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{bmatrix}$$

Upoštevaj, da je matrika podana s tremi vektorji $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ in skalarjem f.

34. Pokaži, da velja

$$\|xy^T\|_F = \|xy^T\|_2 = \|x\|_2 \|y\|_2$$

35. Pokaži, da veljajo naslednje neenakosti

$$\begin{array}{lll} \|x\|_2 & \leq \|x\|_1 & \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \\ \|x\|_\infty & \leq \|x\|_2 & \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty & \leq \|x\|_1 & \leq n\|x\|_\infty \end{array}$$

36. Naj bo A simetrična pozitivno definitna matrika. Pokaži, da za poljuben $i \neq k$ velja $|a_{ik}| < \sqrt{a_{ii}a_{kk}}$.

37. Preveri, da sistema linearnih enačb $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ni mogoče reševati z Seidlovo iteracijsko metodo! Ali najdeš z zamenjavo vrstic tak sistem, da je zanj Seidlova iteracijska metoda konvergentna?

38. Dana je simetrična matrika A. Zapiši algoritem za razcep matrike C

$$C = \begin{bmatrix} A & I \\ I & A \end{bmatrix}$$

v produkt $U^T U$, kjer je U zgornja trikotna matrika po metodi Choleskega. Pri katerih pogojih je matrika C pozitivno definitna ?

39. Pokaži, da imata matriki A^TA in AA^T iste lastne vrednosti λ_i z izjemo $\lambda_i = 0$.
Preizkusi za primer

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

40. Naj bo A simetrična pozitivno definitna matrika. Pokaži, da je neničelna podmatrika $\tilde{B}$ matrike

$$B = A - \frac{1}{a_{11}} \underline{a}_1 \underline{a}_1^T$$

kjer je $\underline{a}_1$ prvi stolpec matrike A, tudi simetrična pozitivno definitna.

Navodilo: Pokaži s protislovjem in upoštevaj, da je matrika B oblike

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & \tilde{B} \end{bmatrix}$$

41. Zapiši algoritem za razcep simetrične matrike $A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & I \end{bmatrix}$ v produkt U^TU, kjer je U zgornja trikotna matrika, po metodi Choleskega. Pri katerih pogojih je matrika A pozitivno definitna ?

42. Za katere vrednosti realnega parametra a je Jacobijeva in za katere Seidlova iteracijska metoda konvergentna:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Navodilo: Pri obeh metodah je $\lambda_1 = \frac{1}{a}$ lastna vrednost iteracijske matrike.

43. Izračunaj matriki

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \\ 15 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

inverzno matriko tako, da rešiš sistem $AX = I$ z Gaussovo eliminacijsko metodo. Kolikšno je število občutljivosti $cond_\infty(A)$?

44. Zapiši algoritem za razcep matrike A reda $m \times n \quad m > n$ v produkt QU, kjer je Q ortogonalna matrika $(Q^TQ = diag(d_i)_n)$ in U zgornja trikotna matrika, po Gram-Schmidtovi metodi za ortogonalizacijo stolpcev matrike A. Kako bi rešil problem $\min_{x \in R^n} \|Ax - b\|$

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Izračunaj x in kolikšen je $\min \|Ax - b\|$. Prepričaj se, da je residualni vektor $r = Ax - b$ ortogonalen na stolpce matrike A.

45. Pokaži, da za singularno matriko A pri reševanju sistema $Ax = b$ nobena iteracijska metoda $Nx^{r+1} = Px^r + b \quad A = N - P$ ne izpolnjuje potrebnega in zadostnega pogoja za konvergenco $\rho(M) < 1$, kjer je $M = N^{-1}P$.

46. Pokaži, da je Jacobijeva iteracijska metoda konvergentna za vsako simetrično pozitivno definitno matriko reda 2×2. Ali velja ta trditev tudi za matrike višjega reda ? Preizkusi na primeru

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

47. Napiši algoritem za razcep simetrične pozitivno definitne tridiagonalne matrike

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & \ddots & & \\ & & & & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

v produkt U^TU, kjer je U zgornja trikotna matrika, po metodi Choleskega. Izračunaj matriko $B = UU^T$ in pokaži, da je podobna matriki A.

48. Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(a) Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.

(b) Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje u_i matrike A^TA.

(c) Preizkusi, da sta $q_i = Au_i, i = 1, 2$ ortogonalna vektorja.

Teoretična naloga. Za vsako matriko A reda $m \times n, \quad m > n$ velja

(a) Pokaži, da imata matriki A^TA in AA^T iste lastne vrednosti z izjemo $\lambda_i = 0$.

(b) Naj bodo u_i lastni vektorji matrike A^TA. Pokaži, da so $q_i = Au_i, i = 1, \ldots, n$ ortogonalni vektorji.

49. Razloži, kako bi računal lastne vrednosti simetrične matrike $A = \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}$ reda n, kjer sta B in C kvadratni matriki reda p in $n - p$ Kakšni so lastni vektorji in lastne vrednosti matrike A. Preizkusi za

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

50. Reši sistem linearnih enačb $Ax = b$, za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 20 \\ 23 \end{bmatrix}$$

Če nima rešitve poišči $\min_x \|Ax - b\|_2, \qquad \min \|x\|_2.$

51. Zapiši ekonomičen algoritem za računanje matrike $X = U^T AU$, kjer je A simetrična in U zgornja trikotna matrika.Navodilo:

$$\begin{bmatrix} U^T & 0 \\ \underline{u}^T & \nu \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \underline{a} \\ \underline{a}^T & \alpha \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & \underline{u} \\ 0 & \nu \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & \underline{x} \\ \underline{x}^T & \xi \\ & \end{bmatrix}$$

52. Reši sistem enačb $Ax = b$, kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 & 4 \\ -6 & 18 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & 17 & -10 \\ 4 & -3 & -10 & 15 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ -2 \\ 25 \end{bmatrix}$$

tako da razcepiš matriko A v produkt $U^T U$ po metodi Choleskega in nato rešiš oba trikotna sistema.

53. Reši sistem enačb $Ax = b$, kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

tako da razcepiš matriko A v produkt LU z Gaussovo eliminacijsko metodo in nato rešiš oba trikotna sistema.

NALOGE IZ INTERPOLACIJE IN APROKSIMACIJE

1. Funkcija je podana tabelarično

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3

   a) Konstruiraj interpolacijski polinom

   b) Konstruiraj aproksimacijsko funkcijo $g(a, b; x) = a + bx^2$ po metodi najmanjših kvadratov.

2. Zlepi poltraka

$$f(x) = 2sgn(x), \quad |x| > 1$$

   a) s polinomom čim nižje stopnje, da bo zlepek $\in C^1$

   b) Točkama $(-1, -2)$ in $(1, 2)$ dodaj kontrolni točki $(-1 + h, -2)$ in še $(1 - h, 2)$ in naj Bézierova krivulja aproksimirala to funkcijo. Nariši te krivulje za $h = 1, 2, 3$.

3. Za funkcijo, ki je podana tabelarično

x	0	1	2	3	7
y	0	25	20	15	7

   a) Konstruiraj interpolacijski polinom $p_4(x)$, izračunaj vrednost polinoma pri $x = 6$ in skiciraj njegov graf!

   b) Aproksimiraj jo z empirično formulo $y = \frac{x}{a+bx^2}$ in skiciraj graf te funkcije!

4. Tabeliraj funkcijo

$$f(x) = \frac{65}{4x^2 + 1}$$

   v interpolacijskih točkah $(-4, -1, 0, 1, 4)$ in konstruiraj interpolacijski polinom $p_4(x)$. Uredi ga po potencah x-a in skiciraj grafa funkcije $f(x)$ in $p_4(x)$. Poišči tudi ekstremne točke!

5. Aproksimiraj tabelarično podano funkcijo

x	0	1	2	3	4
y	35	16	7	3	1

   z empirično formulo $y = ae^{bx}$ po metodi najmanjših kvadratov.

