Rešene naloge iz numeričnih metod

Gašper Jaklič Selena Praprotnik

Predgovor

Zbirka nalog, ki je pred vami, je nastala iz gradiva, ki sva ga pripravila pri izvajanju predmeta Numerične metode na NTF v študijskem letu 2009/2010 in na podlagi izkušenj, ki sva jih pridobila pri izvajanju raznovrstnih drugih predmetov. Ker dosedaj ni bilo primerne zbirke nalog iz numeričnih metod, so študenti pogrešali naloge, s katerimi bi si pomagali pri pripravah na kolokvije in izpite. To je posebej važno na študijskih smereh, kjer je matematičnih predmetov relativno malo.
Namen te zbirke je preprost. Obravnavana so osnovna področja numerične matematike, pri vsakem so na kratko ponovljeni osnovni teoretični rezultati, nato pa se začnejo naloge. Za razliko od podobnih zbirk ne napiševa samo idej reševanja in končnega rezultata, ampak rešitev detajlno razdelava. Tako lahko študent/ka nalogo reši samostojno, in nato primerja rešitvi korak po korak. Nekaj nalog zahteva preizkus numeričnih metod z računalnikom. Tu sva se odločila za brezplačen program Octave, ki je kompatibilen z Matlabom. Programe, ki so nastali pri pisanju zbirke, lahko bralec/bralka najde na spletni strani zbirke, opisani pa so tudi v enem od zaključnih razdelkov.
Zbirka je namenjena predvsem študentom/študentkam, ki poslušajo predmete numerične matematike na smereh, kjer je matematike nekoliko manj, ter študentom praktične matematike. Poleg tega služi za utrditev osnovnih algoritmov numerične matematike tudi za študente matematike na univerzitetnih bolonjskih smereh.
Zahvaljujeva se kolegom, ki so podrobno pregledali zbirko in podali vrsto koristnih pripomb.

Ljubljana, december 2010

Selena Praprotnik in Gašper Jaklič

Kazalo

Poglavje 1

Predstavitev programa Octave

1.1 Namestitev programa in dokumentacija

Octave je odprtokodni program za numerično računanje. Informacije o programu lahko najdete na domači strani http://www.gnu.org/software/octave/ Z domače strani sledite povezavi `Download`, s katere lahko prenesete datoteke, ki jih potrebujete za namestitev programa. Podprta je večina operacijskih sistemov. Na domači strani najdete tudi dokumentacijo (sledite povezavi `Docs`).

1.2 Osnove dela z Octaveom

Pomoč prikličemo z ukazom `help` oz. `help ime_funkcije`. Primer: `help eig`. Po zgodovini ukazov se premikamo s tipkama gor/dol.
Če se program izvaja predolgo časa (npr. če se zanka ne konča), lahko ustavimo izvajanje s tipko `break` ali kombinacijo `Ctrl+C`. Octave zapustimo z ukazom `exit` ali `quit`.
Za brisanje vrednosti spremenljivk uporabimo ukaz `clear all`. Če želimo izbrisati vrednost ene same spremenljivke, npr. `x`, uporabimo `clear(x)`. Ukaz `who` prikaže, katere spremenljivke smo že definirali.
Imena spremenljivk so lahko karkoli, ne smejo pa se začeti s številom. Enako velja za imena datotek, v katere shranimo programe. Imena ne smejo vsebovati presledkov. Octave razlikuje med malimi in velikimi črkami. Nize vpisujemo med enojne narekovaje.
Natančnost izpisa določamo z ukazom `format`. Privzet način je `format short`, ki izpiše 5 decimalnih mest, če želimo daljši izpis, uporabimo `format long`, ki izpiše 15 decimalnih mest. Izpisujemo z ukazom `disp`.

1.2.1 Shranjevanje

Osnovno okolje v Octaveu je vmesnik, v katerega pišemo ukaze in ki prikaže rezultate izračunov. Shranimo lahko le vrednosti spremenljivk, ne pa tudi zaporedja ukazov. Ukaz `save ime_datoteke` shrani vrednosti vseh spremenljivk v datoteko `ime_datoteke`. Shranimo lahko tudi vrednosti le določenih spremenljivk. Če želimo shraniti vrednosti spremenljivk `x,y,z`, to storimo z ukazom `save ime_datoteke x y z`. Ko naslednjič zaženemo Octave, vrednosti naložimo z ukazom `load ime_datoteke`. Z ukazom `save` shranimo samo rezultate izračunov v binarnem zapisu. Za uporabnika je običajno zanimivo zaporedje ukazov, s katerim smo prišli do rezultata, ki ga zapišemo v posebno tekstovno datoteko.

Programe in funkcije pišemo v datoteke s končnico `.m`. Take datoteke ločimo glede na uporabo na skriptne in funkcijske. Skriptne datoteke vsebujejo zaporedje ukazov, funkcijske pa definicije funkcij. Pozorni moramo biti na to, da se v Octaveu nahajamo v delovnem področju (mapi), v kateri se nahaja datoteka s programom. Če želimo zagnati program `program.m`, moramo biti v mapi, v kateri je shranjen, klic ukaza `program` pa bo zagnal ukaze v datoteki.

1.3 Matrike in vektorji

1.3.1 Vnos matrik in vektorjev

Osnovni objekti v Octaveu so matrike. Števila so 1×1 matrike, vektorji pa bodisi stolpci bodisi vrstice. Znotraj vrstice elemente ločujemo z vejico ali presledkom, v novo vrstico pa skočimo s podpičjem. Naključne matrike generiramo s pomočjo funkcije `rand`. Ukaz `rand(n)` generira kvadratno matriko dimenzije `n` $\times$ `n` z naključnimi elementi med 0 in 1. Podobno funkcija `rand(m,n)` generira naključno pravokotno matriko dimenzije `m`$\times$`n`. Kompleksna števila zapišemo kot `z = 4 + 3i`. Iz dveh obstoječih vektorjev lahko sestavimo novega npr. `x0 = [6,7,8]`, `v = [3,4,5,x0]` vrne `[3,4,5,6,7,8]`. Če sestavljamo matriko, moramo paziti, da se dimenzije ujemajo.

Primeri:

`[0;1;2]` je stolpec

`[0,1,2]` je vrstica

`m = [0,1,2;3,4,5]` je 2×3 matrika, ki smo jo shranili v spremenljivko `m`

`rand(2,3)` je matrika naključnih števil med 0 in 1, velikosti 2×3

1.3.2 Zapis z dvopičjem

Če želimo zapisati vektor zaporednih števil, je to lahko zamudno, zato uporabimo zapis z dvopičjem. Izraz `1:5` predstavlja vrstični vektor `[1,2,3,4,5]`. Števila v tako generiranih seznamih niso nujno cela.

Primeri:

`1:5` je vrstica števil od 1 do 5, `[1,2,3,4,5]`
`0:2:10` je vrstica števil od 0 do 10, korak je 2, `[0,2,4,6,8,10]`
`5:-1:0` je vrstica števil od 5 do 0, korak je -1, `[5,4,3,2,1,0]`
`0:0.5:2` je vrstica števil od 0 do 2, korak je 0.5, `[0,0.5,1,1.5,2]`

1.3.3 Izpis elementov

Elementi vektorjev in matrik so indeksirani. Prvi element ima indeks 1. Če želimo izpisati element, ki ne obstaja, program javi napako. Indekse lahko zapišemo z dvopičjem ali z vektorjem željenih indeksov.

Primeri:

`v = [3,4,5,6,7,8]`
`v(4)` izpiše četrti element, `6`
`v(0)` ali `v(10)` javi napako
`v(2:4)` izpiše elemente od drugega do četrtega (oba vključena), `[4,5,6]`
`v(1:2:3)` izpiše prvi in tretji element, `[3,5]`
`v(3:end)` izpiše elemente od tretjega do zadnjega, `[5,6,7,8]`
`m = [0,1,2;4,5,6;7,8,9]`
`m(1:2,:)` izpiše prvi dve vrstici matrike `m`
`m(:,2:3)` izpiše drugi in tretji stolpec matrike
`m(:)` iz matrike naredi vektor (stolpec), tako da stolpce zaporedoma zloži v vektor

1.4 Operacije

Osnovne operacije so `+` (seštevanje), `-` (odštevanje), `*` (množenje), `^` ali `**` (potenciranje), `'` (transponiranje), \ (levo deljenje) in `/` (desno deljenje). Če želimo, da operacija deluje po komponentah, pred operator zapišemo piko. Pozorni moramo biti na dimenzije. Operator `'` (transponiranje) pri matrikah s kompleksnimi koeficienti pomeni transponiranje in konjugiranje. Če želimo matriko le transponirati, uporabimo `.'`. Če napišemo `x = A \ b`, je `x` rešitev sistema `A*x = b`. Če izračunamo `x = b/A`, je `x` rešitev sistema `x*A = b`.

Primeri:

```
v0 = [1,2,3]
v1 = [4,5,6]
```

`v0 + 5` vsaki komponenti prišteje 5, `[6,7,8]`
`v0*v1` vrne napako
`v0.*v1` zmnoži istoležne komponente vektorjev, `[4,10,18]`

```
m = [1 + 2i, 2 + 2i; 1 - i, -3i]
```

`m'` vrne `[1 - 2i, 1 + i; 2 - 2i, 3i]`
`m.'` vrne `[1 + 2i, 1 - i; 2 + 2i, -3i]`

1.5 Vgrajene funkcije in konstante

Zapisan je seznam najbolj pogosto uporabljanih vgrajenih funkcij. V vsaki vrstici so naštete funkcije, ki so si vsebinsko podobne. Imena funkcij so logična glede na njihovo uporabo, za podrobnosti pa si pomagamo s funkcijo `help`. V zadnji vrstici so zapisane tudi vgrajene konstante.

```
conj(z), imag(z), real(z), abs(z), arg(z)
max(v), min(v), sort(v), sum(v), size(v), length(v), abs(v)
sin(x), cos(x), tan(x), asin(x), acos(x), atan(x), exp(x), log(x),
sqrt(x), floor(x), ceil(x), round(x)
zeros(n), ones(n), eye(n), diag(v), rand(n)
inv(A), det(A), eig(A), rank(A), disp(x)
e, pi, Inf, inf, true = 1, false = 0, i, j, eps
```

1.6 Pisanje programov

Programe lahko pišemo v poljubnem urejevalniku besedil. Vrstice, ki se začnejo z znakom %, nimajo vpliva na program. Uporabljamo jih za komentiranje programa. Programi naj bodo vedno (smiselno) komentirani, koda pa zamaknjena. Ime datoteke je enako imenu funkcije, končnica pa je .m.

