

NUMERIČNE METODE 1, praktična matematika

Naloge za utrjevanje znanja

Reševanje nelinearnih enačb

1. Iščemo rešitev enačbe $f(x) = x^5 - 10x + 1$.

- (a) Dokažite, da leži ena ničla na intervalu $[0, 0.2]$.
- (b) Izpeljite iteracijsko funkcijo $g(x) = \frac{x^5 + 1}{10}$.
- (c) Določite začetne približke, pri katerih bo iteracija konvergirala k fiksni točki oziroma k rešitvi enačbe.
- (d) Z začetnim $x_0 = 0$ izračunajte x_1 in x_2 . Ocenite napako drugega približka.

REŠITEV:

- Ker je funkcija zvezna in ker velja $f(0) \cdot f(0.2) < 0$, ima na danem intervalu vsaj eno ničlo.
- Iteracija konvergira za $x_0 \in (-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2})$
- Približki: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.100001, \dots$
- Napaka približka: $|x_2 - \alpha| \sim 8 \cdot 10^{-10}$

2. Dana je iteracija

$$x_{r+1} = x_r (3 - 3ax_r + a^2x_r^2), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

- (a) Izračunajte vse fiksne točke. Katere so privlačne in katere odbojne?
- (b) V okolici privlačnih fiksni točk določite red konvergence.
- (c) Določite interval začetnih približkov, pri katerih bo iteracija konvergirala proti privlačni fiksni točki.
- (d) Preizkusite na primeru $a = 5$, $x_0 = 0.1$.

REŠITEV:

- Fiksne točke: $\alpha = 0$ (odbojna), $\alpha = \frac{2}{a}$ (odbojna), $\alpha = \frac{1}{a}$ (privlačna)
- Kubična konvergenca
- Iteracija konvergira za $3 - \sqrt{3} < 3ax_0 < 3 + \sqrt{3}$

3. Dana je iteracijska funkcija

$$g(x) = x(2 - ax), \quad a > 0.$$

- (a) Izračunajte vse fiksne točke. Katere so privlačne in katere odbojne?
- (b) V okolici privlačnih fiksnih točk določite red konvergence.
- (c) Natančno določite interval začetnih približkov, da bo iteracija konvergirala proti privlačni fiksni točki. Isto nalogo rešite še z uporabo odvodov.

REŠITEV:

- Fiksne točke: $\alpha = 0$ (odbojna), $\alpha = \frac{1}{a}$ (privlačna)
- Kvadratična konvergenca
- Iteracija konvergira za $x_0 \in (0, \frac{2}{a})$. S pomočjo odvodov dobimo interval konvergence $x_0 \in (\frac{1}{2a}, \frac{3}{2a})$

4. Kvadratni koren pozitivnega števila a lahko računamo iterativno z

$$x_{r+1} = x_r \frac{x_r^2 + 3a}{3x_r^2 + a}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Preverite, da je \sqrt{a} fiksna točka.
- (b) Določite red konvergence v bližini te fiksne točke.
- (c) Pokažite, da je metoda konvergentna za poljuben $x_0 > 0$.

REŠITEV:

Kubična konvergenca

5. Dana je iteracijska funkcija

$$g(x) = ax(1 - x), \quad 1 < a < 4.$$

- (a) Izračunajte vse fiksne točke. V odvisnosti od parametra a določite, katere točke so privlačne in katere odbojne?
- (b) Določite red konvergence.
- (c) Določite interval začetnih približkov, pri katerih bo iteracija konvergirala proti privlačni fiksni točki.
- (d) Dokažite, da za $3 < a < 4$ funkcija g preslika interval $(0, 1)$ v interval $(0, 1)$. Zaporedje x_r nima limite, ampak stekališča.

REŠITEV:

- Fiksne točke: $\alpha = 0$, privlačna za $-1 < a < 1$, odbojna za $1 < a < 4$
 $\alpha = 1 - \frac{1}{a}$, privlačna za $1 < a < 3$, sicer odbojna
- Linearna konvergenca
- Iteracija konvergira za $x_0 \in \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a}\right), \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right)$.

