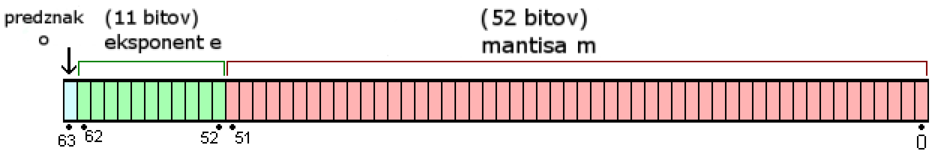
Poglavje 1

Plavajoča vejica

Naloga 1.1 *Pretvori število* 7.721 *v sistem* $P(2, 6, -10, 10)$.



Slika 1.1: Plavajoča vejica

Če hočemo število x zapisati v sistemu $P(b, , t, L, U)$, iščemo zapis normalizirane ($c_1 = 1$) oblike

$$\pm 0.1c_2 \ldots c_t \cdot b^e,$$

kjer je $L \leq e \leq U$. V primeru, ko število ni predstavljivo, uporabimo zaokrožanje. Naj bo $x = 0.c_1c_2 \ldots c_t c_{t+1} \ldots \cdot b^e$ v neskončnem decimalnem zapisu. Če je $c_{t+1} < b/2$ odrežemo števke od $(t+1)$-ve naprej in je $fl(x) = \pm 0.c_1c_2 \ldots c_t \cdot b^e$, če pa je $c_{t+1} \geq b/2$ zaokrožimo navzgor, $fl(x) = \pm \left(0.c_1c_2 \ldots c_t + b^{-t}\right) \cdot b^e$.

Rešitev. Število najprej pretvorimo v dvojiški zapis. Najprej se lotimo celega dela.

$$\begin{aligned}
7 &= 3 * 2 + 1 \\
3 &= 1 * 2 + 1 \\
1 &= 0 * 2 + 1 \uparrow
\end{aligned}$$

Preberemo navzgor in dobimo $7 = 111_{(2)}$. V naslednjem koraku pretvorimo še decimalni del v dvojiški zapis.

$$\begin{aligned}
0.721 * 2 &= 0.442 + 1 \downarrow \\
0.442 * 2 &= 0.884 + 0 \\
0.884 * 2 &= 0.768 + 1 \\
0.768 * 2 &= 0.536 + 1
\end{aligned}$$

Torej je

$$fl\,(7.721) = fl\left(111.1011_{(2)}\right) \overset{\text{zaokrožimo}}{\overbrace{=}} 111.110.$$

Ker iščemo zapis normalizirane oblike $c_1 = 1$, moramo število deliti/množiti z dva, dokler ne dobimo oblike $0.1c_2c_3c_4c_5c_6$ Torej $111.110_{(2)} = 0.111110(2) * 2^3$. Mantisa je 0.111110, eksponent pa 3.

■

Naj bo x število in $fl(x)$ najbližje predstavljivo število. Velja

$$fl(x) = x(1+\delta) \text{ in } |\delta| \leq u,$$

kjer je u osnovna zaokrožitvena napaka. Za predstavljivo število velja $fl(x) = x$.

Poglavje 2

Numerična stabilnost

Algoritem je **direktno stabilen**, če vrne rezultat, ki se malo razlikuje od prave vrednosti. Ponavadi preverjamo relativno direktno stabilnost. Direktna absolutna in relativna napaka sta

$$|y - \widehat{y}| \text{ in } \frac{|y - \widehat{y}|}{|y|}.$$

Algoritem je **obratno stabilen**, če za izračunan rezultat obstajajo taki malo zmoteni podatki, da iz njih s točnim izračunom dobimo izračunano vrednost. Obratna absolutna napaka je najmanjši $|\Delta x|$, tako da velja $f(x + \Delta x) = \widehat{y}$. Obratna relativna napaka je $\frac{|\Delta x|}{|x|}$.

Pri obratni napaki je izračunana vrednost enaka $\widehat{y} = f(\widehat{x})$. Če je funkcija f *zvezno odvedljiva* v x, potem velja

$$|\widehat{y} - f(x)| = |f(\widehat{x}) - f(x)| \leq |f'(x)||\widehat{x} - x|.$$

Če f ni absolutno občutljiva, bo pri majhnih vrednostih $\Delta x = |\widehat{x} - x|$ napaka absolutno obratno stabilne metode majhna in metoda bo absolutno direktno stabilna. Podobno velja za relativno stabilnost in relativne napake. Več ste povedali na predavanjih.

Naloga 2.1 *Vrednost* $z = x^2 - y^2$ *računamo na dva načina:*

(i). $z = x^2 - y^2$

(ii). $z = (x - y)(x + y)$

Analiziraj algoritma. Oceni relativno napako $\frac{|\widehat{z}-z|}{|z|}$. *Ali je kateri od obeh algoritmov direktno/obratno stabilen?*

Rešitev.

(i). Imamo $z = x * x - y * y$, $\widehat{a} = x * x(1 + \alpha)$, $\widehat{b} = y * y(1 + \beta)$, $\widehat{z} = (\widehat{a} - \widehat{b})(1 + \gamma)$, kjer je $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \leq u$, u je relativna natančnost. Sledi, da je

$$\widehat{z} = x^2 \overbrace{(1 + \alpha)(1 + \gamma)}^{(1+\delta_1)} - y^2 \overbrace{(1 + \beta)(1 + \gamma)}^{(1+\delta_2)}.$$

Iz ocene $1 - 2u + u^2 = (1 - u)^2 \leq (1 + \delta_1) \leq (1 + u)^2 = 1 + 2u + u^2$, pri majhnem u dobimo $\delta_1, \delta_2 \leq 2 * u$. Ocenimo izraz

$$|\widehat{z} - z| = |x^2\delta_1 - y^2\delta_2| \leq x^2|\delta_1| + y^2|\delta_2| \leq 2u(x^2 + y^2).$$

Torej velja ocena:
$$\frac{|\widehat{z}-z|}{|z|} \leq 2u\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}.$$
Ocena je smiselna. Najlažje to vidimo tako, da izberemo $\delta_1 = u$, $\delta_2 = -u$. Iz tega vidimo, da ta algoritem ni direktno stabilen, saj lahko pri x in y, ki sta si blizu, dobimo veliko napako. Algoritem je obratno stabilen. Če definiramo $\widehat{x} = x\sqrt{(1+\delta_1)}$ in $\widehat{y} = y\sqrt{(1+\delta_2)}$, ki sta blizu x in y, ter predpostavimo, da je računanje točno, dobimo zmoten izraz $\widehat{z} = \widehat{x}^2 - \widehat{y}^2$.

(ii). Oglejmo si še $z = (x-y)(x+y)$. Definirajmo $\widehat{a} = (x-y)(1+\alpha)$, $\widehat{b} = (x+y)(1+\beta)$ ter $\widehat{z} = \widehat{a}\widehat{b}(1+\gamma)$, kjer je $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \leq u$. Izraz je enak
$$\widehat{z} = (x-y)(x+y)\overbrace{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}^{(1+\delta)},$$
kjer s podobno oceno kot v prejšnji točki dobimo $|\delta| \leq 3u$. Torej velja ocena $|\widehat{z}-z| \leq 3u|z|$. Na koncu dobimo $\frac{|\widehat{z}-z|}{|z|} \leq 3u$. Algoritem je direktno stabilen. Prav tako je obratno stabilen, iskana zmotena x in y sta recimo: $\widehat{x} = x\sqrt{(1+\delta)}$, $\widehat{y} = y\sqrt{(1+\delta)}$.

■

Naloga 2.2 *Dan je polinom*
$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$
radi bi izračunali njegovo vrednost v točki x po Hornerjevem algoritmu. Predpostavka je, da so koeficienti $a_0, \ldots, a_n$ in argument x predstavljiva števila. Analiziraj stabilnost izračuna.

Rešitev.

Algoritem 1: Eksaktni algoritem

$p_0 = a_0$;
for $i = 1, \ldots, n$ **do**
  $p_i = p_{i-1} * x + a_i$;
  $p = p_n$;
end

Algoritem 2: Dejanski algoritem

$\widehat{p}_0 = a_0$;
for $i = 1, \ldots, n$ **do**
  $\widehat{p}_i = (\widehat{p}_{i-1}(1+\alpha_i) + a_i)(1+\beta_i)$;
  $p = p_n$;
end

Z analizo zaokrožitvenih napak dobimo
$$\widehat{p} = a_0x^n(1+\gamma_0) + a_1x^{n-1}(1+\gamma_1) + \cdots + a_n(1+\gamma_n),$$
kjer je
$$\begin{aligned} 1+\gamma_0 &= (1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_n)(1+\beta_1)\cdots(1+\beta_n), \\ 1+\gamma_i &= (1+\alpha_{i+1})\cdots(1+\alpha_n)(1+\beta_i)\cdots(1+\beta_n), \quad i = 1, \cdots, n-1, \\ 1+\gamma_n &= 1+\alpha_n. \end{aligned}$$
Naredimo samo dva koraka. Dokaz koraka indukcije je preprost in prepuščen bralcu.
$$\widehat{p}_1 = (\widehat{p}_0(1+\alpha_1) + a_1)(1+\beta_1) = a_0x(1+\alpha_1)(1+\beta_1) + a_1(1+\beta_1),$$
$$\widehat{p}_2 = (\widehat{p}_1(1+\alpha_2) + a_2)(1+\beta_1) = a_0x^2(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\beta_2)(1+\beta_2) + a_1x(1+\alpha_2)(1+\beta_1)(1+\beta_2) + a_2(1+\beta_2).$$

Narediti je treba še korak indukcje po stopnji polinoma.