6. Za katere vrednosti parametra a je premica $p(x) = ax+1$ interpolacijski polinom za funkcijo $f(x) = e^x$. Izračunaj interpolacijske točke za $a = 3, \quad a = 0.2, \quad a = 1$.

7. Za katere vrednosti realnega parametra a, je polinom $p(x) = x+a$ interpolacijski polinom za funkcijo $f(x) = x^3$. V mejnih primerih izračunaj interpolacijske točke.

8. Za katere vrednosti realnega parametra a, je polinom $p(x) = x^2 - a$ interpolacijski polinom za funkcijo $f(x) = x^4$. V mejnih primerih izračunaj interpolacijske točke.

9. Funkcija je podana tabelarično

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	-3	-2	-1	-2	-3	-4

   a) Konstruiraj interpolacijski polinom, ki v danih interpolacijskih točkah x_i zavzame vrednosti y_i

   b) Konstruiraj aproksimacijsko funkcijo $g(a,b;x) = a\cos^2\frac{\pi x}{6} + b$ po metodi najmanjših kvadratov.

10. V trikotniku $(2,0),(0,2),(-2,0)$ konstruiraj lok, ki se dotika stranic trikotnika v točkah $(1,1),(-1,1)$

   a) kot Hermitov polinom (zlepek)

   b) kot Bézierovo krivuljo

11. Tabelarično podano funkcijo

x	1	2	4	7
y	31	17	10	7

   aproksimiraj z

   a) z interpolacijskim polinomom

   b) s funkcijo $y = a + \frac{b}{x}$ po metodi najmanjših kvadratov.

12. V ekvidistantnih točkah x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 so podane funkcijske vrednosti f_0, f_1, f_2, f_3, f_4. Konstruiraj polinom $p_2(x)$ ki po metodi najmanjših kvadratov aproksimira podano funkcijo. Izpelji formulo za izračun približka integrala te funkcije z integralom polinoma $p_2(x)$ v mejah od x_0 do x_4.
   Primer:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	1	2	1	2	1

13. Konstruiraj tobogan, ki ima razliko med zgornjo in spodnjo točko b in razdaljo med začetkom in koncem a. Na vrhu in na dnu naj ima vodoravno smer.
   Ali bi znal postaviti tak tobogan, da bi bili tudi ukrivljenost na začetku in na koncu enaki 0?

14. Izpelji formulo za računanje ploščine odseka kvadratne Beziérove krivulje z vozloma a , c in kontrolno točko b

$$p = \frac{1}{3}(a \times b) + \frac{1}{6}(a \times c) + \frac{1}{3}(b \times c)$$

Za koliko,odstotkov se razlikuje ploščina elipse, ki je včrtana v pravokotnik $((1,-3),(1,3),(-1,3),(-1,-3))$ od ploščine lika, ki ga določa Beziérova krivulja s kontrolnimi točkami oglišč pravokotnika in se vozli ujemajo z dotikališči elipse.

15. Zlepi poltraka

$$f(x) = |x|, \quad |x| > 1$$

s polinomom čimmanjše stopnje, da bo zlepek iz $C^1(R)(C^2(R))$.

16. Tobogan ima višino $4.2m$ nad vodo in se po štirih metrih spusti na $1m$ nad vodo. Na vrhu in na dnu ima vodoravno smer. Opiši tobogan z

a) zlepkom oziroma Hermitovim polinomom

b) Bézierovo krivuljo, kjer vzameš za vozla točki $(0, 4.2)$, $(4, 1)$ in kontrolni točki $(p, 4.2)$, $(4 - p, 1)$.

c) Pri kateri vrednosti parametra p sta tangenti v točki $(2, 2.6)$ za obe krivulji enaki in kdaj je tangenta Bézierove krivulje v tej točki navpična?

17. Tabelarično je podana funkcija

x	-1	0	1
y	0	1	0

za katero velja $y'(-1) = 3, \quad y'(1) = -3$

a) Zapiši interpolacijski polinom $p_4(x)$, ki bo v teh točkah zavzel predpisane vrednosti

b) Zapiši zlepek, ki ga sestavljata dva polinoma tretje stopnje

c) Točkama $(-1, 0)$ in $(1, 0)$ dodaj kontrolni točki $(-1 + h, 3h)$ in še $(1 - h, 3h)$, da bo Bézierova krivulja aproksimirala to funkcijo (potekala skozi točko $(0, 1)$).