Primer 1:

```
function y = sestej(a,b)
      y = a + b;
end
```

Ta program shranimo v datoteko z imenom `sestej.m`. Ko želimo funkcijo uporabiti, moramo paziti še, v kateri mapi se nahajamo.
V splošnem bodo funkcije oblike

```
function [izhodne_sprem] = ime_funkcije(vhodne_sprem)
      stavki, ki se izvedejo ...
end
```

Podpičje na koncu stavka pomeni, da se vrstica ne izpiše med izvajanjem.

Primer 2:

```
function [v, r] = vsotaRazlika(x,y)
      v = x + y;
      r = x - y;
end
```

1.6.1 Pogojni stavki

Pogojne stavke uporabimo, kadar želimo, da se del programa izvede le, če je izpolnjen določen pogoj. Pogoje sestavimo s pomočjo relatorjev `<`, `>`, `<=`, `>=`, `==`, `!=`, `~=`. Logični operatorji, ki služijo za povezovanje pogojev, so `&` ali `&&` (in), `|` ali `||` (ali), `~` ali `!` (negacija). Rezultat relatorjev je matrika enic in ničel.

Pogoj `A ~= B` je izpolnjen le, če se razlikujejo VSE komponente matrik. Če nas zanima, ali se razlikuje kakšna od komponent matrik, napišemo `any(any(A ~= B))`.

Primer:

Če je število `a` večje od števila `b`, naj program izpiše `res je`, sicer pa `ni res`.

```
function y = vecji(a,b)
      if a > b
           disp('res je')
      else
           disp('ni res')
      end
end
```

V splošnem je pogojni stavek oblike

```
if pogoj1
      stavki, ki se izvedejo, če je izpolnjen pogoj1
elseif pogoj2
      stavki, ki se izvedejo, če
      pogoj1 ni izpolnjen in
      je izpolnjen pogoj2
else
      stavki, ki se izvedejo, če
      noben od prejšnjih pogojev ni izpolnjen
end
```

Stavki `elseif` in `else` niso obvezni. Število `elseif` stavkov je lahko poljubno.

1.6.2 Zanka `for`

Zanko `for` uporabljamo, kadar vemo, kolikokrat želimo ponoviti določene stavke in za katere vrednosti spremenljivke jih želimo izvesti.

Primer 1:

Računamo $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(n-1)\text{ množenj}}$.

```
x=a;
for i = 2:n
   x=x*a;
end
```

V splošnem lahko namesto `2:n` pišemo poljuben vektor.

Primer 2:

Želimo n-krat izpisati število a.

```
function y = nKrat(a,n)
     y = a;
     for i=2:n
          y = [y;a];
     end
end
```

Ta program ni najbolj učinkovit, saj je treba ob vsaki ponovitvi zanke povečati dimenzijo vektorja `y`. Popravimo!

```
function y = nKrat2(a,n)
     y = zeros(n,1);
     for i = 1:n
          y(i) = a;
     end
end
```

Načeloma se, če se le da, izognemo uporabi zank. Octave namreč najbolje deluje pri operacijah z vektorji. Če malo pomislimo, najdemo elegantnejšo rešitev.

```
function y = nKrat3(a,n)
     y = a*ones(n,1);
end
```

1.6.3 Zanka `while`

Zanka `while` je oblike

```
while pogoj
     stavki, ki se izvedejo, če je pogoj izpolnjen
end
```

in se izvaja, dokler je pogoj resničen.
Primer:
Izpisati želimo vse potence števila 2, ki so manjše od 1000.

```
x = 1;
while x < 1000
      disp(x);
      x = x*2;
end
```

Pozorni bodimo, da se morajo spremenljivke iz pogoja spreminjati znotraj zanke. Če na to pozabimo, se program "zacikla".

1.6.4 Stavka `break` in `continue`

Stavka `break` in `continue` uporabljamo, kadar želimo predčasno prekiniti izvajanje zanke. Stavek `break` prekine izvajanje zanke in izvajanje programa se nadaljuje po zanki. Stavek `continue` prekine izvajanje zanke in program nadaljuje na njenem začetku.
Primer:

```
x = 1;
while true
      disp(x);
      x++;
      if x > 3
           break;
      end
end
disp(x);
```

1.6.5 Interaktivni vnos podatkov

Če želimo, da bi namesto klica funkcije, vrednosti parametrov vpisoval uporabnik, uporabimo ukaz `input`. Primer:

```
a = input('Vpisi stevilo...  ')
```

1.7 Grafika

Ukaz za risanje grafov je `plot`. Če imamo dva vektorja `x` in `y` iste dolžine in kličemo ukaz `plot(x,y)`, se odpre grafično okno, v katerem se nariše graf skozi točke (x_i, y_i).
Primer 1:

```
x = linspace(-pi, pi, 100);
y = sin(x);
plot(x,y);
```

Krivulje lahko rišemo tudi parametrično.

Primer 2:

```
t = 0:.001:2*pi;
x = cos(3*t);
y = sin(2*t);
plot(x,y)
```

Grafe lahko opremimo z naslovom, imeni osi, besedili... Uporabimo `title, xlabel, ylabel, legend, axis`. Na isti graf lahko narišemo tudi več krivulj.

Primer 3:

```
x =0:.01:2*pi;
y1 = sin(x);
y2 = sin(2*x);
plot(x,y1,x,y2)
```

Lahko pa sestavimo matriko stolpcev Y,

```
y = 0:.01:2*pi;
Y = [sin(x)', sin(2*x)', sin(4*x)'];
plot(x,Y)
```

1.8 Naloge

Vsako nalogo v tem poglavju je mogoče rešiti na več načinov, rešitve podajajo le eno od možnosti. Programe lahko najdete tudi na spletni strani [1].

1. S čim manj ukazi sestavite naslednje matrike:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & -2 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 2i & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

```
% Naloga1.m
clear all
a = diag([4,-2,2i,0]-9) + ones(4)*9
```

```
b = [ones(3), zeros(3,2); zeros(2,3), 4*eye(2)]
c = zeros(5);
c(1,:) = ones(1,5) * 2;
c(:,1) = ones(5,1) * 2;
c(3:4,3:4) = 7*ones(2);
c(5,5) = 10;
c
```

2. V Octave vnesite naslednje matrike:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & 1-i \\ 2i & 1-3i & 1 \\ 4-i & 1+2i & i \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} A_1 & I \\ 0 & 2A_1 \end{bmatrix}$$

Izpišite tretjo vrstico in prvi stolpec matrike A_1. V matriki A_3 vse ničle v spodnjem levem kotu spremenite v 2. Izračunajte determinanto in lastne vrednosti nove matrike A_3. Poiščite maksimalni element po absolutni vrednosti v matriki A_2. Naj bo x drugi, y pa tretji stolpec matrike A_2. Izračunajte skalarni produkt vektorjev x in y.

Rešitev.

```
% Naloga2.m
clear all
a1 = ones(4);
a1(2,1) = 2;
a1(3,4) = 3
a2 = [1+i,1,1-i;2i,1-3i,1;4-i,1+2i,i]
a3 = [a1, eye(4); zeros(4), 2*a1]
a1(3,:) % tretja vrstica matrike a1
a1(:,1) % prvi stolpec matrike a1
a3(5:end,1:4) = ones(4) * 2 % spremenimo matriko a3
det(a3) % determinanta
eig(a3) % lastne vrednosti
max(max(abs(a2))) % maksimalni element po absolutni vrednosti
x = a2(:,2);
y = a2(:,3);
x'*y % skalarni produkt x in y
```

3. Napišite funkcijo `sestejN(n)`, ki sešteje prvih n naravnih števil. Uporabite zanko `for`. Napišite še funkcijo `sestejN2(n)`, pri kateri ne upora-

bite zanke. Rezultate lahko preverite s formulo

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Rešitev.

```
% sestejN.m
function y = sestejN(n)
     y = 0;
     for i = 1:n
          y = y + i;
     end
end

% sestejN2.m
function y = sestejN2(n)
     y = sum(1:n);
end

% Naloga3.m
% preizkusimo funkciji sestejN in sestejN2
clear all
n=9;
sestejN(n)
sestejN2(n)
% preverimo rezultat po formuli
1/2*n*(n+1)
```

4. Napišite funkcijo `enakomerno(xzac,xkon,n)`, ki naredi isto kot funkcija `linspace`, tj. funkcija naj ustvari vektor, ki vsebuje `n` vrednosti, ki so enakomerno razporejene od `xzac` do `xkon`.

   Rešitev.

```
% enakomerno.m
function y = enakomerno(xzac,xkon,n)
     t = (xkon - xzac)/(n-1);
     y = xzac:t:xkon;
end

% Naloga4.m
```

```
% preizkusimo funkcijo enakomerno
clear all
enakomerno(1,2,5)
linspace(1,2,5)
```

5. Napišite funkcijo `minEksponent(a,b)`, ki izračuna najmanjše naravno število n, za katerega je $a^n \geq b$. Ne uporabite funkcije `log`.