Ocenimo lahko $|\gamma_0| \leq 2nu$ in $|\gamma_i| \leq (2(n-i)+1)\,u$ za $i = 1, \dots, n$.

Računanje vrednosti polinoma je obratno stabilno, saj se izračunane vrednosti ujemajo z eksaktno vrednostjo bližnjega polinoma, ki ima koeficiente $a_i(1+\gamma_i)$ namesto a_i, pri nespremenjenem argumentu x.

Iz absolutne napake $\widehat{p} - p = a_0 x^n \gamma_0 + a_1 x^{n-1} + \cdots a_n \gamma_n$, sledi ocena

$$|\widehat{p} - p| \leq 2nu \Big(|a_0||x^n| + |a_1||x^{n-1} + \cdots + |a_n| \Big),$$

od tod pa

$$\frac{|\widehat{p} - p|}{|p|} \leq \frac{2nu \Big(|a_0||x^n| + |a_1||x^{n-1} + \cdots + |a_n| \Big)}{|a_0 x^n + \cdots + a_n|}.$$

Računanje vrednosti polinoma po Hornerjevem algoritmu ni direktno stabilno. Težave pa, podobno kot pri računanju skalarnega produkta, lahko pričakujemo, če je vsota blizu 0, členi v vsoti pa niso enako predznačeni.

Modelni primer je Wilkinsov zgled za polinom $(x-2)^{19}$. Oglejte si demonstracijski zgled `horner_wilkinson.m` v Matlabu. ∎

Naloga 2.3 *Podani sta dve približno enaki števili* $x = 76.54320$ *in* $y = 76.54311110$ *v sistemu* $P(10, 7, ...)$. *Izračunaj relativne napake* $\frac{x - fl(x)}{x}$, $\frac{y - fl(y)}{y}$ *in* $\frac{z - fl(z)}{z}$, *kjer je* $z = x - y$.

Rešitev. Števila so že podana v desetiškem sistemu, zato moramo poskrbeti le, da bo mantisa dolžine 7 in število zaokroženo.

$$fl(76.54320) = 0.7654320 * 10^2, \qquad fl(76.54311110) = 0.7654311 * 10^2.$$

$$\frac{x - fl(x)}{x} = 0, \frac{y - fl(y)}{y} = 0.000000014.$$

Izračunajmo še $z = x - y = 0.0000889$ in $fl(z) = fl(fl(x) - fl(y)) = fl(0.7654320 * 10^2 - 0.7654311 * 10^2) = 0.0000009 * 10^2$. Torej velja $\frac{z - fl(z)}{z} = \frac{0.0000889 - 0.00009}{0.0000889} = -0.012373453$. Relativna napaka je velika.

∎

Naloga 2.4 *Pretvori naslednje izraze v stabilno obliko:*

(i). $\sqrt{1+x} - 1$ *za majhne* x,

(ii). $\sqrt{x^2 + x} - x$ *za velike* x,

(iii). $\tan(x) - \sin(x)$ *za majhne* x.

Rešitev.

(i). Znebiti se moremo odštevanja dveh približno enakih števil,

$$\sqrt{1+x}-1=\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{x}{1+\sqrt{1+x}}.$$

Zadnji izraz je v stabilni obliki.

(ii). Probleme nam lahko povzroča overflow, ko hočemo izračunati x^2.

$$\sqrt{x^2+x}-x=\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

(iii). Odštevamo dve približno enaki števili, saj velja $\sin(x)=\tan(x)\approx x$.

$$\tan(x)-\sin(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(x)=\frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{\cos(x)}=\frac{2\sin^2(x/2)}{2x\sin(x/2)\cos(x/2)}=\frac{\tan(x/2)}{x}.$$

Upoštevali smo $\cos(2(x/2))=\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)$, $1=\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)$ in $\sin(x)=2\sin(x/2)\cos(x/2)$.

■

Primer 2.1 *Stabilno računanje ničel kvadratnega polinoma* ax^2+bx+c. *Rešitev kvadratne enačbe* ax^2+bx+c *je enaka*

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2c}{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Drugi izraz uporabimo, ko gre $a\to 0$, *saj potem velja* $x_1\to-\frac{c}{b}$ *in* $x_2\to\infty$. *Eno ničlo lahko zmeraj izračunamo stabilno, drugo pa računamo preko Vietovih formul* $x_1x_2=\frac{c}{a}$, $x_1+x_2=-\frac{b}{q}$. *Naslednji izračun je stabilen:*

$$q=-\frac{1}{2}\left(b+\operatorname{sign}(b)\sqrt{b^2-4ac}\right),$$

$$x_1=\frac{q}{a}\qquad \textit{in}\qquad x_2=\frac{c}{ax_1}.$$

Poglavje 3

Nelinearne enačbe

Naloga 3.1 *Za funkcijo* $f(x) = x^3 + 1$ *naredi korak bisekcije in tangentne metode. Vzemi* $a = x_0 = -0.9$ *in* $b = -1.2$.

Rešitev. Korak bisekcije je $fa = f(-0.9) = (-0.9)^3 + 1 = 0.271$, $fb = f(-1.2) = (-1.2)^3 + 1 = -0.728$, $\text{sign}(fafb) = -1$. Zato lahko izvedemo korak bisekcije. Nadaljujmo: $c = (a+b)/2 = -1.05$, $fc = (-1.05)^3 + 1 = -0.157625$, $\text{sign}(fafc) < 0$, torej vzamemo $b = c$. To ponavljamo.

Za korak tangentne metode potrebujemo odvod $f'(x) = 3x^2$. Izračunajmo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -0.9 - \frac{(-0.9)^3 + 1}{3(-0.9)^2} \doteq 1,0115.$$

Bisekcijo in sekantno metoda uporabljam takrat, ko ne poznamo odvoda ali pa je računanje odvoda zahtevno. ■

Izrek 3.1 *Naj bo* α *koren enačbe* $x = g(x)$, *naj bo* g *zvezno odvedljiva na* $I = [\alpha - d, \alpha + d]$ *in naj velja* $|g'(x)| \leq m < 1$ *za vsak* $x \in I$. *Potem za vsak* $x_0 \in I$ *zaporedje*

$$x_{r+1} = g(x_r),\ r = 0, 1, \cdots$$

konvergira k α *in velja ocena za napako*

$$|x_r - \alpha| \leq \frac{m}{1-m}|x_r - x_{r-1}|.$$

Dokaz 3.1 *Za* $z_0 \in [\alpha - d, \alpha + d]$ *velja*

$$|g(z_0) - \alpha| = |g(z_0) - g(\alpha)| = |(z_0 - \alpha)g'(\xi)|,$$

kjer je ξ *med* z_0 *in* α. *Torej velja* $\xi \in I$, *posledično je* $|g'(\xi)| \leq m < 1$. *Dobili smo da velja* $|z_1 - \alpha| \leq m|z_0 - \alpha|$. *Naša indukcijska predpostavka je* $|z_n - \alpha| \leq |z_0 - \alpha|m^n$. *Korak indukcije je trivialen,*

$$|z_{n+1} - \alpha| = |g(z_n) - \alpha| = |z_n - \alpha|g'(\xi_1) \leq m|z_n - \alpha| \leq^{IP} |z_0 - \alpha|m^{n+1}$$

Torej velja

$$\lim_{n\to\infty} |z_{n+1} - \alpha| \leq \lim_{n\to\infty} |z_0 - \alpha|m^{n+1} = 0,$$

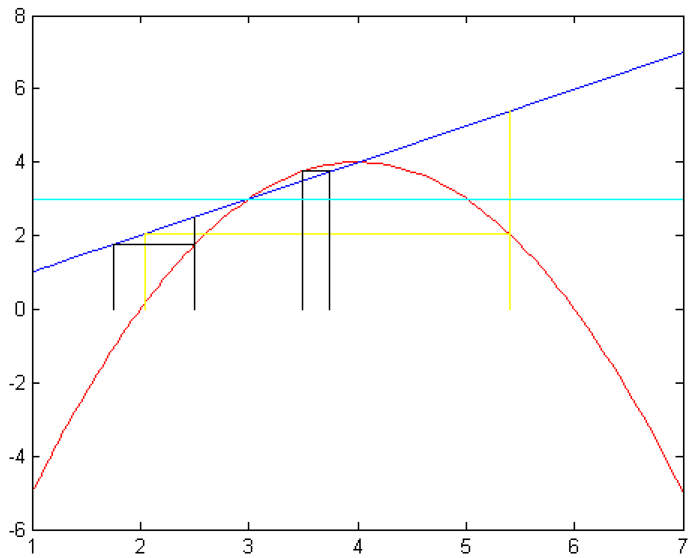
saj je m *strogo manjši kot ena.*

Izrek 3.2 *Imamo začetno točko* x_0 *in interval* $I = [x_0 - d, x_0 + d]$. *Če velja* $|g(x) - g(y)| \leq m|x - y|$ *za* $m < 1$ *in* $|g(x_0) - x_0| \leq (1 - m)d$, *potem zaporedje* x_r *konvergira k* α *in velja* $g(\alpha) = \alpha$.