18. Dane so točke

x	-5	-2	-1	0	1	2	5
y	-72	-12	-12	0	12	12	72

a) Konstruiraj interpolacijski polinom

b) Konstruiraj premico $y = ax + b$ po metodi najmanjših kvadratov.

Skiciraj grafa obeh aproksimacijskih funkcij.

19. V trikotniku $(2, 0), (0, 2), (-2, 0)$ konstruiraj lok, ki se dotika stranic trikotnika v točkah $(1, 1), (-1, 1)$

a) kot Hermitov polinom (zlepek)

b) kot Bézierovo krivuljo

20. Tabelarično podano funkcijo

x	1	2	4	7
y	31	17	10	7

aproksimiraj z

a) z interpolacijskim polinomom

b) s funkcijo $y = a + \frac{b}{x}$ po metodi najmanjših kvadratov.

21. Funkcija je podana tabelarično

x	-3	-1	0	2	3
y	4.5	7.1	10	5.1	4.6

Konstruiraj aproksimacijsko funkcijo $g(a, b; x) = \frac{a}{1+x^2} + b$ po metodi najmanjših kvadratov.

22. V trikotniku $(2, 0), (0, 2), (-2, 0)$ konstruiraj lok, ki se dotika stranic trikotnika v točkah $(1, 1), (-1, 1)$

a) kot Hermitov polinom (zlepek)

b) kot Bézierovo krivuljo

23. Tabelarično podano funkcijo

x	1	2	4	7
y	31	17	10	7

aproksimiraj z

a) z interpolacijskim polinomom

b) s funkcijo $y = a + \frac{b}{x}$ po metodi najmanjših kvadratov.

24. Dani sta točki $(-1, 0)$ in $(1, 0)$. Določi kontrolne točke Bézierove krivulje $(-1, a)$, $(1, a)$ tako, da bo ta krivulja potekala skozi točko $(1, 0)$ in aproksimirala polkrožnico. Ugotovi, ali Bézierova krivulja oklepa krožnico ali ne (kje je točka Bézierove krivulje pri vrednosti parametra $t = 0.25$).

25. Konstruiraj tobogan, ki ima razliko med zgornjo in spodnjo točko b in razdaljo med začetkom in koncem a. Na vrhu in na dnu naj ima vodoravno smer.
Ali bi znal postaviti tak tobogan, da bi bili tudi ukrivljenost na začetku in na koncu enaki 0?

26. Izpelji formulo za računanje ploščine odseka kvadratne Beziérove krivulje z vozloma a , c in kontrolno točko b

$$p = \frac{1}{3}(a \times b) + \frac{1}{6}(a \times c) + \frac{1}{3}(b \times c)$$

Za koliko,odstotkov se razlikuje ploščina elipse, ki je včrtana v pravokotnik $((1,-3),(1,3),(-1,3),(-1,-3))$ od ploščine lika, ki ga določa Beziérova krivulja s kontrolnimi točkami oglišč pravokotnika in se vozli ujemajo z dotikališči elipse.

27. Dane so točke

x	-6	-2	-1	1	2	6
y	-10	-14	-10	10	14	10

a) Konstruiraj interpolacijski polinom in skiciraj njegov graf.

b) Aproksimiraj jo z empirično formulo $y = \frac{ax}{b+x^2}$ po metodi najmanjših kvadratov in skiciraj graf te funkcije.

28. Zlepi poltraka

$$f(x) = |x|, \quad |x| > 1$$

s polinomom čimmanjše stopnje, da bo zlepek iz $C^1(R) \quad (C^2(R))$.