   Rešitev.

```
% minEksponent.m
function y = minEksponent(a,b)
     n=1;
     while a^n < b
          n=n+1;
     end
     y = n;
end
```

```
% Naloga5.m
% preizkusimo funkcijo minEksponent
clear all
minEksponent(2,5)
```

6. Napišite funkcijo `matrikan(n)`, ki vrne matriko velikosti $n \times n$ naslednje oblike (za $n = 4$):

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} .$$

   Rešitev.

```
% matrikan.m
function y = matrikan(n)
     y = ones(n);
     v = 1:n;
     for i = 1:n
          y(i,:) = v + (i-1);
     end
end
```

```
% Naloga6.m
% testiramo funkcijo matrikan
clear all
matrikan(4)
```

7. Napišite funkcijo `poVrsti(n)`, ki vrne matriko velikosti $n \times n$, v kateri so po vrsti števila od 1 do n^2. Primer:

$$\texttt{poVrsti(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

   Namig: Pomagajte si s funkcijo `reshape`.

   Rešitev. Funkcija `reshape(v,m,n)` iz vektorja v naredi matriko dimenzije $m \times n$.

```
% poVrsti.m
function y = poVrsti(n)
     y = 1:n^2;
     y = reshape(y,n,n)';
end
```

```
% Naloga7.m
% preizkusimo funkcijo poVrsti
clear all
poVrsti(3)
```

8. Napišite program za generiranje matrik oblike

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Rešitev.

```
% matrika.m
function m = matrika(n)
     m = ones(n);
     v = 1:n;
```

```
    for i=1:n
        m(i,i:end) = v(1:end-i+1);
        m(i,1:i) = v(i:-1:1);
    end
end

% Naloga8.m
% preizkusimo funkcijo matrika
clear all
matrika(5)
```

9. Napišite funkcijo `tridiagonalna(sp,d,zg,n)`, ki vrne matriko dimenzije $n \times n$, v kateri so na diagonali števila d, nad diagonalo števila zg, pod diagonalo pa števila sp.

   Rešitev.

```
% tridiagonalna.m
function y = tridiagonalna(sp,d,zg,n)
    diagonala = ones(n,1)*d;
    naddiag = ones(n-1,1)*zg;
    poddiag = ones(n-1,1)*sp;
    y = diag(diagonala)+diag(naddiag,1)+diag(poddiag,-1);
end

% Naloga9.m
% preizkusimo funkcijo tridiagonalna
clear all
tridiagonalna(3,5,2,4)
```

10. Sestavite funkcijo, ki bo izračunala vrednost periodične realne funkcije, ki je na [0,10) definirana takole:

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin(x), & 0 \leq x < 2 \\ |x-3|, & 2 \leq x \leq 4 \\ (x-5)^2, & 4 < x < 7 \\ 12 - 5x, & 7 \leq x < 10 \end{cases}$$

    Namig: Uporabite funkcijo `mod`.

    Rešitev. Funkcija `mod(a,n)` vrne število med 0 in $n-1$, ki ustreza ostanku pri deljenju števila a z n. Ostanek pri deljenju izračunamo s pomočjo funkcije `rem(a,n)`. Razlika med `mod` in `rem` je pri negativnih številih a. Tako je `mod(5,3) = 2` in `mod(-1,3) = 2`, ostanka pa sta `rem(5,3) = 2` in `rem(-1,3)=-1`.

```
% fun.m
function y = fun(x)
     x = mod(x,10);
     if x<2
          y = x + sin(x);
     elseif x <= 4
          y = abs(x-3);
     elseif x < 7
          y = (x-5)^2;
     else
          y = 12 - 5*x;
     end
end
```

11. Sestavite funkcijo `postevanka()`, ki prebere števili a in n in izpiše poštevanko števila a od a do $n * a$.

    Rešitev.

```
% postevanka.m
function y = postevanka()
     a = input('Vnesi stevilo a: ');
     n = input('Vnesi stevilo n: ');
     y = a:a:(n*a);
end
```

12. Sestavite funkcijo `stDeliteljev(n)`, ki prebere naravno število n in izpiše, koliko deliteljev ima n.

    Namig: Uporabite funkcijo `rem` ali funkcijo `mod`.

    Rešitev. Funkciji `rem` in `mod` sta opisani v rešitvi naloge 10.

```
% stDeliteljev.m
function y = stDeliteljev(n)
     y = 0;
     for i=1:n
          if rem(n,i) == 0
               y=y+1;
          end
```

```
    end
end

% Naloga12.m
% preizkusimo funkcijo stDeliteljev
clear all
stDeliteljev(12)
```

13. Sestavite funkcijo `osnova(n,b)`, ki izpiše število n v bazi $b, 1 < b < 10$.

    Rešitev.

```
% osnova.m
function y = osnova(n,b)
    v = rem(n,b);
    s = 1;
    while n ~= 0
        n = floor(n/b);
        v = [v,rem(n,b)];
        s = [s,s(end)*10];
    end
    y = v*s';
end

% Naloga13.m
% preizkusimo funkcijo osnova
clear all
osnova(13,2)
```

14. Sestavite funkcijo `minmaxPovpr(m)`, ki vrne dve vrednosti. Prva vrednost je minimum povprečja stolpcev matrike m, druga pa maksimum povprečja stolpcev matrike m.

    Rešitev.

```
% minmaxPovpr.m
function [a,b] = minmaxPovpr(m)
    v = sum(m) / length(m); %vektor povprecij stolpcev
    a = min(v);
    b = max(v);
end
```

15. Narišite graf funkcije $\sin x$ na intervalu $\in [-3, 3]$.

Rešitev.

```
% Naloga15.m
clear all
x = -3:.01:3;
plot(x,sin(x))
```

16. Narišite graf funkcije $\arccos x \cdot x^2$ na intervalu $[-1, 1]$. Opremite ga z imeni osi in naslovom.

Rešitev.

```
% Naloga16.m
clear all
x = -1:.01:1;
y = acos(x).*(x.^2);
plot(x,y),
xlabel('os x'), ylabel('os y'),
title('Moj prvi graf')
```

17. Napišite funkcijo `horner(a,x)`, ki po Hornerjevem algoritmu izračuna vrednost polinoma $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ v dani točki x. Pri tem je vektor $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ vektor koeficientov polinoma.
Hornerjev algoritem:
$b_n = a_n$
$i = n-1, n-2, \ldots, 0$
$\quad b_i = x b_{i+1} + a_i$
Dobljeni b_0 je enak vrednosti polinoma p v točki x.

Rešitev.

```
% horner.m
function y = horner(a,x)
     b = a(end);
     n = length(a);
     for i = n-1:-1:1
          b = x*b + a(i);
     end
     y = b;
end
```

```
% Naloga17.m
% preizkusimo delovanje funkcije horner
clear all
horner([1,5,3],2)
1 + 5*2 + 3*2^2
```

18. Napišite ukaz `dpoly(a)`, ki vrne vektor s koeficienti odvoda polinoma, podanega z vektorjem koeficientov a.

    Rešitev.

```
% dpoly.m
function v = dpoly(a)
     n = length(a);
     v = [1:n-1].*a(2:end);
end
```

```
% Naloga18.m
% preizkusimo delovanje funkcije dpoly
clear all
dpoly([1,3,5])
```

Poglavje 2

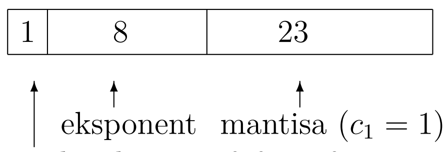
Aritmetika v premični piki in stabilnost izračuna

2.1 Premična pika

Število x je v premični piki zapisano v obliki

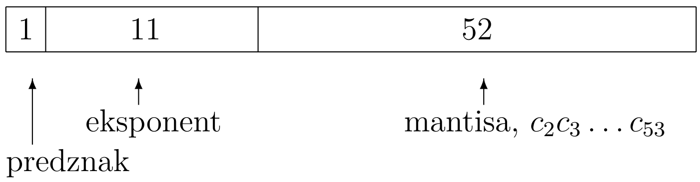
$$x = \pm m \cdot b^e.$$

Število m je *mantisa*, število b je *baza* (običajno 2 - dvojiški zapis mantise, lahko tudi 10 ali 16), število e je *eksponent* v mejah $L \leq e \leq U$. Mantiso zapišemo v obliki $m = 0.c_1c_2\ldots c_t$, kjer je t dolžina mantise. Če je $c_1 \neq 0$, pravimo, da je število *normalizirano.* V zapisu so c_i števke med 0 in $b-1$. Zapis označimo z $P(b,t,L,U)$. Številom, ki jih dobimo na ta način, pravimo *predstavljiva števila.* Vsa ostala števila zaokrožimo na najbližje predstavljivo število. V praksi gledamo števko, ki sledi števki na mestu t. Če je ta števka $\geq \frac{1}{2}b$, števki c_t prištejemo 1, kar morda vpliva še na števke pred njo, sicer samo odrežemo ostanek.



Slika 2.1: Predstavljiva števila v enojni natančnosti.

Najbolj pogosto uporabljamo aritmetiko, ki jo predpisuje **IEEE standard**. V osnovni obliki so v računalniku števila zapisana v enojni ali v dvojni natančnosti. V enojni natančnosti so števila shranjena v 32 bitih in zapisana v obliki $P(2, 24, -125, 128)$ (slika 2.1). V dvojni natančnosti so števila zapisana v obliki $P(2, 53, -1021, 1024)$ in jih shranimo v 64 bitih (slika 2.2).



Slika 2.2: Predstavljiva števila v dvojni natančnosti.