Izrek 3.3 *(Banachovo skrčitveno načelo) Naj bo* M *poln metričen prostor in* $g : M \to M$. *Tedaj obstaja natanko ena negibna (fiksna) točka preslikava* g, *t.j. taka točka* $a \in M$, *da je* $g(a) = a$. *Če je* $x_0 \in M$ *poljubna točka, tedaj zaporedje* $x_{r+1} = g(x_r)$ *konvergira k* a. *Primer polnega metričnega prostora v* $\mathbb{R}$ *je zaprti interval.*

Naloga 3.2 *Za katere začetne približke je navadna iteracija za reševanje* $x = g(x)$, *kjer je* $g(x) = -12 + 8x - x^2$, *konvergentna? Kam konvergira zaporedje* $x_{r+1} = g(x_r)$ *? Kakšen je red konvergence? Kje nam konvergenco zagotavlja izrek (Banachovo skrčitveno načelo) ? Namig: začetne približke išči na intervalu.*

Rešitev. Iz slike preberemo, da je kandidat za območje konvergence interval $[3, 5]$. V



Slika 3.1: Koraki iteracije

naslednjih točkah bomo pokazali, da je ta interval res dobra izbira.

(i). Pokažimo, da velja: $x_r < 3 \Rightarrow x_{r+1} < x_r$. Za take začetne približke bomo imeli divergenco. Oglejmo si $x_r - x_{r+1}$ in pokažimo, da je izraz pozitiven. Izračunajmo

$$x_r - x_{r+1} = x_r - g(x_r) = x_r - (-12 + 8x_r - x_r^2) = 12 - 7x_r + x_r^2 = (x_r - 4)(x_r - 3).$$

Zadnji izraz v enakosti je v primeru $x_r < 3$ strogo pozitiven.

(ii). Velja tudi: $x_0 > 5 \Rightarrow x_1 < 3$. Spet dobimo divergenco. Oglejmo si izraz $3 - x_1$, to nam da

$$3 - x_1 = 15 - 8x_0 + x_0^2 = (x_0 - 5)(x_0 - 3) > 0.$$

(iii). Poleg tega velja $|x_{r+1} - 4| \leq |x_r - 4|$ za $x_r \in (3, 5)$. Izračunajmo

$$|x_{r+1} - 4| = |-12 + 8x_r - x_r^2 - 4| = |-16 + 8x_r - x_r^2| = (x_r - 4)^2, \tag{3.1}$$

ker je x_r na $(3,5)$, sledi $|x_r - 4| < 1$ in potem $|x_r - 4|^2 < |x_r - 4|$.Vidimo, da velja tudi $|x_r - 4| = |x_0 - 4|^{2^r}$, kar že zagotavlja konvergenco. Zvezo dobimo z zaporedno uporabo enačbe (3.1).

(iv). Za robne točke velja $g(3) = g(5) = 3$.

Naši možni rešitvi sta $x_1 = 4$ in $x_2 = 3$, x_2 dobimo samo v primeru robnih točk, kar je praktično nemogoče. Zato si oglejmo red konvergence za okolico ničle $x_1 = 4$. Spomnimo se, da velja: metoda je reda p, natanko takrat ko $g'(x_1) = \cdots = g^{(p-1)}(x_1) = 0$ in $g^{(p)}(x_1) \neq 0$. Odvod je $g'(x) = 8 - 2x$, torej je $g'(4) = 0$. Red je vsaj kvadratičen. Drugi odvod je enak $g''(x) = -2$. Torej je red kvadratičen.

Izrek nam konvergenco zagotavlja na intervalu, kjer velja $|g'(x)| < 1$. Torej mora veljati |8-2x|< 1, to pa je $3.5 < x < 4.5$. Izrek nam da torej le potreben pogoj, iterativna metoda pa lahko konvergira še na večjem intervalu.

■

Naloga 3.3 *Iščemo rešitve enačbe* $f(x) = x^5 - 10x + 1 = 0$. *Za iteracijsko funkcijo izberemo* $g(x) = \frac{x^5+1}{10}$. *Ali nam izrek izrek* 3.2 *zagotavlja konvergenco za* $x_0 = 0$? *Oceni napako drugega približka.*

Rešitev. Za odvod mora veljati $|g'(x)| \leq m < 1$. Kar je $|\frac{x^4}{2}| < 1$, $|x| < \sqrt[4]{2} \doteq 1.1892$. Torej imamo za x_0 konvergenco. Napako drugega približka bomo ocenili s pomočjo formule $|x_r - \alpha| \leq \frac{m}{1-m}|x_r - x_{r-1}|$. Oceniti moramo še m in si izbrati primeren interval. Če hočemo uporabiti izrek 3.2, izberemo recimo interval $[-0.2, 0.2]$, kjer je $d = 0.2$. Na tem intervalu ocenimo $m \leq \frac{0.2^4}{2} \leq 0.0008$. Poleg tega velja tudi $|g(0) - 0| = 0.1 \leq (1 - 0.0008)0.2$. Vsi pogoji so izpolnjeni. ■

Tangentno metodo dobimo, če za naslednjo točko v iteraciji vzamemo presečišče tangente na funkcijo f z osjo x. Tako dobimo $x_{r+1} = g(x_r) = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$.

Izrek 3.4 *Za tangentno metodo velja naslednji izrek. Naj velja* $f(\alpha) = 0$ *in naj bo* α m*-kratna ničla. Če je* $m = 1$, *je konvergenca vsaj kvadratična. Če velja še* $f''(\alpha) = 0$, *je konvergenca kubična. Če imamo večkratno ničlo* $m \geq 2$, *velja* $\lim_{x\to\alpha} g'(x) = 1 - 1/m$.

Rešitev. Dokazali bomo samo drugi del izrek, saj je prvi enostaven. Če je α m-kratna ničla funkcije f, potem po definiciji obstaja $l \neq 0$, da velja $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{(x-\alpha)^m} = l$. Po L'Hopitalu dobimo $\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}} = l$, saj gresta imenovalec in števec proti 0. Najprej pokažimo, da velja $\lim_{x\to\alpha} x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \alpha$. Zadosti bo, da dokažemo $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$. Imenovalec in števec delimo z $(x-\alpha)^m$, dobimo

$$\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)\frac{\frac{f(x)}{(x-\alpha)^m}}{m\frac{f'(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}}} = \lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)\frac{l}{ml} = 0.$$

Izračunajmo še limito odvoda:

$$g'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha}\frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)} - g(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha}\frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \alpha}{x-\alpha} = 1 - \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{f'(x)(x-\alpha)}.$$

Nadaljujmo

$$1 - \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{f'(x)(x-\alpha)} = 1 - \lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{f(x)}{(x-\alpha)^m}}{m\frac{f'(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}}} = 1 - \frac{l}{ml} = 1 - \frac{1}{m}.$$

■

Laguerrova metoda je metoda za iskanje ničel polinoma

$$f(z) = a_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n).$$

Iteracije je oblike

$$z_{r+1} = z_r - \frac{nf(z_r)}{f'(z_r) \pm \sqrt{(n-1)\left[(n-1)f'^2(z_r) - nf(z_r)f''(z_r)\right]}}.$$

Velja $\epsilon_r = x_r - \alpha$, $\epsilon_{r+1} = C\epsilon_r^3 + O(\epsilon_r^4)$, kjer je $C = \frac{(n-2)f''^2(\alpha)}{8(n-1)f'^2(\alpha)} - \frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)}$. Predznak izberemo tako, da je izraz v imenovalcu po absolutni vrednosti največji. Konvergenca je pri enostavnih ničlah vsaj kubična.

Naloga 3.4 *V iteracijski formuli* $x_{r+1} = \frac{A^2}{x_r^5}\left(\alpha + \frac{\beta x_r^3}{A} + \frac{\gamma x_r^6}{A^2}\right)$ *za* $\sqrt[3]{A}$ *določi* α, β, γ, *da bo metoda vsaj kubična.*

Rešitev. Veljati mora $g(\sqrt[3]{A}) = \sqrt[3]{A}$, $g'(\sqrt[3]{A}) = 0$, $g''(\sqrt[3]{A}) = 0$. Imamo

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha A^2 x^{-5} + \beta A x^{-2} + \gamma x, \\ g'(x) &= -5\alpha A^2 x^{-6} - 2\beta A x^{-3} + \gamma, \\ g''(x) &= 30\alpha A^2 x^{-7} + 6\beta A x^{-4}. \end{aligned}$$

Dobimo sistem:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 1, \\ -5\alpha - 2\beta + \gamma &= 0, \\ 30\alpha + 6\beta &= 0. \end{aligned}$$

Iz tretje enačbe dobimo $\beta = -5\alpha$. Vstavimo v drugo in dobimo $\gamma = -5\alpha$. Nazadnje iz prve enačbe dobimo $-9\alpha = 1$. Torej je $\alpha = -\frac{1}{9}$, $\beta = \gamma = \frac{5}{9}$. Za $A = 5$ in $x_0 = 2$ dobimo $g(x_r) = \frac{25}{9x_r^5}\left(-1 + x_r^3 + \frac{x_r^6}{5}\right)$. Navedimo nekaj začetnih približkov: $x_1 \doteq 1.71875$, $x_2 \doteq 1.709976326$, $x_3 \doteq 1.709975947$. ■

Naloga 3.5 *Določi vse polinome četrte stopnje z vodilnim koeficientom* 1, *pri katerih se tangentna metoda veda takole:*

- *v bližini* α *ima linearno konvergenco,*
- *v bližini* $-\alpha$ *ima kubično konvergenco.*

Določi še preostale ničle polinoma in red konvergence v njihovi bližini.