29. Enakostraničnemu trikotniku s krajišči $A = (\sqrt{3}, -1)$ $B = (0, 2)$, $C = (-\sqrt{3}, -1)$ očrtaj "krožnicoš pomočjo Bézierove krivulje drugega reda. Kontrolne točke naj bodo presečišča tangent na krožnico. Zapiši en lok te krivulje in izračunaj odstop od krožnice pri $t = \frac{1}{2}$!

30. Za tabelarično podane vrednosti

x	-6	-2	-1	1	2	6
y	-10	-14	-10	10	14	10

a) Konstruiraj interpolacijski polinom

b) Aproksimiraj z $y = \frac{ax}{b+x}$ po metodi najmanjših kvadratov.

31. Tobogan ima višino $4.2m$ nad vodo in se po štirih metrih spusti na $1m$ nad vodo. Na vrhu in na dnu ima vodoravno smer. Opiši tobogan z

a) zlepkom oziroma Hermitovim polinomom

b) Bézierovo krivuljo, kjer vzameš za vozla točki $(0, 4.2)$, $(4, 1)$ in kontrolni točki $(p, 4.2)$, $(4 - p, 1)$.

c) Pri kateri vrednosti parametra p se tangenti v točki $(2, 2.6)$ za oba primera ujemata in kdaj je tangenta Bézierove krivulje v tej točki navpična?

32. Za funkcijo $\sin x$ konstruiraj na intervalu $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aproksimacijski polinom

a) Taylorjev polinom stopnje 3 tj. $T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$

b) Hermitov interpolacijski polinom z interpolacijskima točkama $x_0 = -\frac{\pi}{2} \quad x_1 = \frac{\pi}{2}$.

Ugotovi največjo napako Taylorjevega in Hermitovega polinoma ($x = 0.7$) na intervalu I.

33. Dani sta točki $(1,0)$ in $(0,1)$. Določi kontrolni točki Bézierove krivulje $(1,a)$, $(a,1)$ tako, da bo ta krivulja potekala skozi točko $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ in aproksimirala četrtino krožnice.

34. Poišči po metodi najmanjših kvadratov premico, ki najbolje aproksimira naslednje meritve:

x	1	1	2	3	3	4	5	5
y	1	2	2	4	5	6	6	7

NALOGE IZ INTEGRACIJE IN DIFERENCILANIH ENAČB

1. Izračunaj $\int_0^\pi \cos^4 x dx$ s Simpsonovo formulo $S(\frac{\pi}{2}), \quad S(\frac{\pi}{4})$ in s trapezno formulo $T(\frac{\pi}{2}), \quad T(\frac{\pi}{4})$. Kolikšen je približek za napako in kolikšna je dejanska napaka ?

2. Izpelji kvadraturno formulo

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = Af(-h)+Bf(0)+Cf(h)+Df'(-h)+Ef'(h)+Rf^{(p)}(\xi)$$

   in izračunaj vrednost integrala $\int_0^\pi \sin x dx$ s korakom $h = \frac{\pi}{2}$ in $h = \frac{\pi}{4}$. Kolikšna je dejanska napaka in kolikšen je približek za napako ?

3. Izpelji kvadraturno formulo

$$\int_{0}^{3h} f(x)dx = Af(h) + Bf(2h) + Cf'(0) + Df'(3h) + Rf^{(p)}(\xi)$$

   z metodo nedoločenih koeficientov. Zapiši sestavljeno pravilo in izračunaj integral $\int_0^\pi \sin x dx$ s $h = \frac{\pi}{3}$ in $h = \frac{\pi}{6}$. Kolikšen je približek za napako in kolikšna je dejanska napaka ?

