NUMERIČNE METODE 1, praktična matematika

Naloge za utrjevanje znanja

Reševanje nelinearnih enačb

1. Iščemo rešitev enačbe $f(x) = x^5 - 10x + 1$.

   (a) Dokažite, da leži ena ničla na intervalu [0.0.2].

   (b) Izpeljite iteracijsko funkcijo $g(x) = \frac{x^5+1}{10}$.

   (c) Določite začetne približke, pri katerih bo iteracija konvergirala k fiksni točki oziroma k rešitvi enačbe.

   (d) Z začetnim $x_0 = 0$ izračunajte x_1 in x_2. Ocenite napako drugega približka.

   REŠITEV:

   - Ker je funkcija zvezna in ker velja $f(0) \cdot f(0.2) < 0$, ima na danem intervalu vsaj eno ničlo.
   - Iteracija konvergira za $x_0 \in \left(-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}\right)$
   - Približki: $x_0 = 0,\ x_1 = 0.1,\ x_2 = 0.100001, \ldots$
   - Napaka približka: $|x_2 - \alpha| \sim 8 \cdot 10^{-10}$

2. Dana je iteracija

$$x_{r+1} = x_r \left(3 - 3ax_r + a^2x_r^2\right), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

   (a) Izračunajte vse fiksne točke. Katere so privlačne in katere odbojne?

   (b) V okolici privlačnih fiksnih točk določite red konvergence.

   (c) Določite interval začetnih približkov, pri katerih bo iteracija konvergirala proti privlačni fiksni točki.

   (d) Preizkusite na primeru $a = 5$, $x_0 = 0.1$.

   REŠITEV:

   - Fiksne točke: $\alpha = 0$ (odbojna), $\alpha = \frac{2}{a}$ (odbojna), $\alpha = \frac{1}{a}$ (privlačna)
   - Kubična konvergenca
   - Iteracija konvergira za $3 - \sqrt{3} < 3\,a\,x_0 < 3 + \sqrt{3}$

3. Dana je iteracijska funkcija

$$g(x) = x(2 - ax), \quad a > 0.$$

(a) Izračunajte vse fiksne točke. Katere so privlačne in katere odbojne?
(b) V okolici privlačnih fiksnih točk določite red konvergence.
(c) Natančno določite interval začetnih približkov, da bo iteracija konvergirala proti privlačni fiksni točki. Isto nalogo rešite še z uporabo odvodov.

REŠITEV:

- Fiksne točke: $\alpha = 0$ (odbojna), $\alpha = \frac{1}{a}$ (privlačna)
- Kvadratična konvergenca
- Iteracija konvergira za $x_0 \in \left(0, \frac{2}{a}\right)$. S pomočjo odvodov dobimo interval konvergence $x_0 \in \left(\frac{1}{2a}, \frac{3}{2a}\right)$

4. Kvadratni koren pozitivnega števila a lahko računamo iterativno z

$$x_{r+1} = x_r \frac{x_r^2 + 3a}{3x_r^2 + a}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Preverite, da je $\sqrt{a}$ fiksna točka.
(b) Določite red konvergence v bližini te fiksne točke.
(c) Pokažite, da je metoda konvergentna za poljuben $x_0 > 0$.

REŠITEV:
Kubična konvergenca

5. Dana je iteracijska funkcija

$$g(x) = ax(1 - x), \quad 1 < a < 4.$$

(a) Izračunajte vse fiksne točke. V odvisnosti od parametra a določite, katere točke so privlačne in katere odbojne?
(b) Določite red konvergence.
(c) Določite interval začetnih približkov, pri katerih bo iteracija konvergirala proti privlačni fiksni točki.
(d) Dokažite, da za $3 < a < 4$ funkcija g preslika inteval $(0, 1)$ v interval $(0, 1)$. Zaporedje x_r nima limite, ampak stekališča.

REŠITEV:

- Fiksne točke: $\alpha = 0$, privlačna za $-1 < a < 1$, odbojna za $1 < a < 4$
  $\alpha = 1 - \frac{1}{a}$, privlačna za $1 < a < 3$, sicer odbojna
- Linearna konvergenca
- Iteracija konvergira za $x_0 \in \left(\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{a}), \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{a})\right)$.