Rešitev. Spomnimo se, da je v bližini enostavnega korena konvergenca vsaj kvadratična. Če je prvi odvod enak 0, je konvergenca kubična. V primeru večkratne ničle je konvergenca linearna. Iz tega ugotovimo, da je α vsaj dvakratna ničla in $-\alpha$ enostavna ničla. Polinom je oblike $p(x) = (x+\alpha)(x-\alpha)^2(x-d)$, kjer je d neznana ničla. Uporabimo formulo

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x).$$

Dobimo

$$p''(x) = 2(x-\alpha)^2 + 4(x-\alpha)(x-d) + 4(x+\alpha)(x-d) + (x-\alpha)(x+\alpha).$$

Če hočemo, da bo konvergenca kubična, mora veljati $p''(-\alpha) = 0$. Vstavimo $-\alpha$:

$$p''(-\alpha) = 2(-\alpha-\alpha)^2 + 4(-\alpha-\alpha)(-\alpha-d) + 0 + 0 = 8\alpha(\alpha+\alpha+d) = 0,$$

iz česar dobimo $d = -2\alpha$. Ničla -2α je enostavna, konvergenca je vsaj kvadratična. Izračunajmo še vrednost drugega odvoda v -2α:

$$p''(-2\alpha) = 2(-2\alpha-\alpha)^2 + 0 + 0 + (-2\alpha+\alpha)(-2\alpha-\alpha) = 30\alpha^2 \neq 0.$$

Konvergenca v -2α je kvadratična. ■

Newtonova metoda se uporablja za iskanje rešitev sistema $F(z) = 0$. Metoda je posplošitev tangentne metode. Označimo $\Delta z_r = z_{r+1} - z_r$. Recimo, da je z_{r+1} ničla. Velja

$$0 \doteq F(z_r) + J(z_r)(z_{r+1} - z_r),$$

kjer je J Jacobijeva matrika parcialnih odvodov reda 1. Dobimo

$$J(z_r)\Delta z_r = -F(z_r).$$

Pri vsakem koraku rešimo sistem in dobimo Δz_r,

Naloga 3.6 *Nastavi Newtonovo metodo za reševanje sistema:*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4, \\ x^2 - y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Naredi en korak z začetnim približkom $x_0 = 1.5$, $y_0 = 1$.

Rešitev. Velja $F(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+y^2-4 \\ x^2-y^2-1 \end{bmatrix}$. Izračunajmo

$$JF = \begin{bmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}.$$

Na vsakem koraku rešimo:

$$\begin{bmatrix} 2x_r & 2y_r \\ 2x_r & -2y_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_r \\ \Delta y_r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_r^2 + y_r^2 - 1 \\ x_r^2 - y_r^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo $x_{r+1} = x_r + \Delta x_r$ in $y_{r+1} = y_r + \Delta y_r$. To ponavljamo za $r = 0, 1, \ldots$

$$JF(1.5, 1) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_r \\ \Delta y_r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

in dobimo $\Delta x_0 = \frac{1}{12}$ ter $\Delta y_0 = 0.25$. Kar pomeni $x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 1.5 + \frac{1}{12} = \frac{19}{12}$ in $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. ■

Naloga 3.7 *Poišči ničle funkcije* $f(x) = x + 4 - e^{-x^2}$ *z Matlabom in Mathematico.*

Rešitev. Oglejte si priložene datoteke. ■

Poglavje 4

Matrične forme

Matrična norma je preslikava $||.|| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}^+$, za katero velja

(i). $||A|| \geq 0$, $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,

(ii). $||\alpha A|| = |\alpha| ||A||$,

(iii). $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$,

(iv). $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$, submultiplikativnost.

Za poljubni matriki A in B in poljuben $\alpha \in \mathbb{C}$.

Naloga 4.1 *Dokaži, da velja* $||A||_F^2 = sl(A^H A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^H A)$, *kjer so* λ_i *lastne vrednosti* $A^H A$.

Rešitev. Za $B = A^H A$ velja $b_{ii} = \sum_{k=1}^n \overline{a_{ki}} a_{ki} = \sum_{k=1}^n |a_{ki}|^2$. Tako za sled B dobimo

$$\mathrm{sled}(A^H A) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ki}|^2 \right) = ||A||_F^2.$$

Matrika $A^H A$ je simetrična, torej se da diagonalizirati. Podobna je matriki z lastnimi vrednostmi na diagonali. Sled podobne matrike je enaka sledi prvotne matrike, tako dobimo $||A||_F^2 = sl(A^H A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^H A)$. ■

Naloga 4.2 *Pokaži, da velja*

$$||A||_1 = \max_i ||A(:, i)|| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}.$$

Rešitev. Upoštevajmo definicijo norme $||A||_1 = \max_{||x||_1=1} ||Ax||_1$, označimo še $y = Ax$. Tako velja $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ in

$$||y|| = \sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right).$$

Enakost je dosežene za vektor e_k, kjer je k indeks stolpca z največjo prvo normo. ■

Naloga 4.3 *Pokaži naslednje:*

a) $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_F \le ||A||_2 \le ||A||_F$

b) $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_\infty \le ||A||_2 \le \sqrt{n}||A||_\infty$

c) $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_1 \le ||A||_2 \le \sqrt{n}||A||_1$

d) $N_\infty(A) \le ||A||_2 \le nN_\infty(A)$

Rešitev. a)
Vemo, da velja

$$||A||_2 = \max_{i=1,\dots,n} \sqrt{\lambda_i(A^H A)} = \sigma_1(A) \text{ in } ||A||_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^H A).$$

Lastne vrednosti $A^H A$ so nenegativne, saj velja $< A^H Ax, x >=< \mu x, x >= \mu =< Ax, Ax >\ge 0$, $\lambda_i = \sigma_i^2$. Razporedimo jih v zaporedje $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \dots \ge \sigma_n^2 \ge 0$. Pozitivni koreni teh lastnih vrednosti $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \dots \ge 0$ so singularne vrednosti matrike A. Očitno je $||A||_2 \le ||A||_F$, saj je $||A||_2$ enaka $\sigma_1(A)$, kar je največja singularna vrednost matrike A. Poglejmo si $||A||_F^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \le n\sigma_1^2 = n||A||_2$, kar pomeni $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_F \le ||A||_2$. Neenačaj dobimo, ker je $\sigma_1(A)$ največja singularna vrednost.
b)
Za vektorske norme velja

$$||x||_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| \le \sqrt{|x_1|^2 + \dots |x_n|^2} = ||x||_2 \le \sqrt{n \max_i |x_i|^2} = \sqrt{n}||x||_\infty,$$

to je $||x||_\infty \le ||x||_2 \le \sqrt{n}||x||_\infty$. Razmisli zakaj neeneakosti držijo, vsi sklepi so enostavni. Iz tega dobimo

$$||A||_2 = \max_{x\ne 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} \le \max_{x\ne 0} \frac{\sqrt{n}||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = \sqrt{n}||A||_\infty$$

in

$$||A||_2 = \max_{x\ne 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} \ge \max_{x\ne 0} \frac{||Ax||_\infty}{\sqrt{n}||x||_\infty} = \frac{1}{\sqrt{n}}||A||_\infty.$$

c)
Velja $||A||_1 = ||A^H||_\infty$ in $||A||_2 = ||A^H||_2$. Iz tega že sledi neenakost.
d)
Iz a) vemo

$$||A||_2 \le ||A||_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \le \sqrt{n^2 \max_{i,j} |a_{ij}|^2} = n \max_{i,j} |a_{ij}| = nN_\infty(A).$$

Za drugi del neenakosti upoštevamo $a_{ij} = e_i^T Ae_j$. Računajmo

$$|a_{ij}| = |e_i^T Ae_j| \le ||e_i||_2||Ae_j||_2 = \frac{||Ae_j||_2}{||e_j||_2} \le ||A||_2.$$

Prvi neenačaj dobimo po Cauchy-Schwartzovi neenakosti, zadnjega pa po definiciji norme $||A||_2$. ∎

Naloga 4.4 *Pokaži, da velja*

a) $|\lambda| \leq ||A||$

b) $||A||_2 \leq ||A||_\infty ||A||_1$

c) $||a_i||_2 \leq ||A||_2$

Rešitev. Točka a) je očitna. Naj bo x enotski lastni vektor za lastno vrednost λ, potem velja $||Ax|| = ||\lambda x|| = |\lambda|||x|| = \lambda$. Norma je supremum po vseh enotskih x, torej večja ali enaka.

Vemo, da je $||A||_2^2$ največja lastna vrednost matrike $A^H A$. Iz a) dobimo

$$||A||_2^2 \leq ||A^H A||_\infty \leq ||A^H||_\infty ||A||_\infty = ||A||_1 ||A||_\infty.$$

Trditev sledi za vektor i-ti enotski vektor e_i. Kjer velja $Ae_i = a_i$. ■

Naloga 4.5 *Izračunaj* $\|\ \|_1$, $\|\ \|_\infty$, $\|\ \|_F$ *za* $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ *in oceni* $\|\ \|_2$.