4. Poišči splošno rešitev sistema diferencialnih enačb

$$y' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} y$$

5. Izračunaj zlimitirani integral

$$\int_0^{2h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$$

   na dva načina.

   a) s substitucijo odstrani singularnost in izračunaj integral s Simpsonovo metodo

   b) Izpelji kvadraturno formulo $\int_0^{2h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = Af(0)+Bf(h)+Cf(2h)+Rf^{(3(}(\xi)$

   Preizkusi za $\int_0^{0.2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$

6. Izračunaj vrednost funkcije $y = \sin x$, ki zadošča diferencialni enačbi

$$y^{''} = -y, \quad y(0) = 0, \quad y^{'}(0) = 1$$

   tako, da sistem $y^{'} = z, \quad z^{'} = -y$ rešuješ s trapezno kvadraturno formulo.
   Izračunaj vrednost $\sin 0.3$ s korakom $h = 0.1$

7. Dan je sistem diferencialnih enačb prvega reda

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + bxy & \qquad x(0) &= x_0 \\ \dot{y} &= cy + dxy & \qquad y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Izračunaj prvi integral sistema $\frac{x^c e^{dx}}{y^a e^{bx}} = K$ in razloži, kako bi s pomočjo tega integrala kontroliral odstop numerične rešitve od prave rešitve.

8. Formuli za numerično odvajanje

a) $y_0' = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + O(h^2)$

b) $y_2' = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) + O(h^2)$

lahko uporabimo za reševanje diferencialne enačbe

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

in dobimo

a) $y_{i+1} = 4y_i - 3y_{i-1} - 2hf(x_{i-1}, y_{i-1}) + O(h^3)$

b) $y_{i+1} = \frac{1}{3}(4y_i - y_{i-1}) + 2hf(x_{i+1}, y_{i+1}) + O(h^3)$

Obe metodi imata isti red $p = 2$.

i) Izračunaj y_1 z istim redom natančnosti.

ii) Ugotovi ničelno stabilnost obeh metod

iii) Izračunaj interval absolutne stabilnosti za ti dve metodi

Primer:
Reši enačbo $y' = -y, \quad y(0) = 1$ z metodo (b) in korakom $h = 0.2$. Kolikšna je dejanska napaka pri $x = 1$?

9. Zapiši algoritem za reševanje sistema diferencialnih enačb

$$\underline{y}' = A(x)\underline{y}, \quad \underline{y}(0) = \underline{y}_0$$

s trapezno metodo. Razloži kako lahko računamo $\underline{y}_{i+1}$ eksplicitno, saj je sistem linearen.
Primer:

$$\begin{aligned} y' &= xz & \qquad y(0) &= 1 \\ z' &= -xy & \qquad z(0) &= 1 \end{aligned}$$

10. Razloži, kako rešiš robni problem

$$-(p(x)y')' + q(x)y = r(x), \quad y(a) = A, y(b) = B$$

tako, da ga prevedeš na dva začetna problema, ki ju rešuješ z diferenčno metodo.

11. Zapiši algoritem za reševanje začetnega problema

$$-(p(x)y')' + q(x)y = r(x), \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$$

z metodo Runge-Kutta.

12. Riccatijevo diferencialno enačbo

$$y' = x^2 - y^2, \qquad y(0) = 1$$

rešuj z metodo Runge-Kutta. Vzemi za $h = 0.2$ in izračunaj vrednost rešitve pri $x = 0.4$

13. Poišči rešitev sistema

$$\begin{array}{rcll} y' = & z & , & y(0) = 0 \\ z' = & -y & , & z(0) = 1 \end{array}$$

in rešuj sistem s trapezno metodo s korakom $h = 0.1$. Kolikšna je dejanska napaka numerične rešitve pri $x = 0.2$

14. Ugotovi red p formule

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \frac{h^2}{12}(y_{n+1}^{"} + 10y_n^{"} + y_{n-1}^{"}) + O(h^p)$$

Reši enačbo $y" + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ Kako bi reševal numerično to enačbo z zgornjo formulo in razloži kako izračunaš vrednost $y_1 = y(h) + O(h^p)$ s primerno natančnostjo.

15. Napiši nekaj členov Taylorjeve vrste za rešitev diferencialne enačbe

$$y' = x + y^2, \quad y(0) = 0$$

16. Izračunaj vrednosti funkcije $y = e^x$, ki zadošča diferencialni enačbi $y' = y, \quad y(0) = 1$ s trapezno formulo v točkah $x_i = ih$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{2}(y(x_i) + y(x_{i+1})) + O(h^3)$$

z diferenčno enačbo

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y_i + y_{i+1}), \quad y_0 = 1$$

Izračunaj vrednost $y(1)$ s korakom $h = 0.1$ in nato še s korakom $h = 0.2$. Izboljšaj natančnost rezultata z Rombergovo metodo.
Kolikšna je približna napaka $T(0.1)$ in kolikšna dejanska? Kolikšna je dejanska napaka rezultata, ki je izračunan z Rombergovo metodo?

