NUMERIČNE METODE 1, praktična matematika

Naloge za utrjevanje znanja

Reševanje linearnih sistemov enačb

1. Za vektor $x = (5, -4, 2, -1)^T$ izračunajte $\|x\|_2, \|x\|_1, \|x\|_\infty, \|x\|_3$.

   REŠITEV:

$$\|x\|_2 = \sqrt{46}, \quad \|x\|_1 = 12, \quad \|x\|_\infty = 5, \quad \|x\|_3 = \sqrt[3]{198}.$$

2. Za vektor $x = (-1, 5, -2, 0, 8)^T$ izračunajte $\|x\|_2, \|x\|_1, \|x\|_\infty$.

   REŠITEV:

$$\|x\|_2 = \sqrt{94}, \quad \|x\|_1 = 16, \quad \|x\|_\infty = 8.$$

3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

   Izračunajte $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_F$.

   REŠITEV:

$$\|A\|_1 = 11, \quad \|A\|_\infty = 7, \quad \|A\|_F = \sqrt{60}.$$

4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Izračunajte $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_F$.

   REŠITEV:

$$\|A\|_1 = 8, \quad \|A\|_\infty = 11, \quad \|A\|_F = \sqrt{92}.$$

5. Dokažite, da
$$N_\infty(A) := \max_{i,j} |a_{i,j}|$$
ni matrična norma.

6. Naj bo $x \in \mathbb{R}^n$ in $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   (a) Izpeljite oceno
   $$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\, \|x\|_\infty.$$
   (b) S pomočjo zgornje ocene dokažite, da velja
   $$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_\infty.$$
   (c) Izpeljite še oceno
   $$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1.$$

7. Dokažite, da velja ocena
$$N_\infty(A) \le \|A\|_2 \le n\, N_\infty(A).$$

8. (a) Dokažite, da za vsako matrično normo $\|\cdot\|_m$ obstaja vektorska norma $\|\cdot\|_v$, ki je z njo usklajena.
   (b) Dokažite, da za vsako lastno vrednost $\lambda(A)$ matrike A in poljubno matrično normo $\|\cdot\|_m$ velja
   $$|\lambda(A)| \le \|A\|_m.$$
   (c) Dokažite, da velja ocena
   $$\|A\|_2^2 \le \|A\|_1\, \|A\|_\infty.$$

9. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika z elementi $a_{i,j}$:
$$\begin{aligned} &a_{i,i} = -2i, \quad i = 1, 2, \dots n, \\ &a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = n - i, \quad i = 1, 2, \dots n-1, \\ &a_{i,k} = 0, \quad |i-k| > 1. \end{aligned}$$
Izračunajte $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_F$ ter čimbolj natančno ocenite $\|A\|_2$.

10. Izračunajte $\|I\|_1, \|I\|_2, \|I\|_\infty, \|I\|_F$, kjer je $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ identiteta.

11. (a) Dokažite, da za poljubno matrično normo velja $\|I\| \ge 1$, kjer je $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ identiteta.
   (b) Dokažite, da je za poljubno operatorsko normo $\|I\| = 1$.
   (c) Dokažite, da je $\|A^{-1}\| \ge \dfrac{1}{\|A\|}$ za poljubno nesingularno matriko A.

(d) Dokažite: če je $\|A\| < 1$, potem je $I + A$ nesingularna matrika in velja

$$\|(I+A)^{-1}\| \le \frac{\|I\|}{\|I\| - \|A\|}.$$

12. (a) Izpeljite neenakost $\|AB\|_F \le \|A\|_2 \|B\|_F$.
    (b) Izpeljite neenakost $\|ABC\|_F \le \|A\|_F \|B\|_2 \|C\|_F$.

13. Podana sta vektorja $x, y \in \mathbb{R}^n$. Naj bo $A = xy^T$. Dokažite, da velja

$$\|A\|_F = \|A\|_2 = \|x\|_2 \|y\|_2.$$

14. Podana je matrika A in vektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 11 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 7 \\ 9 & 17 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte LU razcep matrike A brez pivotiranja in rešite sistem $Ax = b$.

REŠITEV:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

15. Podana je matrika A in vektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 9 & 8 \\ -9 & -14 & 1 & 13 & 6 \\ 15 & 29 & 7 & 11 & 21 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 23 \\ -25 \\ 77 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte LU razcep matrike A brez pivotiranja in rešite sistem $Ax = b$.

REŠITEV:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

16. Z LU razcepom z delnim pivotiranjem rešite linearen sistem $Ax = b$ za

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 & 12 \\ 12 & 4 & 8 & 0 \\ 6 & 6 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 9 & 18 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -16 \\ -4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

REŠITEV:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

17. Z LU razcepom z delnim pivotiranjem rešite linearen sistem $Ax = b$ za

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 & 0 & 12 \\ 18 & 3 & 9 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 13 & -3 & 13 \\ 18 & 3 & 0 & 0 & 18 \\ 18 & 5 & 19 & -3 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -12 \\ 10 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte še determinanto matrike A.

REŠITEV:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 18 & 3 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & -18 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

18. Sestavite učinkovit algoritem za reševanje sistema linearnih enačb

$$\begin{pmatrix} U & -I \\ B & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

kjer je B nesingularna matrika reda n z LU razcepom $B = LU$. Preštejte število operacij.

19. Kako bi preko LU razcepa matrike A izračunali njen inverz?

20. Reševanje kompleksnega linearnega sistema prevedite na reševanje realnega linearnega sistema.

21. Dana je nesingularna matrika A ter njen inverz A^{-1}. Kako bi učinkovito izračunali inverz B^{-1} razširjene matrike

$$B = \begin{pmatrix} A & u \\ v^T & \alpha \end{pmatrix},$$

kjer sta $u, v \in \mathbb{R}^n$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Koliko operacij je potrebnih za izračun?

22. Izračunajte razcep Choleskega za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 & 2 & 4 \\ 6 & 25 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 9 & 28 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

REŠITEV:

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

23. Izračunajte razcep Choleskega za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 15 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 \\ 15 & 7 & 35 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 14 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

ter rešite sistem $Ax = b$ za $b = \begin{pmatrix} -3 & -13 & -20 & -4 & 8 \end{pmatrix}^T$.

REŠITEV:

$$V = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

24. Izračunajte razcep Choleskega za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 2 & 15 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

ter rešite sistem $Ax = b$ za $b = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -2 & -10 & -1 \end{pmatrix}^T$.

REŠITEV:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

25. Ali je matrika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 12 & 16 & 2 \\ 3 & 12 & 27 & 36 & 6 \\ 4 & 16 & 36 & 64 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

simetrično pozitivno definitna?

REŠITEV: Da. Obstaja razcep Choleskega.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

26. Ali je matrika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

simetrično pozitivno definitna?

REŠITEV: Ne. Razcep Choleskega se ne izvede.

27. Zapišite algoritem za LU razcep brez pivotiranja za tridiagonalno matriko A.