Rešitev. Izračunajmo

$$\begin{aligned}
||A||_1 &= \max\{|2| + |5| + |-2|,\ |-1| + |4| + |-1|,\ |3| + |1| + |2|\} = 9, \\
||A||_\infty &= \max\{|2| + |-1| + |3|,\ |5| + |4| + |1|,\ |-2| + |-1| + |2|\} = 10, \\
||A||_F &= \sqrt{4 + 1 + 9 + 25 + 16 + 1 + 4 + 4} = \sqrt{65} \doteq 8.06226.
\end{aligned}$$

Ocenimo $||A||_2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3}}||A||_F \leq ||A||_2 \leq ||A||_F &\quad \Rightarrow \quad 4.65475 \leq ||A||_2 \leq 8.06226 \\
\frac{1}{\sqrt{3}}||A||_\infty \leq ||A||_2 \leq \sqrt{3}||A||_\infty &\quad \Rightarrow \quad 5.7735 \leq ||A||_2 \leq 17.3205 \\
\frac{1}{\sqrt{3}}||A||_1 \leq ||A||_2 \leq \sqrt{3}||A||_1 &\quad \Rightarrow \quad 5.19615 \leq ||A||_2 \leq 15.58846 \\
N_\infty(A) \leq ||A||_2 \leq 3N_\infty(A) &\quad \Rightarrow \quad 5 \leq ||A||_2 \leq 15.
\end{aligned}$$

Skupaj dobimo oceno $5.7735 \leq ||A||_2 \leq 8.06226$. Boljšo oceno dobimo, če poskusimo oceniti spektralni radij matrike

$$B = A^H A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 20 & 7 \\ 20 & 8 & -1 \\ 7 & -1 & 14 \end{bmatrix}.$$

Za vsako lastno vrednost in vsako normo velja $\lambda_i(B) \leq ||B|_F = 50.0899$. Vemo, da velja

$$||A||_2 \leq \sqrt{||B||_F} = 7.0774.$$

Oceno navzdol dobimo, če upoštevamo $||A||_2 = ||A^T||_2$ in $||Ae_i||_2 \leq ||A||_2||e_i||_2 = ||A||_2$, zadnja enakost sledi iz definicije matrične norme. Vektorji Ae_i so ravno i-ti stolpci, A^Te_i so i-te vrstice. Norme vrstic so $5.7446,\ 4.2426, 3.7417$. Norme stolpcev so $3.7417,\ 6.4807,\ 3$. Torej dobimo $||A||_2 \geq 6.4807$. Končna ocena je $6.4809 \leq ||A||_2 \leq 7.0774$. Ukaz iz Matlaba vrne $\texttt{norm}(A) = 6.9044$. ■

Naloga 4.6 *Izračunaj* $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$ *in čim natančneje oceni* $\|A\|_2$ *na obe strani, če je*

$$\begin{aligned} a_{ii} &= -2i,\ i = 1,\ 2, \dots,\ n \\ a_{i+1,i} &= a_{i,i+1} = n - i,\ i = 1,\ 2, \dots,\ n, \end{aligned}$$

drugi elementi so enaki 0.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & n-1 & & & \\ n-1 & -4 & n-2 & & \\ & n-2 & -6 & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2n \end{bmatrix}.$$

Upoštevaj, da velja

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Rešitev. Pri $i = 1$ dobimo za vsoto absolutnih vrednosti v stolpcu $n+1$, kar očitno ni maksimum. Izračunajmo

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{i\neq 1}\{|-2i| + |n-i| + |n-i+1|\} = \max_{i\neq 1}\{2i + n - i + n - i + 1\} \\ &= \max_{i\neq 1}\{2n+1\} = 2n+1. \end{aligned}$$

Ker je matrika simetrična velja $\|A\|_1 = \|A^H\|_\infty = \|A\|_\infty = 2n+1$. Frobeniusova norma je

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}(2i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i^2 = 6\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + 4n^2 = 6\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 4n^2 =$$
$$n(n-1)(2n-1) + 4n^2 = n(2n^2 - 3n + 1) + 4n^2 = 2n^3 + n^2 + n.$$

Poglejmo si ocene za drugo normo

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F \Rightarrow$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2n^3+n^2+n} \le \|A\|_2 \le \sqrt{2n^3+n^2+n}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_\infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}(2n+1) \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}(2n+1)$$
$$N_\infty(A) \le \|A\|_2 \le nN_\infty(A) \Rightarrow 2n \le \|A\|_2 \le 2n^2.$$

Upoštevamo še, da velja $\|A\|_2^2 \le \|A\|_1\|A\|_\infty$. Iz tega dobimo

$$\|A\|_2^2 \le (2n+1)^2,$$

kar pomeni $\|A\|_2 \le 2n+1$. Za drugo normo smo dobili oceno

$$2n \le \|A\|_2 \le 2n+1.$$

■

Poglavje 5

Reševanje linearnih sistemov

Pogojenostno število matrike, $\mathrm{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$ nam pove kako občutljivo je reševanje sistema. Da lahko dobimo poljubno občutljive matrike v praksi, pokaže naslednja naloga.

Naloga 5.1 *Iščemo koeficiente polinoma* $p(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$*, ki na* $[0, 1]$ *aproksimira zvezno funkcijo* f *tako, da je napaka*

$$E = \int_0^1 (f(x) - p(x))^2 dx$$

minimalna. Torej mora veljati $\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0$ *za* $i = 1, \ldots, n$*, kjer je*

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 2 \int_0^1 (p(x) - f(x)) x^{i-1} dx.$$

Definirajmo vektor

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \qquad \textit{in}; \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo

$$F_i = \int_0^1 f(x) x^{i-1} dx = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n a_j x^{j-1} x^{i-1} \right) dx = \sum_{j=1}^n a_j \int_0^1 x^{i+j-2} dx = \sum_{j=1}^n a_j \frac{1}{i+j-1}.$$

Dobimo sistem s Hilbertovo matriko H_n, $H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$. *Kar je sistem* $Ha = F$. *Primer za* $n = 5$ *je*

$$H_5 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Hilbertove matrike so primer zelo občutljivih matrik. Pogojenostno število H_5 *je recimo približno* $4.766 \cdot 10^5$*, kar lahko izračunamo z ukazom* `cond` *v Matlabu. Pogojenostna števila matrik* H_n *hitro rastejo.*

Izkaže se, da smo dobili občutljiv sistem, ker smo vzeli standardno bazo polinomov stopnje n*. Za stabilno računanje moramo vzeti ortogonalno bazo polinomov. Priložena je Matlabova skripta za aproksimacijo integrala funkcije* $f(x) = e^x$ *s parabolo.*

Naloga 5.2 *Oceni relativno neodstranljivo napako, ki nastane pri množenju vektorja x z A, če x spremenimo za δx. Matrika A je obrnljiva.*

Rešitev. Velja $y = Ax$ in $A(x + \delta x) = y + \delta y$. Zanima nas

$$\frac{||\delta y||}{||y||} = \frac{||A(x + \delta x) - Ax||}{||Ax||}.$$

Očitno velja $||\delta y|| \leq ||A||||\delta x||$ in $||x|| \leq ||A^{-1}||||y||$. Izračunamo

$$\frac{||\delta y||}{||y||} = \frac{||A||||\delta x||}{||y||||x||}||x|| \leq \frac{||A||||\delta x||||A^{-1}||||y||}{||y||||x||} = \underbrace{||A||||A^{-1}||}_{\mathrm{cond}(A)} \frac{||\delta x||}{||x||}.$$

■

Naloga 5.3 *Izpelji aposteriorno oceno*

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{||r||}{||b||},$$

ki je uporabna za oceno točnosti rešitve.

Rešitev. Naj bo $\widetilde{x}$ rešitev, ki jo dobimo z numeričnim izračunom. Naj bo $\delta x = \widetilde{x} - x$ in $r = A\widetilde{x} - b$. Ocenimo

$$||\widetilde{x} - x|| = ||A^{-1}(A\widetilde{x} - b)|| = ||A^{-1}r|| \leq ||A^{-1}r||$$

in

$$||b|| = ||Ax|| \leq ||A||||x||.$$

Oceni združimo in dobimo željeno.

■

Izrek 5.1 *Naslednji trditvi sta ekvivalentni*

(i). Obstaja enolični razcep $A = LU$, kjer je L spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali, U pa nesingularna zgornje trikotna matrika.

(ii). Vse vodilne podmatrike $A(1 : k, 1 : k)$ so nesingularne.

Algoritem 3: *LU razcep brez pivotiranja*

for $j = 1, \dots, n-1$ **do**
  for $i = 1, \dots, n$ **do**
    $l_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$;
    for $k = j+1, \dots, n$ **do**
      $a_{ik} = a_{ik} - l_{ij}a_{jk}$;
    end
  end
end
Število operacij je $\frac{2}{3}n^2 + O(n^2)$.

Izrek 5.2 *Če je* A *nesingularna, potem obstaja taka permutacijska matrika* P*, da obstaja* LU *razcep* $PA = LU$.

Algoritem 4*: LU razcep z delnim pivotiranja*

$L = 0$;
$P = I$;
for $j = 1, \ldots, n-1$ **do**
  Poišči $|a_{qj}| = \max_{j \le p \le n} |a_{pj}|$;
  Zamenjaj vrstici q *in* j *v* L, A *in* P;
  for $i = j, \ldots, n$ **do**
    $l_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$;
    for $k = j+1, \ldots, n$ **do**
      $a_{ik} = a_{ik} - l_{ij} a_{jk}$;
    end
  end
end
Število operacij je $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.