17. Enačbo $y' = x^2 - y^2$ integriramo

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} (t^2 - y^2(t))dt$$

in uporabimo trapezno formulo

$$y_1 - y_0 = \frac{h}{2}((x_0^2 - y_0^2) + (x_1^2 - y_1^2))$$

Iz zgornje enačbe izračunaj y_1 rekurzivno s korakom $h = 0.1$. Kako bi ga računal iz kvadratne enačbe? Nadaljuj do y_3.

18. Izračunaj

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x - e^{-x}}{x} dx$$

s trapezno formulo, kjer vzameš za korak h = 1 in h = 0.5. Nato izboljšaj natančnost z Rombergovo metodo.

19. Pojasni, kako rešimo robni problem

$$y'' + py' + qy = f, \quad y'(a) = A, y(b) = B$$

s pomočjo dveh Cauchyjevih nalog. Zapiši za primer ko računamo z leve in kako računamo z desne. Kako bi rešil robni problem z istimi robnimi pogoji, vendar nelinearno diferencialno enačbo?

20. Preveri red formule

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{12}(5y'_{n+1} + 8y'_n - y'_{n-1}) + O(h^{p+1})$$

in izračunaj interval absolutne stabilnosti take metode, ki jo uporabiš pri reševanju enačbe $y' = f(x, y)$

21. Diferencialno enačbo $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ rešuješ s pomočjo kvadraturne formule

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(3y'_n - y'_{n-1}) + O(h^{p+1})$$

a) izpelji to formulo s pomočjo iterpolacijskega polinoma

b) ugotovi red p te metode

c) izračunaj interval absoutne stabilnosti te metode.

22. Razloži, kako bi reševal diferencialno enačbo $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ s pomočjo kvadraturne formule

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h^2}{12}(f'_0 - f'_1) + O(h^5)$$

Izračunaj y_1 in y_2 po tem pravilu za $y' = -y, y(0) = 1$ pri $h = 0.1$. Kolikšna je dejanska napaka?

23. Reši robni problem

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad y'(0) = A, \quad y'(1) = B$$

z dvema Chauchyjevama začetnima nalogama. $y = u + Cv$

24. Razloži, kako bi s strelsko metodo rešil nelinearni robni problem

$$y'' = y^2, \quad y'(0) = A, y'(1) = B$$

25. Če v napaki Simpsonove kvadraturne formule

$$\int_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(f_{-1} + 4f_0 + f_1) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

nadomestiš $f^{(4)}(\xi)$ s formulo za numerično računanje četrtega odvoda

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{f_{-2} - 4f_{-1} + 6f_0 - 4f_1 + f_2}{h^4}$$

dobiš izboljšano Simpsonovo formulo $IS(h)$. Izpelji jo in ugotovi red napake p te formule t.j. $I - IS(h) = Rf^{(p)}(\xi)$

26. Izračunaj ploščino lika, ki ga oklepata krivulji $f(x) = e^{-x^2}$ in $g(x) = x^4$

a) Izračunaj mejo integracije.

b) izračunaj

$$p = 2\int_{0}^{0.84} (f(x) - g(x))dx$$

s Simpsonovo formulo s korakoma $h = 0.42$ in $h = 0.21$. Odtod izračunaj približek za napako.

c) oceni celotno napako.