6. Dana je iteracija

$$x_{r+1} = \frac{1}{2} \left(x_r + \frac{4}{x_r} \right), \quad r = 0, 1, \dots$$

- Izračunajte vse fiksne točke in določite katere točke so privlačne in katere odbojne?
- Določite red konvergence v okolici privlačnih fiksni točk.
- Določite interval začetnih približkov, pri katerih iteracija konvergira proti privlačni fiksni točki.

REŠITEV:

- Fiksne točke: $\alpha = -2$ (privlačna), $\alpha = 2$ (privlačna)
- Kvadratična konvergenca
- Iteracija konvergira za $|x_0| > \sqrt{2}$

7. Enačbo $x^3 - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$ rešujemo z iteracijo

$$x_{r+1} = \alpha x_r + \beta x_r^{-2}, \quad r = 0, 1, \dots$$

Določite parametra α in β , da bo red konvergence v okolici rešitve $\sqrt[3]{a}$ vsaj kvadratičen. Kakšen je točno red konvergence? Z iteracijo, ki jo dobite, izračunajte $\sqrt[3]{10}$ z začetnim $x_0 = 2.5$ na pet decimaln natančno.

REŠITEV:

$\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{a}{3}$, kvadratična konvergenca

8. V iteracijski formuli

$$x_{r+1} = \frac{A^2}{x_r^5} \left(\alpha + \beta \frac{x_r^3}{A} + \gamma \frac{x_r^6}{A^2} \right), \quad r = 0, 1, \dots$$

za računanje $\sqrt[3]{A}$ določite neznane parametre α, β, γ tako, da bo konvergenca v okolici rešitve vsaj kubična.

REŠITEV:

$\alpha = -\frac{1}{9}, \beta = \gamma = \frac{5}{9}$

9. Iščemo ničle funkcije $f(x) = x + 4 - e^{x^2}$. Preverite, da ima funkcija f vsaj eno ničlo na intervalu $[-2, -1]$ in na $[1, 2]$. Predlagajte iteracijske funkcije za izračun teh dveh ničel.

REŠITEV: Uporabite lahko iteracijski funkciji

$$g_1(x) = -\sqrt{\log(x+4)}, \quad g_2(x) = \sqrt{\log(x+4)}.$$

Lahko pa tangентno metodo $g(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2-1)+4}{2e^{x^2}x-1}$.

10. Rešujemo enačbo $f(x) = x^2 + \log x = 0$.

- (a) Dokažite, da ima enačba natanko eno rešitev.
 (b) Dokažite, da rešitev leži na intervalu $(0, 1)$.
 (c) Ražiščite konvergenco zaporedja približkov iteracijskih funkcij:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{-\log x}, \\ g(x) &= e^{-x^2}, \\ g(x) &= \frac{1}{2} \left(x + e^{-x^2} \right). \end{aligned}$$

- (d) Izpeljite tangентno metodo. Kakšen je red konvergence?

REŠITEV:

- Narišite graf funkcij x^2 in $-\log x$. Iz grafa se vidi, da je eno samo presečišče.
- Ker je funkcija zvezna in ker velja $f(0) \cdot f(1) < 0$, je ničla na intervalu $(0, 1)$.
- ne konvergira; konvergira (linearna konvergenca - zelo počasna); konvergira (linearna konvergenca - hitrejša od prejšnje)
- Tangentna metoda: $\frac{x^3+x-x \log(x)}{2x^2+1}$, kvadratična konvergenca

11. Določite red konvergence iteracije

$$x_{r+1} = \frac{x_r(1+x_r)}{1+2x_r+\log x_r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

za reševanje enačbe $e^x - \frac{1}{x} = 0$.

REŠITEV: Kvadratičen red konvergence.