Naloga 5.4 *Z* LU*-razcepom brez pivotiranja reši sistem* $Ax = b$*, kjer je*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & -11 & 13 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} -11 \\ 38 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Zapiši matriki L, U *in vektor* y*, ki ga dobiš pri računanju.*

Rešitev.
Lotimo se Gaussove eliminacije:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & -11 & 13 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = L.$$

Izračunamo lahko tudi v bolj kompaktni obliki. Zgornji trikotnik končne matrike vsebuje matriko U, spodnji trikotnik brez diagonale pa matriko L brez diagonale. Upoštevamo, da ima matrika L na diagonali enice.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & -11 & 13 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix},$$

zgornji trikotnik je U, spodnji trikotnik brez diagonale je matrika L brez diagonale.
Rešimo sistem $Ax = b$, $L(Ux) = b$, $y = Ux$.

Algoritem 5: Prema substitucija, $Ly = b$, $n^2 - n$ operacij

---

for $i = 1, 2, \ldots, n$ **do**
  $y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k$;
end

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -3 & 1 & \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 38 \\ -16 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} y_1 &= -11 \\ y_2 &= 38 + 3 \cdot (-11) = 5 \\ y_3 &= -16 - 2 \cdot (-11) - 35 = -9 \end{aligned}$$

Algoritem 6: Obratna substitucija, $Ux = y$, n^2 operacij

for $i = n, n-1, \ldots, 1$ **do**
  $x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k\right)$;
end

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_2 &= \tfrac{-1}{2}(5-3) = -1 \\ x_1 &= \tfrac{1}{2}(-11+3+12) = 2 \end{aligned} .$$

Torej dobimo $x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T$. ■

Naloga 5.5 • *Sestavi ekonomičen algoritem za izračun inverzne matrike spodnje trikotne matrike* L *z enicami po diagonali in preštej število operacij.*

- *Prilagodi algoritem iz prve točke, tako da boš lahko izračunal inverz zgornje trikotne matrike* U. *Preštej še število operacij.*
- *S pomočjo prejšnjih dveh točk, sestavi učinkovit algoritem za izračun inverza matrike* A, *če imaš podan njen* LU *razcep. Kakšno je število operacije?*

Rešitev.

- Iz pravila za izračun inverza vidimo, da je inverzna matrika zopet spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali. Rešujemo sistem $LY = I$, Y je oblike $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$. Dobimo več podproblemov oblike

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ * & \ddots & & & \\ l_{j,1} & l_{j,2} \cdots l_{j,j-1} & 1 & & \\ lj+1,1 & l_{j+1,2} \cdots l_{j+1,j} & & \ddots & \\ * & * & * & * & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ y_{j,j} \\ \vdots \\ y_{n,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} = e_j.$$

Vemo, da je $y_{j,j} = 1$. Za $i > j$ dobimo

$$l_{i,j} y_{j,j} + l_{i,j+1} y_{j+1,j} + \cdots l_{i,i-1} y_{i-1,j} + l_{i,i} y_{i,j} = 0,$$

kar nam da $y_{ij} = -\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik} y_{kj}$. Vseh operacij je

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j+1}^{n} 2(i-j) = 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{(n-j)(n-j+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k)$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3}{3} + O(n^2).$$

---

for $j = 1, \ldots, n$ **do**
  $y_{j,j} = 1$;
  for $i = j+1, \ldots, n$ **do**
    $y_{i,j} = -\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik} y_{kj}$;
  end
end

- Uporabimo idejo obratne substitucije in resujemo podobno kot pri prvi tocki.

  Algoritem 7: Obratna substitucija, $Ux = y$

  for $i = n, n-1, \ldots, 1$ **do**
    $x_i = \frac{1}{u_{ii}} (y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k)$;
  end

  Število operacij je spet $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, v resnici imamo samo $O(n^2)$ deljenj več.

---

for $j = 1, \ldots, n$ *($UY_j = e_j$)* **do**
  $y_{jj} = 1/u_{jj}$;
  for $i = j-1, \ldots, 1$ **do**
    $y_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(-\sum_{k=j-1}^{i} u_{ik} y_{kj} \right)$;
  end
end

- Upoštevajmo še, da velja

  $$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}.$$

  Ugotovimo moramo še kakšna je zahtevnost množenja spodnje in zgornje trikotne matrike.

  $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j + (n-i)i = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)/2 + ni - i^2 = \frac{2n^3}{3} + O(n^2).$$

  V resnici bi bilo bolje (bolj stabilno), če bi zadnji dve točki naredli hkrati, tako da bi rešili sistem $UX = L^{-1}$ in direktno izračunali $U^{-1}L^{-1}$. Skupno število operacij ostane $2n^3 + O(n^2)$.

■

Naloga 5.6 *Sestavi učinkovit algoritem za reševanje sistema linearnih enačb*

$$\begin{bmatrix} U & -I \\ B & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Matrika $B = LU$ *je nesingularna matrika in ima podan* LU *razcep. Preštej število množenj in deljenj.*

Rešitev. Zmnožimo po blokih in dobimo

$$\begin{aligned} Ux - y &= a \\ L(Ux + y) &= b. \end{aligned}$$

Rešimo drugi sistem in dobimo vektor $z = Ux + y$, kar nas stane $n^2 + O(n)$ operacij. Označimo še $w = Ux - y$ in izrazimo $y = \frac{1}{2}(z - w) = \frac{1}{2}(z - a)$. Za izračun y porabimo $O(n)$ operacij. Na koncu rešimo še sistem $Ux = a + y$, za kar porabimo $n^2 + O(n)$ operacij. Skupaj smo porabili $2n^2 + O(n)$ operacij. ■

Naloga 5.7 *Za matriko*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

naredi:

(i). LU razcep z delnim pivotiranjem,

(ii). LU razcep s kompletnim pivotiranjem.

Rešitev. (i)Algoritem poteka takole. V stolpcu i poiščemo največji element, izmed a_{ji}, $j \geq i$ po absolutni vrednostni. Vrstico največjega elementa in i-to vrstico zamenjamo v L, A in P. Normalno nadaljujemo z Gaussovo eliminacijo. Na koncu velja $PA = LU$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \underline{6} & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\updownarrow 3} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1/2} & -5/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\updownarrow 3} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 0 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\updownarrow 3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\updownarrow 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightrightarrows \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\updownarrow 3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\updownarrow 3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

(ii)Algoritem poteka takole. V podmatriki $A(i:n, i:n)$ poiščemo največji element po absolutni vrednostni, recimo da je to a_{kl}. Da ta element spravimo na mesto (i,i) zamenjamo i-to vrstico in k-to vrstico ter i-ti stolpec in k-ti stolpec. To naredimo tudi za matriko L. V P menjamo samo vrstice, v Q pa samo stolpce. Normalno nadaljujemo z Gaussovo eliminacijo. Na koncu velja $PAQ = LU$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & \underline{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{1\updownarrow 3, 1\leftrightarrow 3} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \underline{\frac{15}{7}} \end{bmatrix} \xrightarrow{2\updownarrow 3, 2\leftrightarrow 3} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 0 & \frac{15}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 0 & \frac{15}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\updownarrow 3, 1\leftrightarrow 3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\updownarrow 3, 2\leftrightarrow 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & -2/5 & 1 \end{bmatrix} = L$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\rightarrow} \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3}{\rightarrow} \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} = P$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \overset{1\leftrightarrow 3}{\rightarrow} \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix} \overset{2\leftrightarrow 3}{\rightarrow} \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix} = Q$$

■

Naloga 5.8 *Sestavi ekonomičen (čim manj operacij) algoritem za računanje tridiagonalnega sistema preko* LU *razcepa brez pivotiranja.*

Rešitev. Matrika A je oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & b_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix},$$

torej bosta matriki L in U oblike

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \text{ in } U = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & v_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}.$$

Zmnožek L in U je oblike

$$LU = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ l_2u_1 & l_2v_1 + u_2 & v_2 & & \\ & l_3u_2 & l_3v_2 + u_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & v_{n-1} \\ & & & l_nu_{n-1} & l_nv_{n-1} \end{bmatrix},$$

iz česar dobimo $v_i = c_i$, $l_{i+1}u_i = b_{i+1}$ in $l_{i+1}v_i + u_{i+1} = a_i$ za $i = 1, \ldots, n-1$. Poleg tega velja še $u_1 = a_1$.