2.2 Osnovna zaokrožitvena napaka

Osnovna zaokrožitvena napaka u nastane, ker ne moremo natančno predstaviti vsakega števila. Enaka je

$$u = \frac{1}{2} b^{1-t}.$$

Pri zapisu števila v enojni natančnosti je $u \approx 6 \cdot 10^{-8}$, pri dvojni natančnosti pa je $u \approx 10^{-16}$.
Naj bo x dano število. Označimo najbližje predstavljivo število s $fl(x)$. Velja

$$fl(x) = x(1+\delta),\ |\delta| \le u,$$
$$\frac{|fl(x) - x|}{|x|} \le \frac{u}{1+u} \approx u.$$

Pri IEEE standardu za računanje s standardnimi operacijami velja

$$fl(x \circ y) = (x \circ y)(1+\delta),\ |\delta| \le u,$$
$$fl(\sqrt{x}) = \sqrt{x}(1+\delta),\ |\delta| \le u,$$

kjer je $\circ$ katerakoli od operacij +, -, *, /. Tu je δ relativna napaka.

2.3 Stabilnost izračuna

Težave s stabilnostjo pri numeričnih izračunih imamo najpogosteje, kadar odštevamo dve števili približno enake velikosti ali kadar delimo z majhnim številom.

2.4 Naloge

1. Zapišite število 3481 v aritmetiki s premično piko v dvojni dolžini.

   Rešitev. Zapišimo število $x = 3481$ v obliki $x = (-1)^s(1+f)\cdot 2^{e-1023}$. Najprej zapišimo x v dvojiškem zapisu. To lahko storimo na več načinov.

   1. način:
   3481:2 = 1740 ost. 1
   1740:2 = 870 ost. 0
   870:2 = 435 ost. 0
   435:2 = 217 ost. 1
   217:2 = 108 ost. 1
   108:2 = 54 ost. 0
   54:2 = 27 ost. 0
   27:2 = 13 ost. 1
   13:2 = 6 ost. 1
   6:2 = 3 ost. 0
   3:2 = 1 ost. 1
   1:2 = 0 ost. 1
   Zdaj preberemo ostanke od spodaj navzgor.

   2. način:
   Število zapišemo kot vsoto potenc števila 2. Število delimo z največjo možno potenco 2^k, pogledamo ostanek in ponovimo postopek. V našem primeru je

   $$3481 = 2^{11} + 2^{10} + 2^8 + 2^7 + 2^4 + 2^3 + 2^0.$$

   Torej je $3481_{10} = 110110011001_2 = 1.10110011001 \cdot 2^{11}$. Množenje z 2^{11} tu pomeni premik pike za 11 mest v levo. Iz tega zapisa vidimo, da je $f = 0.10110011001$ in $e = 11 + 1023 = 1034$.

   Tudi eksponent zapišemo v dvojiški bazi in dobimo $e = 1034 = 2^{10} + 2^3 + 2^1 = 10000001010_2$.

   Zapis števila x v aritmetiki s premično piko v dvojni dolžini je torej

0	10000001010	$\underbrace{101100110010000\ldots0}_{52}$

   Rezultat lahko preverimo z Octaveom. Vpišemo `format bit` in desetiško število (v tem primeru 3481).

2. Zapišite število 1342 v aritmetiki s premično piko v dvojni dolžini.

Rešitev. Zapišimo število $x = 1342$ v obliki $x = (-1)^s(1+f)\cdot 2^{e-1023}$. Najprej zapišimo x v dvojiškem zapisu,

$1342{:}2 = 671$	ost. 0
$671{:}2 = 335$	ost. 1
$335{:}2 = 167$	ost. 1
$167{:}2 = 83$	ost. 1
$83{:}2 = 41$	ost. 1
$41{:}2 = 20$	ost. 1
$20{:}2 = 10$	ost. 0
$10{:}2 = 5$	ost. 0
$5{:}2 = 2$	ost. 1
$2{:}2 = 1$	ost. 0
$1{:}2 = 0$	ost. 1

Zdaj preberemo ostanke od spodaj navzgor, torej je

$$1342_{10} = 10100111110_2 = 1.0100111110 \cdot 2^{10}.$$

Iz tega zapisa vidimo, da je $f = 0.0100111110$ in $e = 10+1023 = 1033$.

Še eksponent zapišemo v dvojiški bazi in dobimo $e = 1033_{10} = 2^{10} + 2^3 + 2^0 = 10000001001_2$.

Zapis števila x v aritmetiki s premično piko v dvojni dolžini je torej

0	10000001001	$\underbrace{01001111100\ldots0}_{52}$

Rezultat lahko preverimo z Octaveom. Vpišemo `format bit` in desetiško število (v tem primeru 1342).

3. Zapišite število 796 v aritmetiki s premično piko v enojni dolžini.

Rešitev. Zapišimo število $x = 796$ v obliki $x = (-1)^s(1+f)\cdot 2^{e-127}$. Najprej zapišimo x v dvojiškem zapisu,

$796{:}2 = 398$	ost. 0
$398{:}2 = 199$	ost. 0
$199{:}2 = 99$	ost. 1
$99{:}2 = 49$	ost. 1
$49{:}2 = 24$	ost. 1
$24{:}2 = 12$	ost. 0
$12{:}2 = 6$	ost. 0
$6{:}2 = 3$	ost. 0
$3{:}2 = 1$	ost. 1
$1{:}2 = 0$	ost. 1

Zdaj preberemo ostanke od spodaj navzgor, torej je

$$796_{10} = 1100011100_2 = 1.100011100 \cdot 2^9.$$

Iz tega zapisa vidimo, da je $f = 0.100011100$ in $e = 9 + 127 = 136$.

Še eksponent zapišemo v dvojiški bazi in dobimo $e = 136_{10} = 2^7 + 2^3 = 10001000_2$.

Zapis števila x v aritmetiki s premično piko v enojni dolžini je torej

0	10001000	$\underbrace{100011100\ldots0}_{23}$

4. Pokažite, da je
$$0.1 = \sum_{i=1}^{\infty}(2^{-4i} + 2^{-4i-1}) \tag{2.1}$$
in od tod pokažite, da je binarni zapis za $x = 0.1$ enak $0.0001\overline{100}$ (zadnji 4 biti se ponavljajo). Izračunajte $fl(0.1)$ v binarni IEEE aritmetiki z enojno natančnostjo.

Rešitev. Uporabili bomo formulo za vsoto neskončne geometrijske vrste
$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}, \quad \text{za } |q| < 1.$$
Izračunajmo vsoto na desni strani (2.1):
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}(2^{-4i} + 2^{-4i-1}) &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2^4}\right)^i + \left(\frac{1}{2^4}\right)^i \cdot \frac{1}{2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^i\right) \\
&= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{16} \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^i \\
&= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} \\
&= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{16}{15} \\
&= \frac{1}{10} = 0.1.
\end{aligned}$$

Od tod sledi
$$\begin{aligned}
0.1 &= \sum_{i=1}^{\infty}(2^{-4i} + 2^{-4i-1}) \\
&= 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-9} + 2^{-12} + 2^{-13} + \ldots \\
&= 0.00011001100\overline{1100}_2 \\
&= 0.11001100\overline{1100}_2 \cdot 2^{-3}.
\end{aligned}$$

Ko računamo $fl(0.1)$, nas zanimata 24. in 25. mesto v zapisu, saj zaokrožujemo na 24 decimalk. Vidimo, da je števka na 25. mestu enaka 1, števka na 24. mestu pa je 0. Ko število zaokrožimo, bo na 24. mestu 1, ostale števke pa se ne spremenijo.

Rezultat je $fl(x) = 0.\underbrace{11001100\ldots1101}_{24}\cdot 2^{-3}$.

5. Naj bosta x in y predstavljivi števili. Ocenite napako pri izračunu $x^2 - y^2$ v premični piki, če računate na dva načina

   (a) $x^2 - y^2 = (x-y)\cdot(x+y)$,

   (b) $x^2 - y^2$.

   Rešitev. Vemo, da velja

$$fl(x \circ y) = (x \circ y)\cdot(1+\delta),\ |\delta| \leq u,$$

od koder sledi

$$\left|\frac{fl(x\circ y) - x\circ y}{x\circ y}\right| = |\delta|,$$

kar nam olajša računanje napake.

   (a) Predpostavimo, da je $x > y$. Zapišimo izraz v zgornji obliki

$$\begin{aligned} fl\Big((x-y)(x+y)\Big) &= (x-y)(x+y)(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3) \\ &\leq (x-y)(x+y)(1+u)^3 \\ &= (x^2-y^2)(1+3u+3u^2+u^3) \\ &= (x^2-y^2)(1+3u+\mathcal{O}(u^2)), \end{aligned}$$

kjer so $|\delta_i| \leq u,\ i = 1,2,3$. Napaka δ_1 nastopi zaradi napake pri odštevanju, δ_2 zaradi napake pri seštevanju, δ_3 pa zaradi napake pri množenju. Ker je u majhen, sta u^2 in u^3 še precej manjša, zato ju lahko zanemarimo.

Ocenimo $fl\Big((x-y)(x+y)\Big)$ še navzdol,

$$\begin{aligned} fl\Big((x-y)(x+y)\Big) &= (x-y)(x+y)(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3) \\ &\geq (x-y)(x+y)(1-u)^3 \\ &= (x^2-y^2)(1-3u+3u^2-u^3) \\ &= (x^2-y^2)(1-3u+\mathcal{O}(u^2)), \end{aligned}$$

torej velja

$$\left| fl\Big((x-y)(x+y)\Big) \right| \leq (x^2-y^2)(1+3u+\mathcal{O}(u^2))$$

in je

$$\left| \frac{fl\Big((x-y)(x+y)\Big)-(x-y)(x+y)}{(x-y)(x+y)} \right| \leq 3u+\mathcal{O}(u^2).$$

Za $y < x$ zamenjamo vlogi x in y.