6. Dana je iteracija

$$x_{r+1} = \frac{1}{2}\left(x_r + \frac{4}{x_r}\right), \quad r = 0, 1, \ldots$$

   (a) Izračunajte vse fiksne točke in določite katere točke so privlačne in katere odbojne?
   (b) Določite red konvergence v okolici privlačnih fiksnih točk.
   (c) Določite interval začetnih približkov, pri katerih iteracija konvergira proti privlačni fiksni točki.

REŠITEV:

- Fiksne točke: $\alpha = -2$ (privlačna), $\alpha = 2$ (privlačna)
- Kvadratična konvergenca
- Iteracija konvergira za $|x_0| > \sqrt{2}$

7. Enačbo $x^3 - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$ rešujemo z iteracijo

$$x_{r+1} = \alpha x_r + \beta x_r^{-2}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Določite parametra α in β, da bo red konvergence v okoliči resitve $\sqrt[3]{a}$ vsaj kvadratičen. Kakšen je točno red konvergence? Z iteracijo, ki jo dobite, izračunajte $\sqrt[3]{10}$ z začetnim $x_0 = 2.5$ na pet decimalk natančno.

REŠITEV:
$\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{a}{3}$, kvadratična konvergenca

8. V iteracijski formuli

$$x_{r+1} = \frac{A^2}{x_r^5}\left(\alpha + \beta\frac{x_r^3}{A} + \gamma\frac{x_r^6}{A^2}\right), \quad r = 0, 1, \ldots$$

za računanje $\sqrt[3]{A}$ določite neznane parametre α, β, γ tako, da bo konvergenca v okolici rešitve vsaj kubična.

REŠITEV:
$\alpha = -\frac{1}{9}, \beta = \gamma = \frac{5}{9}$

9. Iščemo ničle funkcije $f(x) = x + 4 - e^{x^2}$. Preverite, da ima funkcija f vsaj eno ničlo na intervalu $[-2, -1]$ in na $[1, 2]$. Predlagajte iteracijske funkcije za izračun teh dveh ničel.

   REŠITEV: Uporabite lahko iteracijski funkciji

   $$g_1(x) = -\sqrt{\log(x+4)}, \quad g_2(x) = \sqrt{\log(x+4)}.$$

   Lahko pa tangentno metodo $g(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2-1)+4}{2e^{x^2}x-1}$.

10. Rešujemo enačbo $f(x) = x^2 + \log x = 0$.

    (a) Dokažite, da ima enačba natanko eno rešitev.

    (b) Dokažite, da rešitev leži na intervalu $(0, 1)$.

    (c) Raziščite konvergenco zaporedja približkov iteracijskih funkcij:

    $$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{-\log x}, \\ g(x) &= e^{-x^2}, \\ g(x) &= \frac{1}{2}\left(x + e^{-x^2}\right). \end{aligned}$$

    (d) Izpeljite tangentno metodo. Kakšen je red konvergence?

    REŠITEV:

    - Narišite graf funkcij x^2 in $-\log x$. Iz grafa se vidi, da je eno samo presečišče.
    - Ker je funkcija zvezna in ker velja $f(0) \cdot f(1) < 0$, je ničla na intervalu $(0, 1)$.
    - ne konvergira; konvergira (linearna konvergenca - zelo počasna); konvergira (linearna konvergenca - hitrejša od prejšnje)
    - Tangentna metoda: $\frac{x^3+x-x\log(x)}{2x^2+1}$, kvadratična konvergenca

11. Določite red konvergence iteracije

    $$x_{r+1} = \frac{x_r(1+x_r)}{1+2x_r+\log x_r}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

    za reševanje enačbe $e^x - \frac{1}{x} = 0$.

    REŠITEV: Kvadratičen red konvergence.