$u_1 = a_1$;
$v_1 = c_1$;
for $i = 2, \ldots, n$ **do**
  $v_i = c_i$;
  $l_i = \frac{b_i}{u_{i-1}}$;
  $u_i = a_i - v_{i-1}l_i$;
end

Število operacij je $\sum_{i=2}^{n} 3 = 3(n-1) = 3n - 3$, kar je veliko bolje kot $2/3n^2 + O(n^2)$. Iz

$L(Ux) = d$, $y = Ux$ dobimo $Ly = d$, kar je

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

To da $y_1 = d_1$ in $y_{i-1}l_i + y_i = d_i$. Dobimo algoritem

---

$y_1 = d_1$;
for $i = 2, \ldots, n$ **do**
  $y_i = d_i - y_{i-1}l_i$;
end

Število operacij $\sum_{i=2}^{n} 2 = 2n - 2$. Podobno za $Ux = y$ dobimo

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & v_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Dobimo $u_i x_i + v_i x_{i+1} = y_i$ ter $u_n x_n = y_n$.
Za to porabimo $1 + \sum_{i=1}^{n-1} = 3(n-1) + 1 = 3n - 2$ operacij. Vse skupaj porabimo $3n - 3 + 2n -$

$x_n = \frac{y_n}{u_n}$;
for $i = n-1, \ldots, 1$ **do**
  $x_i = \frac{y_i - v_i x_{i+1}}{u_i}$;
end

$2 + 3n - 2 = 8n - 7$ operacij. Ali lahko kaj podobnega naredimo tudi z delnim pivotiranjem? ■

Naloga 5.9 *Dana je nesingularna matrika* A *in vektorja* x *in* b_1*, da velja* $Ax = b_1$ *ter njen LU razcep. Zapiši algoritem za reševanje sistema* $Bx = b$*, kjer je*

$$B = \begin{bmatrix} A & u \\ v^T & \alpha \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \text{in} x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

kjer je $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Koliko operacij porabiš za reševanje razširjenega sistema?*

Rešitev. Zmnožimo sistem po blokih,

$$\begin{bmatrix} A & u \\ v^T & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 + ux_2 \\ v^T x_1 + \alpha x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Iz prve enačbe dobimo $Ax_1 + ux_2 = b_1$, oziroma $x_1 + yx_2 = x$, kjer je y rešitev sistema $Ay = u$. Za reševanje sistem porabimo $2n^2 + O(n)$ operacij. Drugo enačba je $v^T x_1 + \alpha x_2 = b_2$. Prvo enačbo pomnožimo z v^T in dobimo $v^T x_1 + v^T y x_2 = v^T x$, le to odštejemo od druge enačbe in dobimo $x_2(\alpha - v^T y) = b_2 - v^T x$. Od tukaj izrazimo $x_2 = (b_2 - v^T x)/(\alpha - v^T y)$. Za izračun $v^T x$ in $v^T y$ porabimo $4n - 2$ operacij, dodati moramo še dve odštevanji in eno deljenje, skupaj dobimo $4n - 1$ operacij. Nato iz prve enačbe izrazimo še $x_1 = x - y x_2$, za kar porabimo $2n$ operacij. Vse skupaj smo porabili $2n^2 + 6n - 1 = 2n^2 + O(n)$ operacij.

■

Naloga 5.10 *Poišči razcep Choleskega za matriko*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & -2 & 8 \\ -2 & -2 & 14 & -11 \\ 3 & 8 & -11 & 15 \end{bmatrix}.$$

Kaj to pomeni za matriko A?

Rešitev.

Algoritem 8: Razcep Choleskega – $A = V \cdot V^T$, $V = ?$

for $k = 1, \ldots, n$ **do**
  $v_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ki}^2}$;
  for $j = k+1, \ldots, n$ **do**
    $v_{jk} = \frac{1}{v_{kk}} \left(a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ji} \cdot v_{ki} \right)$;
  end
end

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & -2 & 8 \\ -2 & -2 & 14 & -11 \\ 3 & 8 & -11 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sqrt{1} = 1 \\ 2/1 \\ -2/1 \\ 3/1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{8 - 2^2} = 2 \\ -2 & 1/2(-2 - (-2 \cdot 2)) \\ 3 & 1/2(8 - (3 \cdot 2)) \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & \sqrt{14 - (-2)^2 - 1^2} = 3 \\ 3 & 1 & 1/3(-11 - (3 \cdot -2 + 1 \cdot 1)) \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & \sqrt{15 - (3^2 + 1^2 + (-2)^2)} = 3 \end{bmatrix} = V.$$

Matrika A je simetrična in pozitivno definitna, saj se je razcep Choleskega izvedel. ■

Poglavje 6

Problemi najmanjših kvadratov, predoločeni sistemi

Radi bi rešili sistem $Ax = b$, kjer je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrika polnega ranga, $x \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}$ ter $m \geq n$. Sistem v splošnem ni rešljiv, zato minimiziramo normo ostanka $\|Ax - b\|_2$. Izkaže se, da je tak x ravno rešitev **normalnega sistema** $A^T Ax = A^T b$.

Naloga 6.1 *Merili smo tir delca, ki naj bi se gibal po paraboli.*

i	x_i	$f(x_i)$
1	-1	$\frac{11}{4}$
2	0	$\frac{7}{4}$
3	1	$\frac{1}{4}$
4	2	$\frac{13}{4}$

V bližini teh točk bi radi potegnili parabolo. Določi njene koeficiente po metodi najmanjših kvadratov. Uporabi normalni sistem in ga reši z Gaussovo eliminacijo (po metodi Choleskega).

Rešitev. Parabola naj bo $a + bx + cx^2$. Dobimo

$$\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & c & = & \frac{11}{4} \\ a & + & 0b & + & 0c & = & \frac{7}{4} \\ a & + & b & + & c & = & \frac{1}{4} \\ a & + & 2b & + & 4c & = & \frac{13}{4} \end{array} \qquad \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}^{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{13}{4} \end{bmatrix}}^{z},$$

kar je predoločen sistem $Ax = z$. Iz tega dobimo normalni sistem $\overbrace{A^T A}^{B} x = A^T z = v$. Izračunamo

$$B = A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \text{ in } v = A^T z = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Gaussovo eleminacijo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 18 & 16 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & -10 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & -6 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & -10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

Lahko uporabimo razcep Choleskega. Najprej izračunamo razcep Choleskega matrike $B = VV^T$ in dobimo

$$V = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & \sqrt{5} & \\ 3 & \sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}.$$

Dobimo sistem $V\overbrace{(V^T x)}^{y} = z$. Iz

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & \sqrt{5} & \\ 3 & \sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{ccccccc} 2y_1 & + & 0y_2 & + & 0y_3 & = & 8 \\ y_1 & + & \sqrt{5}y_2 & + & 0y_3 & = & 4 \\ 3y_1 & + & \sqrt{5}y_2 & + & 2y_3 & = & 16 \end{array}, \text{ dobimo } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Rešiti moramo še sistem $V^T x = y$, kar je

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem in dobimo $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$. Parabola je $1 - x + x^2$. ■

Naloga 6.2 *Podjetje ima na voljo podatke*

Območje	*Prodaja (y_i)*	*Populacija (a_i)*	*Zaslužek na prebivalca (b_i)*
1	*162*	*274*	*850*
2	*120*	*180*	*1120*
3	*223*	*375*	*740*
4	*131*	*205*	*970*
5	*67*	*86*	*1032*

Za napovedovanje prodaje uporabljajo model $y_i = x_i + a_i x_2 + b_i x_3$, *kjer so* x_1, x_2, x_3, *ki jih izračunajo po metodi najmanjših kvadratov. Določi* x_1, x_2, x_3, *in napovej prodajo na območju z populacijo* $a = 60$ *in zaslužkom* $b = 1050$. *Nalogo reši v Matlabu.*

Rešitev. Sistem modelnih enačb prepišemo v matrično obliko

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \\ 1 & a_4 & b_4 \\ 1 & a_5 & b_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}.$$

Za rešitev v Matlabu glej priloženo datoteko `prodaja.m` ■

Izrek 6.1 *Naj bo* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *kjer je* $m \geq n$ *in* $\mathrm{rang}(A) = n$. *Potem obstaja enolični* QR *razcep* $A = QR$, *kjer je* Q *pravokotna matrika dimenzije* $m \times n$ *z ortogonalnimi stolpci,* R *pa zgornje trikotna matrika s pozitivnimi diagonalnimi elementi.*

Pri reševanju predoločenega sistema si lahko pomagamo s QR razcepom. Boljša je različica z MGS. Dobimo, da moramo rešiti sistem $Rx = Q^T b$. Boljše je narediti razširjen QR razcep:

$$Ax - b = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & q_{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & z \\ 0 & \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix} = Q(Rx - z) - \rho q_{n+1}.$$

Iz česar dobimo, da moramo rešiti sistem $Rx = z$, maksimum pa je enak ρ.

for $k = 1, \dots, n$ **do**
  $q_k = a_k$;
  for $i = 1, \dots, k-1$ **do**
    $r_{ik} = q_i^T a_k (CGS)$ ali $r_{ik} = q_i^T q_k (MGS)$;
    $q_k = q_k - r_{ik} q_i$;
  end
  $r_{kk} = \|q_k\|_2$;
  $q_k = \frac{q_k}{r_{kk}}$;
end

Naloga 6.3 *Poišči normalni sistem za reševanje naslednjih dveh problemov najmanjših kvadratov, kjer je* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ *in* $\text{rang}(A) = n$.