(b) Spet si pomagamo z izrekom in zapišemo

$$fl(x^2-y^2) = (x^2(1+\delta_1) - y^2(1+\delta_2))(1+\delta_3),$$

kjer so $|\delta_i| \leq u,\ i = 1,2,3$. Sledi

$$\begin{aligned} fl(x^2-y^2) &= x^2(1+\delta_1)(1+\delta_3) - y^2(1+\delta_2)(1+\delta_3) \\ &= x^2(1+\delta_1+\delta_3+\delta_1\delta_3) - y^2(1+\delta_2+\delta_3+\delta_2\delta_3) \\ &= x^2-y^2+x^2(\delta_1+\delta_3+\delta_1\delta_3) - y^2(\delta_2+\delta_3+\delta_2\delta_3), \end{aligned}$$

od koder dobimo

$$\begin{aligned} \left| \frac{fl(x^2-y^2)-(x^2-y^2)}{x^2-y^2} \right| &= \left| \frac{x^2(\delta_1+\delta_3+\delta_1\delta_3) - y^2(\delta_2+\delta_3+\delta_2\delta_3)}{x^2-y^2} \right| \\ &\leq \frac{x^2(2u+u^2)+y^2(2u+u^2)}{|x^2-y^2|} \\ &= \frac{(2u+u^2)(x^2+y^2)}{|x^2-y^2|}. \end{aligned}$$

Izraz je odvisen od x in y, zato bo tak izračun slabši od prejšnjega. Problem je imenovalec, če je $|x| \approx |y|$.

6. Pokažite, da pri računanju vsote in produkta kompleksnih števil $x, y \in \mathbb{C}$ v premični piki velja

   (a) $fl(x+y) = (x+y)(1+\delta),\ |\delta| \leq u,$

   (b) $fl(x \cdot y) = (x \cdot y)(1+\delta),\ |\delta| \leq \sqrt{2}u(2+u).$

Rešitev. Ker sta $x, y \in \mathbb{C}$, je tudi $\delta \in \mathbb{C}$. Zapišimo $x = a+bi$ in $y = c+di,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

(a) Vsoto kompleksnih števil izračunamo kot $x+y=(a+c)+(b+d)i$, torej porabimo dve seštevanji (množenje z i loči komponenti), zato je

$$\begin{aligned} fl(x+y) &= (a+c)(1+\delta_1)+(b+d)(1+\delta_2)i \\ &= \underbrace{(a+c)+(b+d)i}_{x+y}+(a+c)\delta_1+(b+d)\delta_2 i \\ &= (x+y)+(x+y)\delta \quad \text{(hočemo dobiti)}, \end{aligned}$$

kjer sta $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$, $|\delta_i| \leq u$. Torej je

$$\delta = \frac{(a+c)\delta_1+(b+d)\delta_2 i}{x+y}$$

in zato

$$\begin{aligned} |\delta|^2 &= \frac{(a+c)^2\delta_1^2+(b+d)^2\delta_2^2}{(a+c)^2+(b+d)^2} \\ &\leq \frac{(a+c)^2u^2+(b+d)^2u^2}{(a+c)^2+(b+d)^2} \\ &= \frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{(a+c)^2+(b+d)^2}u^2 \\ &= u^2, \end{aligned}$$

torej je $|\delta| \leq u$.

(b) Produkt kompleksnih števil izračunamo kot $x \cdot y=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+i(ad+bc)$, torej za izračun porabimo 4 realna množenja in 2 realni seštevanji. Zapišemo

$$\begin{aligned} fl(xy) = (ac(1+\delta_1)-bd(1+\delta_2))\,(1+\delta_3)+ \\ +\, i\,(ad(1+\delta_4)+bc(1+\delta_5))\,(1+\delta_6) \end{aligned}$$

in zaradi lažjega računanja definiramo

$(1+\delta_1)(1+\delta_3)=1+\gamma_1 \quad (1+\delta_4)(1+\delta_6)=1+\gamma_3$

$(1+\delta_2)(1+\delta_3)=1+\gamma_2 \quad (1+\delta_5)(1+\delta_6)=1+\gamma_4.$

Od tod dobimo $1+\delta_1+\delta_3+\delta_1\delta_3=1+\gamma_1$, torej velja

$$|\gamma_1| \leq 2u+u^2.$$

Enako oceno dobimo tudi za ostale γ_i. Uporabimo jo v zgornjem izrazu,

$$\begin{aligned} fl(xy) &= ac(1+\gamma_1)-bd(1+\gamma_2)+i\,(ad(1+\gamma_3)+bc(1+\gamma_4)) \\ &= \underbrace{(ac-bd)+i(ad+bc)}_{xy}+ac\gamma_1-bd\gamma_2+i(ad\gamma_3+bc\gamma_4) \\ &= xy(1+\delta), \end{aligned}$$

torej je

$$|xy\delta| = |ac\gamma_1 - bd\gamma_2 + i(ad\gamma_3 + bc\gamma_4)|.$$

Preoblikujmo zgornjo enačbo,

$$\begin{aligned}
|x|^2|y|^2|\delta|^2 &= |ac\gamma_1 - bd\gamma_2|^2 + |ad\gamma_3 + bc\gamma_4|^2 \\
&\leq (|ac| + |bd|)^2(2u + u^2)^2 + (|ad| + |bc|)^2(2u + u^2)^2 \\
&= (2u + u^2)^2 \left((|ac| + |bd|)^2 + (|ad| + |bc|)^2\right) \\
&\leq (2u + u^2)^2 \left((|ac| - |bd|)^2 + (|ac| + |bd|)^2 + \right. \\
&\left. + (|ad| - |bc|)^2 + (|ad| + |bc|)^2\right),
\end{aligned}$$

kjer smo prišteli dva pozitivna člena. Izbrali smo taka člena, da se račun lepo poenostavi,

$$\begin{aligned}
&= (2u + u^2)^2(2|ac|^2 + 2|bd|^2 + 2|ad|^2 + 2|bc|^2) \\
&= 2(2u + u^2)^2(a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2) \\
&= 2(2u + u^2)^2(a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)) \\
&= 2(2u + u^2)^2(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\
&= 2(2u + u^2)^2|x|^2|y|^2,
\end{aligned}$$

torej je

$$|\delta| \leq \sqrt{2}(2u + u^2) = \sqrt{2}(2 + u) \cdot u.$$

7. Zapišite izraze v stabilnejši obliki za računanje in povejte kje so težave s stabilnostjo:

   (a)
   $$x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}),$$

   (b)
   $$\frac{1 - \cos x}{x^2},$$

   (c)
   $$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \log x,$$

   (d)
   $$\sqrt{1+x} - 1.$$

Rešitev.

(a) Težava pri izračunu
$$x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$$
je odštevanje, preuredimo izraz
$$\begin{aligned} x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) &= x\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

(b) Težava pri izračunu
$$\frac{1-\cos x}{x^2}$$
je odštevanje ali deljenje z majhnim številom. Preuredimo izraz
$$\begin{aligned} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} \\ &= \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\ &= \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\ &= \frac{\sin^2 x}{x^2 \cdot 2\cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin x}{x\cos\frac{x}{2}}\right)^2, \end{aligned}$$
kjer smo uporabili $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$, kar dobimo iz
$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 \\ 1+\cos 2x &= 2\cos^2 x \\ 1+\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2}. \end{aligned}$$

(c) Težava pri izračunu
$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\log x$$
je deljenje z majhnim x. Preuredimo izraz
$$\begin{aligned} \log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\log x &= \log\left(\frac{x+1}{x}\right)+\log x \\ &= \log(x+1)-\log x+\log x \\ &= \log(x+1). \end{aligned}$$

(d) Težava pri izračunu
$$\sqrt{1+x}-1$$
je odštevanje. Preuredimo izraz
$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}-1 &= \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+1}\\ &= \frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}+1}\\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x}+1}\end{aligned}$$

8. Dan imamo tangens kota $\tan\alpha = t$. Stabilno izračunajte $\sin\alpha$ in $\cos\alpha$.

Rešitev. Poznamo $\tan\alpha$, želimo izračunati $\sin\alpha$ in $\cos\alpha$.

1. ideja:
$$\begin{gathered} t = \tan\alpha,\\ \alpha = \arctan t,\\ \text{izračunamo } \sin\alpha \text{ in } \cos\alpha.\end{gathered}$$

Tak način računanja ni ekonomičen, saj trikrat računamo vrednost trigonometrične funkcije.

2. ideja:
Uvedemo oznaki $c = \cos\alpha,\ s = \sin\alpha$, dan je $t = \tan\alpha$.
Iz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ dobimo
$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$
torej je
$$\cos\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+t^2}},$$
sinus kota pa dobimo iz
$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Algoritem:
1 $r = \sqrt{1+t^2}$ - račun je stabilen (seštevamo pozitivni števili)
2 $c = \pm\frac{1}{r}$ - ker je $r \geq 1$, nimamo težav (težave so pri deljenju z majhnimi števili)
3 $s = \pm\sqrt{1-c^2}$ - težave imamo, kadar je c blizu ± 1, saj takrat

odštevamo približno enake vrednosti
Predznake $\pm$ izberemo glede na predznak $t = \frac{s}{c}$.

3. ideja:
Popravimo izračun $\sin\alpha$ in dobimo

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{1+t^2}} = \frac{\pm t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\pm t}{r} = t \cdot c.$$

Tretji korak zgornjega algoritma popravimo na $s = t \cdot c$, kar izračunamo stabilno. Ta algoritem porabi manj operacij kot prvotni in vse so elementarne.

9. Dano je kompleksno število $\alpha = u + iv$, kjer sta $u, v \in \mathbb{R}$ in $v \neq 0$. Izračunajte $\sqrt{\alpha} = x + iy$ v realni aritmetiki na stabilen način.