12. Izpeljite tangentno metodo za reševanje naslednjih enačb:

$$x^5 - 10x + 1 = 0,$$

$$\sin x = 2(1 - x^2),$$

$$\cos x + 4x = 0,$$

$$xe^{x^2} = 2$$

REŠITEV:

$$x_{r+1} = \frac{1 - 4x_r^5}{10 - 5x_r^4}, \quad r = 0, 1, \dots$$

$$x_{r+1} = \frac{2x_r^2 - \sin(x_r) + x_r \cos(x_r) + 2}{4x_r + \cos(x_r)}, \quad r = 0, 1, \dots$$

$$x_{r+1} = \frac{x_r \sin(x_r) + \cos(x_r)}{\sin(x_r) - 4}, \quad r = 0, 1, \dots$$

$$x_{r+1} = \frac{2(x_r^3 + e^{-x_r^2})}{2x_r^2 + 1}, \quad r = 0, 1, \dots$$

13. Določite vse polinome stopnje štiri z vodilnim koeficientom 1, pri katerih se tangentna metoda obnaša takole:

- v bližini α ima linearno konvergenco;
- v bližini $-\alpha$ ima kubično konvergenco.

Določite še ostale ničle in red konvergence v njihovi bližini.

REŠITEV:

$$p(x) = (x - \alpha)^2(x + \alpha)(x + 2\alpha)$$

14. Naj bo α m -kratna ničla funkcije f . Izračunajte

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g'(x),$$

kjer je g iteracijska funkcija za tangentno metodo: $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Kaj lahko poveste o redu konvergence.

REŠITEV:

$\lim_{x \rightarrow \alpha} g'(x) = 1 - \frac{1}{m}$. Linearna konvergenca. Večji kot je m , bolj blizu 1 je odvod $g'(\alpha)$ in zato je konvergenca počasnejša.

15. Izračunajte vsaj eno ciklično točko tangentne metode za enačbo $\sin x = 0$.

16. Določite red konvergence tangentne metode za iskanje ničel polinoma

$$p(x) = x^3 - ax^2 - a^2x + a^3, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

v bližini ničel.

REŠITEV:

Ničle: $\alpha = a$ (dvakratna ničla, linearna konvergenca), $\alpha = -a$ (kvadratična konvergenca)

17. Poiščite vsa presečišča funkcij

$$y = x + 4, \quad y = e^{x^2}.$$

(a) Skicirajte grafa.

(b) Uporabite tangentno metodo. Kakšen je red konvergence?

(c) Predlagajte še kakšno iteracijsko funkcijo za izračun ničel.

18. Z operacijami $+$, $-$, $*$ izračunajte $\frac{1}{a}$ za $a > 0$. Izberite f tako, da bo $\frac{1}{a}$ ničla in uporabite tangentno metodo. Določite red konvergence, ocene napake. Kje lahko vzamemo začetne približke.

19. Zapišite pridruženo matriko polinoma

$$p(x) = 2x^5 - 3x^3 + 4x - 1.$$

20. Zapišite pridruženo matriko polinoma

$$p(x) = -3x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 1$$

21. Izračunajte Sturmovo zaporedje za polinom

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 1.$$

Določite število različnih ničel ničel na intervalu $(0, 1)$ ter na intervalu $(0, 5)$.

REŠITEV:

Sturmovo zaporedje:

$$\left\{ x^3 - 5x^2 + 1, 3x^2 - 10x, \frac{50x}{9} - 1, \frac{4257}{2500} \right\}$$

Na intervalu $(0, 1)$ je ena enostavna ničla, na intervalu $(0, 5)$ pa dve.

22. Izračunajte Sturmovo zaporedje za polinom

$$p(x) = x^3 + 2x - 4.$$

Določite število različnih ničel ničel na intervalu $(-1, 0)$ ter na intervalu $(0, 2)$.

REŠITEV:

Sturmovo zaporedje:

$$\left\{ x^3 + 2x - 4, 3x^2 + 2, 4 - \frac{4x}{3}, -29 \right\}$$

Na intervalu $(-1, 0)$ ni enostavne ničle, na intervalu $(0, 2)$ je ena enostavna ničla.