12. Izpeljite tangentno metodo za reševanje naslednjih enačb:

$$
\begin{aligned}
&x^5 - 10x + 1 = 0, \\
&\sin x = 2(1 - x^2), \\
&\cos x + 4x = 0, \\
&xe^{x^2} = 2
\end{aligned}
$$

REŠITEV:

$$
\begin{aligned}
x_{r+1} &= \frac{1 - 4x_r^5}{10 - 5x_r^4}, \quad r = 0, 1, \ldots \\
x_{r+1} &= \frac{2x_r^2 - \sin(x_r) + x_r \cos(x_r) + 2}{4x_r + \cos(x_r)}, \quad r = 0, 1, \ldots \\
x_{r+1} &= \frac{x_r \sin(x_r) + \cos(x_r)}{\sin(x_r) - 4}, \quad r = 0, 1, \ldots \\
x_{r+1} &= \frac{2\left(x_r^3 + e^{-x_r^2}\right)}{2x_r^2 + 1}, \quad r = 0, 1, \ldots .
\end{aligned}
$$

13. Določite vse polinome stopnje štiri z vodilnim koeficientom 1, pri katerih se tangentna metoda obnaša takole:

   - v bližini α ima linearno konvergenco;
   - v bližini $-\alpha$ ima kubično konvergenco.

   Določite še ostale ničle in red konvergence v njihovi bližini.

   REŠITEV:
   $p(x) = (x - \alpha)^2(x + \alpha)(x + 2\alpha)$

14. Naj bo α m-kratna ničla funkcije f. Izračunajte

$$\lim_{x \to \alpha} g'(x),$$

   kjer je g iteracijska funkcija za tangentno metodo: $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Kaj lahko poveste o redu konvergence.

   REŠITEV:
   $\lim_{x \to \alpha} g'(x) = 1 - \frac{1}{m}$. Linearna konvergenca. Večji kot je m, bolj blizu 1 je odvod $g'(\alpha)$ in zato je konvergenca počasnejša.

15. Izračunajte vsaj eno ciklično točko tangentne metode za enačbo $\sin x = 0$.

16. Določite red konvergence tangentne metode za iskanje ničel polinoma

$$p(x) = x^3 - ax^2 - a^2x + a^3, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

v bližini ničel.

REŠITEV:
Ničle: $\alpha = a$ (dvakratna ničla, linearna konvergenca), $\alpha = -a$ (kvadratična konvergenca)

17. Poiščite vsa presečišča funkcij

$$y = x + 4, \quad y = e^{x^2}.$$

(a) Skicirajte grafa.
(b) Uporabite tangentno metodo. Kakšen je red konvergence?
(c) Predlagajte še kakšno iteracijsko funkcijo za izračun ničel.

18. Z operacijami $+, -, *$ izračunajte $\frac{1}{a}$ za $a > 0$. Izberite f tako, da bo $\frac{1}{a}$ ničla in uporabite tangentno metodo. Določite red konvergence, ocene napake. Kje lahko vzamemo začetne približke.

19. Zapišite pridruženo matriko polinoma

$$p(x) = 2x^5 - 3x^3 + 4x - 1.$$

20. Zapišite pridruženo matriko polinoma

$$p(x) = -3x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 1$$

21. Izračunajte Sturmovo zaporedje za polinom

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 1.$$

Določite število različnih ničel ničel na intervalu $(0, 1)$ ter na intervalu $(0, 5)$.

REŠITEV:
Sturmovo zaporedje:

$$\left\{ x^3 - 5x^2 + 1, 3x^2 - 10x, \frac{50x}{9} - 1, \frac{4257}{2500} \right\}$$

Na intervalu $(0, 1)$ je ena enostavna ničla, na intervalu $(0, 5)$ pa dve.

22. Izračunajte Sturmovo zaporedje za polinom

$$p(x) = x^3 + 2x - 4.$$

Določite število različnih ničel ničel na intervalu $(-1, 0)$ ter na intervalu $(0, 2)$.

REŠITEV:
Sturmovo zaporedje:

$$\left\{ x^3 + 2x - 4, 3x^2 + 2, 4 - \frac{4x}{3}, -29 \right\}$$

Na intervalu $(-1, 0)$ ni enostavne ničle, na intervalu $(0, 2)$ je ena enostavna ničla.