27. V ekvidistantnih točkah x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 so podane funkcijske vrednosti f_0, f_1, f_2, f_3, f_4. Konstruiraj polinom $p_2(x)$ ki po metodi najmanjših kvadratov aproksimira podano funkcijo. Izpelji formulo za izračun približka integrala te funkcije z integralom polinoma $p_2(x)$ v mejah od x_0 do x_4.
Primer:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	1	2	1	2	1

28. Izpelji formulo za računanje zlimitiranega integrala

$$\int_{0}^{h} x^{\alpha} \ln x f(x)dx = Af(0) + Bf(h) + Rf"(\xi)$$

kjer je $f(x)$ dovolj gladka funkcija.

29. Poišči spošno rešite Riccatijeve enačbe

$$y' + y^2 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

če uganeš, oziroma bi utegnil uganiti posebno rešitev te enačbe $Y = x - 1$.

30. Izračunaj integral

$$\int_{0}^{1} y(x)dx$$

kjer je $x = ye^y$, na štiri decimalna mesta natančno.

31. Razloži kako bi reševal diferencialno enačbo $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ s pomočjo kvadraturne formule

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = 2hf_0 + \frac{2h^2}{3}(f_0' + 2f_1') + O(h^5)$$

Kako bi poiskal vrednost rešitve $y(x)$ v tocki x_1. Kolikšen je interval absolutne stabilnosti t.j. za katere $h\lambda$ sta rešitvi diferencialne enačbe $y' = \lambda y$ in pripadajoče diferenčne enačbe vsklajeni?

32. Prevedi robni problem

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad y(a) = A, \quad y'(b) = B$$

na dve Cauchyjevi začetni nalogi $y = u + Cv$. Zapiši začetne pogoje za funkciji u in v v začtni točki a in nato še v točki b.

33. Razloži, kako bi z Newtonovo metodo izračunal ničlo funkcije $y(x)$, ki zadošča diferencialni enačbi

$$y'' + (1 + x^2)y = 0, \quad y(0) = 0$$

34. Izračunaj

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}} dx$$

S trapezno formulo s korakom $h = 1$ in $h = 0.5$. Izboljšaj natančnost z Rombergovo metodo.

35. Izračunaj vrednost integrala

$$\int_0^1 e^x \ln x dx$$

tako, da z integracijo per partes odstraniš singularnost integranda in ga nato numerično izračunaš na štiri decimalna mesta natančno.

36. Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 2y' + y = 1$$

ki zadošča robnemu pogoju $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$ Nato aproksimiraj odvode v točki $x_1 = 0.5$ z deljeno diferenco in izračunaj y_1. Kolikšna je razlika med y_1 in $y(0.5)$?

37. Prepričaj se, da ima Mersonova metoda

$$\begin{array}{lcl}
k_1 & = & hf(x, y) \\
k_2 & = & hf(x + h/3, y + k_1/3) \\
k_3 & = & hf(x + h/3, y + k_1/6 + k_2/6) \\
k_4 & = & hf(x + h/2, y + k_1/8 + 3k_3/8) \\
k_5 & = & hf(x + h, y + k_1/2 - 3k_3/2 + 2k_4) \\
y(x + h) & = & y(x) + (k_1 + 4k_4 + k_5)/6
\end{array}$$

za reševanje diferencialne enačbe $y' = ay \quad y(o) = y_0$ red $p = 5$.
Navodilo: Primerjaj koeficiente Taylorjeve vrste in člene Mersonove metode !

38. Poišči rešitev enačbe $y' = y - \frac{2x}{y} \quad y(0) = 1$ Izračunaj vrednost te rešitve z metodo Runge-Kutta s korakom h = 0.4 in korakom h = 0.2 pri x = 0.4. Kolikšen je približek za napako in kolikšna je dejanska napaka ?

39. Pokaži, da ima Milneove implicitne formula (Simpsonova formula) interval absolutne stabilnosti prazen. To pomeni, da je za vsak $h > 0$ reševanje diferencialne enačbe

$$y' = \lambda y \quad (\lambda < 0)$$

s to metodo nestabilno (ena od rešitev prirejene diferenčne enačbe je naraščajoča).
Navodilo: Upoštevaj, da sta oba korena kvadratne enačbe $x^2+bx+c = 0$ absolutno pod ena natanko tedaj ko velja $|c| < 1$ in $|b| < 1 + c$.