   Rešitev. Izrazimo x in y z danima u in v,

   $$u + iv = \alpha = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

   Od tod dobimo sistem

   $$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2, \\ v &= 2xy. \end{aligned} \tag{2.2}$$

   Iz druge enačbe izrazimo $x = \frac{v}{2y}$ in ga vstavimo v prvo enačbo,

   $$\begin{aligned} u &= \left(\frac{v}{2y}\right)^2 - y^2 \\ 4uy^2 &= v^2 - 4y^4 \\ 4y^4 + 4uy^2 - v^2 &= 0. \end{aligned}$$

   Od tod dobimo rešitve za y^2,

   $$\begin{aligned} y_{1,2}^2 &= \frac{-4u \pm \sqrt{16u^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-v^2)}}{2 \cdot 4} \\ &= -\frac{1}{2}u \pm \frac{1}{2}\sqrt{u^2 + v^2} \\ &= \frac{1}{2}(|\alpha| - u), \end{aligned}$$

   kjer smo označili $|\alpha| = \sqrt{u^2 + v^2}$, rešitev z minusom pa nas ne zanima, saj bi v tem primeru dobili negativno število, mi pa iščemo realen y. Torej je

   $$y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|\alpha| - u)}.$$

Iz prve enačbe sistema (2.2) izrazimo še x in uporabimo rezultat,

$$\begin{aligned} x^2 &= u + y^2 \\ &= u + \frac{1}{2}(|\alpha| - u) \\ &= \frac{1}{2}(|\alpha| + u), \end{aligned}$$

torej je

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|\alpha| + u)}.$$

Algoritem:

$t = |\alpha| = \sqrt{u^2 + v^2}$, račun je stabilen (to uporabimo, da ne računamo večkrat iste vrednosti)

$x = \pm\sqrt{\frac{t+u}{2}}$, tukaj lahko nastopi problem, če je $u < 0$ in $t \approx |u|$.

$y = \pm\sqrt{\frac{t-u}{2}}$, tukaj lahko nastopi problem, če je $u > 0$ in $t \approx u$.

Prvi problem je, kako izbrati predznak pri x in y. Izberemo ga tako, da je predznak xy enak predznaku pri v (druga enačba sistema (2.2)). Izračun x ali y je nestabilen za majhne v, saj je takrat $|u| \approx |\alpha| = t$.

Popravimo algoritem:

```
t = √(u² + v²) (= |α|)
če je u ≥ 0
    x = ±√((t+u)/2)
    y = v/(2x)
če je u < 0
    y = ±√((t−u)/2)
    x = v/(2y)
```

Želimo se izogniti večkratnemu računanju istega izraza. V tem primeru smo prihranili en izračun kvadratnega korena. Problemi z izračunom lahko nastanejo, če je x ali y blizu 0. Temu se ne moremo izogniti.

Poglavje 3

Reševanje nelinearnih enačb

3.1 Bisekcija

Dana je zvezna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iščemo rešitve enačbe $f(x) = 0$. Vemo, da velja naslednji izrek:
Naj bo $f(x)$ zvezna funkcija na $[a, b]$ in $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potem ima $f(x)$ na intervalu (a, b) ničlo, tj. obstaja tak $\xi \in (a, b)$, da je $f(\xi) = 0$.
Algoritem:
Dani so a, b, ε, f; metoda vrne c.

```
f_a = f(a)
f_b = f(b)
e = b − a
if sign(f_a) = sign(f_b) stop
repeat
    e = 1/2 e
    c = a + e
    f_c = f(c)
    if sign(f_a) = sign(f_c)
        a = c
        f_a = f_c
    else
        b = c
        f_b = f_c
    end
until |e| < ε
```

Točka c, ki jo dobimo s tem algoritmom, je približek za ničlo, ki se od prave ničle razlikuje za manj kot ε.
Slabosti algoritma so:

- Če ima f na (a, b) več ničel, nimamo vpliva na to, katero ničlo dobimo.

- Algoritem ni uporaben za iskanje sodih ničel.

3.1.1 Zgled

Z bisekcijo želimo poiskati približek za $\sqrt{3}$. Vemo, da je $\sqrt{3} \doteq 1.73205$. Bisekcija vrne približke za ničle funkcije na danem intervalu. Ker želimo najti približek za $\sqrt{3}$, hočemo najti funkcijo, katere ničla je enaka $\sqrt{3}$. Izberemo funkcijo

$$f(x) = x^2 - 3.$$

Zdaj poiščemo tak interval, da bo na robovih intervala funkcija različno predznačena. Izberemo lahko $[1, 2]$, saj je $f(1) = -2$, $f(2) = 1$. Torej je $a = 1$, $b = 2$. Zdaj lahko naredimo en korak bisekcije:

```
1    f_a = -2
2    f_b = 1
3    c = (a+b)/2 = 3/2
4    f_c = f(c) = -3/4.
```

Zdaj imamo dve možnosti: Ničla je lahko na intervalu $[a, c] = \left[1, \frac{3}{2}\right]$ ali na intervalu $[c, b] = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Če pogledamo vrednosti funkcije v vseh treh točkah, vidimo, da je funkcija različno predznačena na intervalu $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, torej je v naslednjem koraku bisekcije $a = \frac{3}{2}$, $b = 2$:

```
1    f_a = -3/4
2    f_b = 1
3    c = (a+b)/2 = 7/4
4    f_c = f(c) = 1/16.
```

Ničla je na intervalu $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$. Lahko nadaljujemo z bisekcijo na tem intervalu, če pa smo zadovoljni z natančnostjo $\left|\frac{\frac{7}{4} - \frac{3}{2}}{2}\right| = 0.125$, je približek za ničlo razpolovišče zadnjega intervala

$$c = \frac{\frac{7}{4} + \frac{3}{2}}{2} = 1.625.$$

Poglejmo še, kaj vrne program `bisekcija`[1]. Za dano funkcijo (definirano z `f = @(x) x.^2 - 3`), začetni interval $[1, 2]$ in natančnost 10^{-2}, dobimo zaporedje približkov $x_0 = 1.5000$, $x_1 = 1.7500$, $x_2 = 1.6250$, $x_3 = 1.6875$, $x_4 = 1.7188$, $x_5 = 1.7344$, $x_6 = 1.7266$, rešitev pa je $\sqrt{3} \doteq 1.7305$.

3.2 Navadna iteracija

Iščemo rešitev α enačbe $f(x) = 0$. Najprej zapišemo problem $f(x) = 0$ v obliki $x = g(x)$ za ustrezno *iteracijsko funkcijo* $g(x)$. Za rešitev velja $g(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$. Če je $\alpha = g(\alpha)$, pravimo, da je α *negibna točka* funkcije g.
Algoritem:

`izberi` x_0
$r = 1, 2, \ldots$
  $x_r = g(x_{r-1})$

Pri primerno izbranem *začetnem približku* x_0 in primerno izbrani funkciji g zaporedje konvergira k negibni točki funkcije g, ki je ničla funkcije f.
Negibne točke delimo na

- *odbojne*, če je $|g'(\alpha)| \geq 1$,
- *privlačne*, če je $|g'(\alpha)| < 1$. V tem primeru zaporedje konvergira k ničli, saj velja

Izrek. Naj bo g zvezno odvedljiva na $I = [\alpha - d, \alpha + d]$, kjer je $\alpha = g(\alpha)$, in naj velja $|g'(x)| \leq m < 1$ za vse $x \in I$. Potem za poljuben $x_0 \in I$ zaporedje $x_{r+1} = g(x_r)$ konvergira proti α.
Zaporedje x_r konvergira k α z *redom* p, če obstajata konstanti $0 < c_1 < c_2$, da velja

$$c_1|x_r - \alpha|^p \leq |x_{r+1} - \alpha| \leq c_2|x_r - \alpha|^p.$$

Če je $p = 1$ imamo *linearno konvergenco,* za $p = 2$ *kvadratično, ...*
Izrek. Če je funkcija $g(x)$ $p-$krat zvezno odvedljiva v okolici negibne točke α in je $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \cdots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0,\ g^{(p)}(\alpha) \neq 0$, potem je red konvergence zaporedja $x_{r+1} = g(x_r)$ enak p.
Pri računanju reda konvergence se pri odvajanju velikokrat zgodi, da je del funkcije v točki α enak 0. Recimo, da lahko funkcijo $g(x)$ zapišemo v obliki $g(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$, kjer je $h_1(\alpha) = 0$. Takrat uporabimo trik. Funkcijo g odvajamo

$$g'(x) = (h_1(x) \cdot h_2(x))' = h_1(x) \cdot h_2'(x) + h_1'(x)h_2(x),$$

in, ko vstavimo α, dobimo

$$g'(\alpha) = h_1'(\alpha)h_2(\alpha).$$

Na ta način se lahko izognemo nepotrebnemu delu pri odvajanju. Celotno funkcijo moramo odvajati le v primeru, ko je $g'(\alpha) = 0$.
Kako poiščemo iteracijsko funkcijo? Primeri:

- $g_1(x) = x - f(x)$,
- $g_2(x) = x - c \cdot f(x),\ c \neq 0$,
- $g_3(x) = x - h(x) \cdot f(x),\ h(\alpha) \neq 0$.