(i). Uteženi problem najmanjših kvadratov. Iščemo

$$\min_x \|D(Ax - b)\|_2,$$

kjer je D *nesingularna diagonalna.*

(ii). Iščemo

$$\min_x \|Ax - b\|_C,$$

kjer je C *simetrična pozitivno definitna, ki generira normo*

$$\|x\|_C = (x^T C x)^{\frac{1}{2}}.$$

Rešitev. (i)
Izračunajmo

$$\min_x \|D(Ax - b)\| = \min_x \|DAx - Db\|,$$

matrika $F = DA$ je spet dimenzije $m \times n$. Označimo še $Db = \widehat{b}$, tako dobimo predoločen sistem $Fx = \widehat{b}$, iz česar dobimo

$$F^T F x = (DA)^T (DA) x = F^T \widehat{b} = (DA)^T (Db).$$

Razpisano je to enako

$$A^T D^2 A x = A^T D^2 b.$$

(ii)
Matrika C je simetrična pozitivno definitna, zato zanjo obstaja razcep Choleskega $C = V^T V$, kjer V zgornje trikotna. Izračunajmo

$$\min_x \|Ax - b\|_C = \min_x \left((Ax - b)^T C (Ax - b)\right)^{\frac{1}{2}} = \min_x \left((Ax - b)^T V^T \overbrace{V(Ax - b)}^{y} \right)^{\frac{1}{2}},$$

uvedemo novo neznanko $y = U(Ax - b)$, dobimo

$$\min_x (y^T y)^{\frac{1}{2}} = \min_x < y, y >^{\frac{1}{2}} = \min_x \|y\|_2 = \min_x \|V(Ax - b)\|_2.$$

Torej iščemo

$$\min_x \|VAx - Vb\|_2,$$

to je predoločen sistem

$$VAx = Vb \quad /(VA)^T,$$

kar da

$$A^T V^T VAx = A^T V^T Vb.$$

Z upoštevanjem $C = V^T V$ dobimo

$$A^T CAx = A^T Cb.$$

■

Givensova rotacija R_{ik} je matrika enaka identiteti povsod razen v i-ti in k-ti vrstici in preslika i-to in k-to komponento vektorja x v vektorja y, ki ima k-to komponento enako 0.

$$R_{ik}^T([i,k],[i,k]) = \begin{bmatrix} \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_k^2}} & \frac{x_k}{\sqrt{x_i^2+x_k^2}} \\ -\frac{x_k}{\sqrt{x_i^2+x_k^2}} & \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_k^2}} \end{bmatrix}.$$

Householderjevo zrcaljenje je matrika oblike $H = I - \frac{2}{w^T w} w w^T$ in predstavlja zrcaljenje prek ravnine določene z normalo w. Če hočemo preslikati vektor x v $\pm k e_1$, lahko to naredimo s Householderjevim zrcaljenjem določenim z $w = x + \text{sign}(x_1)\|x\|_2 e_1$.

Naloga 6.4 *Izračunaj* QR *razcep matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

na različne načine:

- *s pomočjo MGS,*
- *s pomočjo Givensovih rotacij,*
- *s pomočjo Householderjevih zrcaljenj.*

Rešitev.

- Najprej normiramo prvi stolpec A, $\|a_1\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$. Torej je

$$q_1 = a_1/\|a_1\| = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

in $r_{11} = \|a_1\| = \sqrt{6}$. V drugem koraku ortogonaliziramo drugi stolpec A a_2 glede na q_1. Izračunamo $a_2 = a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1$. Velja $\langle q_1, a_2 \rangle = \frac{3}{\sqrt{6}}$. Tako dobimo $a_2 = \begin{bmatrix} -5/2 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}^T$ in $r_{12} = \frac{3}{\sqrt{6}}$. Izračunamo $q_2 = a_2/\|a_2\| = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$ in $r_{22} = \|a_2\| = 5/\sqrt{2}$. Na koncu izračunamo še $a_3 = a_3 - \langle q_1, a_3 \rangle q_1 - \langle q_2, a_3 \rangle q_2$. Dobimo $r_{13} = \langle q_1, a_3 \rangle = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$, $r_{23} = \langle q_2, a_3 \rangle = 0$, $r_{33} = \|a_3\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^T$.

- S pomočjo Givensove rotacije

$$R_{12}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uničimo 2. element v prvem stolpcu:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 3/\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Z Givensovo rotacijo

$$R_{13}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{5/6} & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 0 & \sqrt{5/6} \end{bmatrix}$$

uničimo 3. element v dobljeni matriki. Dobimo

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5/6} & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 0 & \sqrt{5/6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 3/\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} + 1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{15/2} & -\sqrt{3/10} + \sqrt{5/6} \end{bmatrix}.$$

Uporabimo še rotacijo

$$R_{23}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2/5} & \sqrt{3/5} \\ 0 & -\sqrt{3/5} & \sqrt{2/5} \end{bmatrix}$$

in dobimo isto matriko kot pri MGS, matrika $Q = R_{12}R_{13}R_{23}$.

■

Naloga 6.5 *S Householderjevimi zrcaljenji in* QR *razcepom reši linearni sistem*

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 6x_2 & + & -2x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & -2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 6 \end{array}.$$

Rešitev. Najprej transformiramo prvi stolpec

$$w = \begin{bmatrix} 1 + 1 \cdot (3 = \|A_1\|_2) \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \; w^T w = 24, \; P_1 = I - \frac{1}{12} w w^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$P_1 \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & -7 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo P_2:

$$k = \| \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} \| = 5, \; w_1 = \begin{bmatrix} -4 - 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -3 \end{bmatrix}, \; w_1^T w_1 = 90,$$

$$P_2 = I - \frac{1}{45} w_1 w_1^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} \\ 0 & \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Iz česar dobimo $x_3 = 1$, $x_2 = \frac{-7+2}{5} = -1$, $x_1 = \frac{-1+2-4}{-3} = 1$. ■

Naloga 6.6 *Naj bo* A *zgornja Hessenbergova matrika* ($a_{ik} = 0,\ i > k+1$). *Zapiši algoritem za* QR *razcep s pomočjo Givensovih rotacij in z njegovo pomočjo reši sistem* $Ax = b$. *Poleg tega še preštej število operacij (korenjenja, seštevanja, množenja). Matrike* Q *ti ni potrebno izračunati. Kakšna je oblika matrike* Q?

Rešitev. Givensova rotacija R_{ik} spremeni samo i-to in k-to vrstico. Poglejmo si primer, ko je matrika dimenzije 4:

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \end{bmatrix} \overset{R_{12}^T}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \end{bmatrix} \overset{R_{23}^T}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \\ & & \times & \times \end{bmatrix} \overset{R_{34}^T}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \\ & & & \times \end{bmatrix}$$

---

for $i = 1, \ldots, n-1$ **do**

  $r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{i+1,i}^2}$ -|- $n-1\ \surd,\ 2n-2\ *,\ n-1\ +$;

  $c = \frac{a_{ii}}{r}$ -|- $n-1\ *$;

  $s = \frac{a_{i+1,i}}{r}$ -|- $n-1\ *$;

  $a_{ii} = r$;

  $z_1 = b_i$;

  $z_2 = b_{i+1}$;

  $b_i = cz_1 + sz_2$ -|- $2n-2\ *,\ n-1\ +$;

  $b_{i+1} = -sz_1 + cz_2$ -|- $2n-2\ *,\ n-1\ +$;

  for $k = i+1, \ldots, n-1$ **do**

    $aik = a_{ik}$;

    $a_{ik} = ca_{ik} + sa_{i+1,k}$ -|- $2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i-1)\ *,\ \sum_{i=1}^{n-1}(n-i-1)\ +$;

    $a_{i+1,k} = -s \cdot aik + ca_{i+1,k}$ -|- $2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i-1)\ *,\ \sum_{i=1}^{n-1}(n-i-1)\ +$;

  end

end

Reši zgornje trikotni sistem $Rx = b$.

Vsota je enaka

$$6\sum_{i=1}^{n-1}(n-i-1) + 12(n-1) = 6\sum_{k=1}^{n-2} k + 12(n-1) = 6\frac{(n-2)(n-1)}{2} + 12(n-1) = 3n^2 + 3n - 6.$$

Matrika Q je zgornja Hessenbergova. ■

Naloga 6.7 *Naj bo* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ *in* $\mathrm{rang}(A) = n$. *Podana je še matrika* $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $p \leq n$, $\mathrm{rang}(C) = p$. *Zapiši algoritem za reševanje predoločenega sistema* $Ax = b$, *pri pogoju* $Cx = d$.

Rešitev. Iščemo $\min_{Cx=d} \|Ax-b\|_2$, poglejmo si oblike matrik. Pomagajmo si z razširjenim $Q \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ razcepom matrike C^T. Rešujemo problem

$$\min_{Cx=d} \|Ax-b\|_2 = \min_{CQQ^Tx=d} \|AQQ^Tx-b\|_2.$$

Izračunajmo $CQ = (C^T)^TQ = (QR)^TQ = R^TQ^TQ = R^T = \begin{bmatrix} R_1^T & 0 \end{bmatrix}$, uvedemo še nove neznanke $Q^Tx = \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ in $AQ = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \end{array}$. Nadaljujemo z

$$\min_{\begin{bmatrix} R_1^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}=d} \| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - b\|_2 = \min_{R_1^Ty=d} \|A_1y + A_2z - b\|_2.$$

Z $R^Ty = d$ je y enolično določen. Torej nam

$$\min_{R_1^Ty=d} \|A_2z - (b - \overbrace{A_1y}^{\text{znano}})\|_2$$

predstavlja predoločeni sistem $A_2z = b - A_1y$.

$C^T = QR$;
$R_1^Ty = d$ (rešimo sistem, dobimo y);
$AQ = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \end{array}$;
$\min_z \|A_2z - (b - A_1y)\|_2$ (rešimo predoločen sistem, dobimo z) ;
$x = Q \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$;

■