3.2.1 Zgled

Z navadno iteracijo želimo poiskati rešitve enačbe

$$x^3 - 5x + 1 = 0.$$

V Octave-u z ukazom `roots([1,0,-5,1])` poiščemo ničle, ki so

$$\begin{aligned} x_1 &= -2.330058739567982, \\ x_2 &= 2.128419063844577, \\ x_3 &= 0.201639675723405. \end{aligned}$$

Prva iteracijska funkcija, ki jo izpeljemo, je

$$g(x) = \frac{1 + x^3}{5}.$$

Na primerih si oglejmo, kaj se zgodi z zaporedjem pri različnih začetnih približkih. Uporabimo funkcijo `iteracija` [1].

x_0	0.000000000000000	2.000000000000000	3.00000000000000e+000
x_1	0.200000000000000	1.800000000000000	5.60000000000000e+000
x_2	0.201600000000000	1.366400000000000	3.53232000000000e+001
x_3	0.201638708019200	0.710227139788800	8.81495237522063e+003
x_4	0.201639652116243	0.271650922681262	1.36990328299253e+011
x_5	0.201639675147505	0.204009253796415	5.14161690798161e+032
x_6	0.201639675709356	0.201698163874077	2.71849877008952e+097
x_7	0.201639675723062	0.201641102963663	4.01806925772563e+291
x_8	0.201639675723396	0.201639710541370	`Inf`
x_9	0.201639675723404	0.201639676572794	`Inf`
x_{10}	0.201639675723405	0.201639675744126	
x_{11}	0.201639675723405	0.201639675723910	
x_{12}		0.201639675723417	
x_{13}		0.201639675723405	
x_{14}		0.201639675723405	

Za začetni približek $x_0 = 0$ dobimo zaporedje, ki očitno konvergira k rešitvi x_2. Za začetni približek $x_0 = 2$ dobimo zaporedje, ki spet konvergira k rešitvi

x_2, vendar počasneje, saj je bil začetni približek slabši. Za začetni približek $x_0 = 3$ dobimo zaporedje, ki divergira.

Kje nam konvergenco zagotavlja konvergenčni izrek? Poglejmo, kje je odvod iteracijske funkcije po absolutni vrednosti manjši od 1,

$$g'(x) = \frac{3x^2}{5},\ |g'(x)| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| < \sqrt{\frac{5}{3}} \doteq 1.291.$$

Torej nam konvergenčni izrek zagotavlja konvergenco zaporedja le za $|x| < 1.291$. Kot vidimo, lahko zaporedje konvergira tudi na večjem intervalu (v našem drugem primeru).

Drugih dveh rešitev enačbe s to iteracijsko funkcijo ne moremo dobiti, saj tam zaporedje ne konvergira. Sestavimo novo iteracijsko funkcijo

$$\begin{aligned} x^3 - 5x + 1 &= 0 \\ x^3 &= 5x - 1 \\ x &= \sqrt[3]{5x - 1}. \end{aligned}$$

Nova iteracijska funkcija je torej

$$g(x) = \sqrt[3]{5x - 1}.$$

Oglejmo si primer. Za začetna približka $x_0 = -1$ in $x_0 = 1$ dobimo zaporedji, ki konvergirata, vendar zelo počasi.

x_0	-1.00000000000000	1.00000000000000
x_1	-1.81712059283214	1.58740105196820
x_2	-2.16056476459804	1.90717556826722
x_3	-2.27681970564885	2.04369491208149
x_4	-2.31359923956675	2.09678074854246
x_5	-2.32499494801901	2.11671495967476
x_6	-2.32850320095544	2.12410433660789
x_7	-2.32958111700741	2.12683047319964
x_8	-2.32991210810294	2.12783445448731
x_9	-2.33001372526036	2.12820396200576
x_{10}	-2.33004492083705	2.12833992408246
x_{11}	-2.33005449743809	2.12838994761394
x_{12}	-2.33005743730344	2.12840835181395
x_{13}	-2.33005833979421	2.12841512283873
x_{14}	-2.33005861684403	2.12841761393191
x_{15}	-2.33005870189375	2.12841853041582
x_{16}	-2.33005872800262	2.12841886759401
x_{17}	-2.33005873601761	2.12841899164321
x_{18}	-2.33005873847807	2.12841903728141
x_{19}	-2.33005873923340	2.12841905407188
x_{20}	-2.33005873946527	2.12841906024916
x_{21}	-2.33005873953645	2.12841906252181
x_{22}	-2.33005873955830	2.12841906335793
x_{23}	-2.33005873956501	2.12841906366554
x_{24}	-2.33005873956707	2.12841906377871
x_{25}	-2.33005873956770	2.12841906382034
x_{26}	-2.33005873956790	2.12841906383566
x_{27}	-2.33005873956796	2.12841906384130
x_{28}	-2.33005873956797	2.12841906384337
x_{29}	-2.33005873956798	2.12841906384413
x_{30}	-2.33005873956798	2.12841906384441
x_{31}		2.12841906384452
x_{32}		2.12841906384456
x_{33}		2.12841906384457
x_{34}		2.12841906384457
x_{35}		2.12841906384458
x_{36}		2.12841906384458

Poglejmo, kje nam izrek zagotavlja konvergenco pri tej iteracijski funkciji,

$$g'(x) = \frac{5}{3\sqrt[3]{(5x-1)^2}}, \quad |g'(x)| < 1$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{5}{3\sqrt[3]{(5x-1)^2}}\right| &< 1 \\
\frac{1}{\sqrt[3]{(5x-1)^2}} &< \frac{3}{5} \\
\frac{1}{(5x-1)^2} &< \left(\frac{3}{5}\right)^3 \\
\frac{1}{|5x-1|} &< \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3} \\
|5x-1| &> \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3}}.
\end{aligned}$$

Za $x \geq \frac{1}{5}$ mora biti

$$5x - 1 > \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3}} \quad \Longrightarrow \quad x > \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3}}\right) \doteq 0.63033,$$

sicer pa

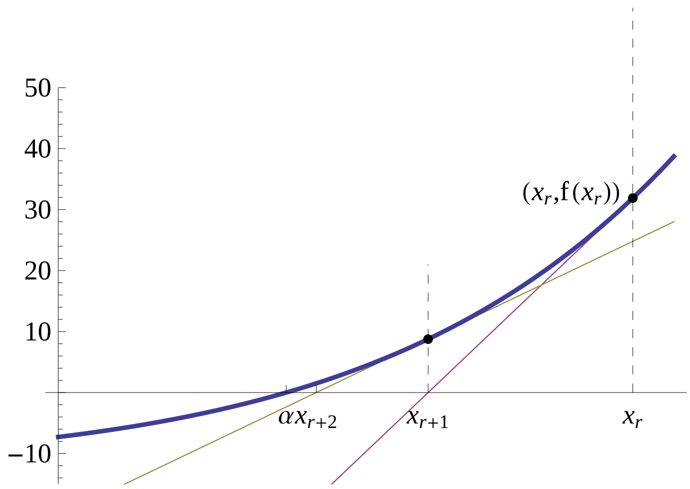
$$-5x + 1 > \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3}} \quad \Longrightarrow \quad x < \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3}}\right) \doteq -0.23033,$$

torej iteracija konvergira za vse $x \in (-\infty, -0.2303) \cup (0.6303, \infty)$. S to funkcijo lahko izračunamo preostali rešitvi enačbe.

3.3 Tangentna metoda

Iz približka x_r dobimo nov približek x_{r+1} kot presečišče tangente na krivuljo v točki $(x_r, f(x_r))$ z abscisno osjo (slika 3.1).
Enačba tangente na krivuljo v tej točki je

$$y - f(x_r) = f'(x_r)(x - x_r),$$



Slika 3.1: Grafična izpeljava tangentne metode.

iščemo pa presečišče z x osjo, točko $(x_{r+1}, 0)$. Torej mora veljati

$$0 - f(x_r) = f'(x_r)(x_{r+1} - x_r).$$

Nov približek iz starega dobimo kot

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}.$$

Opazimo še, da je tangentna metoda poseben primer navadne iteracije za iteracijsko funkcijo

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Lastnosti tangentne metode:

- Vsaka ničla je privlačna točka ($|g'(\alpha)| < 1$ za vsako ničlo), torej jo lahko izračunamo z dovolj dobrim začetnim približkom.

- V bližini večkratne ničle ($f'(\alpha) = 0$) je konvergenca linearna.

- Če je α enostavna ničla, je $f'(\alpha) \neq 0$ in $g'(\alpha) = 0$, zato je konvergenca vsaj kvadratična.

- Če je α enostavna ničla in $f''(\alpha) = 0$, je konvergenca vsaj kubična.

3.3.1 Zgled

Iščemo rešitve enačbe

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0.$$

Natančni rešitvi sta $\alpha_1 = 1$ (dvojna ničla) in $\alpha_2 = -1$ (enostavna ničla). Izpeljimo tangentno metodo za ta primer. Tangentno metodo dobimo kot

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)},$$

v tem primeru torej

$$x_{r+1} = x_r - \frac{x_r^3 - x_r^2 - x_r + 1}{3x_r^2 - 2x_r - 1}.$$

Zdaj uporabimo iteracijsko funkcijo $g(x) = x - \frac{x^3-x^2-x+1}{3x^2-2x-1}$ v Octaveu (uporabimo program `iteracija` [1]).
Za začetna približka $x_0 = 0.5$ in $x_0 = -0.5$ dobimo zaporedji približkov

x_1	0.500000000000000	-0.500000000000000
x_2	0.800000000000000	-2.000000000000000
x_3	0.905882352941176	-1.400000000000000
x_4	0.954132539091586	-1.100000000000000
x_5	0.977338616437368	-1.008695652173913
x_6	0.988734610384883	-1.000074640791193
x_7	0.994383303992375	-1.000000005570624
x_8	0.997195612087415	-1.000000000000000
x_9	0.998598791189703	-1.000000000000000
x_{10}	0.999299641276319	
x_{11}	0.999649881983167	
x_{12}	0.999824956318402	
x_{13}	0.999912481989770	
x_{14}	0.999956241952312	
x_{15}	0.999978121215269	
x_{16}	0.999989060667537	
x_{17}	0.999994530350836	
x_{18}	0.999997265177114	
x_{19}	0.999998632588296	
x_{20}	0.999999316282907	
x_{21}	0.999999658134565	
x_{22}	0.999999829036609	
x_{23}	0.999999914594049	
x_{24}	0.999999957166969	
x_{25}	0.999999978550793	
x_{26}	0.999999988902906	

Začetni približek $x_0 = -0.5$ da mnogo hitrejšo konvergenco, saj je ničla -1 enostavna in je red konvergence kvadratičen.

3.4 Laguerrova metoda

Iščemo rešitev enačbe $p(x) = 0$, kjer je p polinom stopnje n. Najprej izračunamo

$$\begin{aligned} s_1(x_r) &= \frac{p'(x_r)}{p(x_r)}, \\ s_2(x_r) &= -s_1'(x_r) = \frac{(p'(x_r))^2 - p(x_r)p''(x_r)}{(p(x_r))^2}. \end{aligned}$$

Nov približek dobimo z

$$x_{r+1} = x_r - \frac{n}{s_1(x_r) \pm \sqrt{(n-1)(ns_2(x_r) - s_1^2(x_r))}}, \tag{3.1}$$

kjer predznak izberemo tako, da je absolutna vrednost imenovalca največja. Konvergenca metode je v bližini enostavne ničle kubična, v bližini večkratne ničle pa linearna.

3.5 Naloge

1. Z bisekcijo poiščite približek za $\sqrt[3]{20}$. Naredite tri korake.

   Rešitev. Najprej izberemo funkcijo f, katere vrednosti je enostavno izračunati in ki ima ničlo $\sqrt[3]{20}$. Naj bo to funkcija

   $$f(x) = x^3 - 20.$$

   Zdaj poiščemo tak interval, da bo na robovih intervala funkcija f različno predznačena. Izberemo $[1, 4]$, torej $a = 1$, $b = 4$, in naredimo en korak bisekcije:

   1 $f_a = -19$
   2 $f_b = 44$
   3 $c = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2}$
   4 $f_c = f(c) = -\frac{35}{8}$.

   Vidimo, da je funkcija različno predznačena na robovih intervala $\left[\frac{5}{2}, 4\right]$, torej je v naslednjem koraku bisekcije $a = \frac{5}{2}$, $b = 4$:

   1 $f_a = -\frac{35}{8}$

2 $\quad f_b = 44$
3 $\quad c = \frac{a+b}{2} = \frac{13}{4}$
4 $\quad f_c = f(c) = \frac{917}{64}$.
Funkcija je različno predznačena na robovih intervala $\left[\frac{5}{2}, \frac{13}{4}\right]$, torej je v naslednjem koraku bisekcije $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{13}{4}$:
1 $\quad f_a = -\frac{35}{8}$
2 $\quad f_b = \frac{917}{64}$
3 $\quad c = \frac{a+b}{2} = \frac{23}{8}$
4 $\quad f_c = f(c) = \frac{1927}{512}$.
Končali smo tretji korak bisekcije in vrnemo približek med a in c

$$c = \frac{\frac{5}{2} + \frac{23}{8}}{2} \doteq 2.6875.$$

2. Z bisekcijo poiščite približek za $\sqrt{2}$ na dve decimalki natančno.

Rešitev. Najprej izberemo funkcijo f, katere vrednosti je enostavno izračunati in ki ima ničlo $\sqrt{2}$. Naj bo to funkcija

$$f(x) = x^2 - 2.$$

Zdaj poiščemo tak interval, da bo na robovih intervala funkcija f različno predznačena. Izberemo $[1, 2]$, torej $a = 1$, $b = 2$, in naredimo en korak bisekcije:
1 $\quad f_a = -1$
2 $\quad f_b = 2$
3 $\quad c = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}$
4 $\quad f_c = f(c) = \frac{1}{4}$.
Vidimo, da je funkcija različno predznačena na robovih intervala $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, torej je v naslednjem koraku bisekcije $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$:
1 $\quad f_a = -1$
2 $\quad f_b = \frac{1}{4}$
3 $\quad c = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{4}$
4 $\quad f_c = f(c) = -\frac{7}{16}$.
Funkcija je različno predznačena na robovih intervala $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$, torej je v naslednjem koraku bisekcije $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{3}{2}$:
1 $\quad f_a = -\frac{7}{16}$
2 $\quad f_b = \frac{1}{4}$
3 $\quad c = \frac{a+b}{2} = \frac{11}{8}$
4 $\quad f_c = f(c) = -\frac{7}{64}$.
V naslednjem koraku sta $a = \frac{11}{8}$ in $b = \frac{3}{2}$:

1 $\quad f_a = -\frac{7}{64}$
2 $\quad f_b = \frac{1}{4}$
3 $\quad c = \frac{a+b}{2} = \frac{23}{16}$
4 $\quad f_c = f(c) = \frac{17}{256}$.
Zdaj sta $a = \frac{11}{8}$ in $b = \frac{23}{16}$:
1 $\quad f_a = -\frac{7}{64}$
2 $\quad f_b = \frac{17}{256}$
3 $\quad c = \frac{a+b}{2} = \frac{45}{32}$
4 $\quad f_c = f(c) = -\frac{23}{1024}$.
Razlika med a in b je enaka $a - b = 0.0625$, torej je zadnji približek $c \doteq 1.40625$ natančen na eno decimalko. Postopek nadaljujemo, dokler ni razlika med a in b manjša od 0.01 in dobimo približek $c \doteq 1.41797$, natančen na dve decimalki.

3. Z uporabo programa `bisekcija` [1] poiščite približek za ničlo funkcje

$$f(x) = e^{-x}(3.2 \sin x - 0.5 \cos x)$$

na tri decimalke natančno.

Rešitev. Iščemo interval, na katerem je funkcija f različno predznačena. Določimo ga lahko s poskušanjem ali iz grafa funkcije. Definirajmo funkcijo z `f = @(x) exp(-x)*(3.2*sin(x) - 0.5*cos(x))` in poskusimo `f(3)` in `f(4)`. Lahko izberemo interval $[3, 4]$ in poženemo program z ukazom `bisekcija(f, 3, 4, 0.001)`. Približek za ničlo funkcije f je 3.2964.

4. Ali konvergenčni izrek zagotavlja konvergenco zaporedja

$$x_{r+1} = \frac{1}{10}\left(1 + x_r^5\right),$$

če izberemo začetni približek $x_0 = 0$? Kolikšen je red konvergence?

Rešitev. Izračunajmo odvod iteracijske funkcije $g(x) = \frac{1}{10}(1 + x^5)$,

$$g'(x) = \frac{1}{10} \cdot 5x^4 = \frac{1}{2}x^4,$$

in vstavimo vrednost $x = 0$. Ker je $g'(0) = 0 < 1$, imamo konvergenco v okolici $x_0 = 0$. Da dobimo red konvergence, spet odvajamo,

$$g''(x) = 2x^3,\ g''(0) = 0,$$
$$g'''(x) = 6x^2,\ g'''(0) = 0,$$
$$g^{(4)}(x) = 12x,\ g^{(4)}(0) = 0,$$
$$g^{(5)}(x) = 12,\ g^{(5)}(0) = 12 \neq 0,$$

torej je red konvergence enak 5.

5. Poiščite rešitve danih enačb in ugotovite red konvergence iteracije:

(a)
$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right),$$
izračunajte še interval konvergence z uporabo konvergenčnega izreka,

(b)
$$x = \frac{x(x^2+12)}{3x^2+4},$$

(c)
$$x = \frac{x(1-\ln x)}{1+x}.$$

Rešitev.

(a) Najprej izračunajmo rešitve enačbe,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right) \\ 2x &= x + \frac{4}{x} \\ x - \frac{4}{x} &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ (x-2)(x+2) &= 0, \end{aligned}$$

rešitvi sta torej $x_{1,2} = \pm 2$.
Odvajajmo iteracijsko funkcijo $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$,

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{x^2}\right).$$

V enačbo vstavimo ± 2 in dobimo

$$g'(\pm 2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{4}\right) = 0.$$

Še enkrat odvajajmo,

$$g''(x) = \frac{1}{2}(-4)(-2x^{-3}) = 4x^{-3},$$

vstavimo ± 2 in vidimo

$$g''(\pm 2) = \pm\frac{1}{2} \neq 0,$$

torej je konvergenca kvadratična (red je 2).

Poglejmo še, kje je $|g'(x)| < 1$ (po konvergenčnem izreku za take začetne približke x iteracijsko zaporedje konvergira),

$$\begin{aligned} |g'(x)| &< 1 \\ \left|\frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)\right| &< 1 \\ \left|1 - \frac{4}{x^2}\right| &< 2 \end{aligned}$$

i. Najprej izračunajmo, kje je izraz pod absolutno vrednostjo nenegativen,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{4}{x^2} &\geq 0 \\ -\frac{4}{x^2} &\geq -1 \\ \frac{4}{x^2} &\leq 1 \\ 4 &\leq x^2 \\ |x| &\geq 2. \end{aligned}$$

V tem primeru dobimo naslednjo neenačbo, ki jo rešimo

$$\begin{aligned} 1 - \frac{4}{x^2} &< 2 \\ -\frac{4}{x^2} &< 1 \\ \frac{4}{x^2} &> -1 \\ 4 &> -x^2 \\ -4 &< x^2, \end{aligned}$$

kar je vedno izpolnjeno. Rešitev je $|x| \geq 2$.

ii. V primeru, ko je izraz pod absolutno vrednostjo negativen (tj. za $|x| < 2$), dobimo

$$\begin{aligned}
-1 + \frac{4}{x^2} &< 2 \\
\frac{4}{x^2} &< 3 \\
4 &< 3x^2 \\
\frac{4}{3} &< x^2 \\
|x| &> \frac{2}{\sqrt{3}} \\
|x| &> \frac{2\sqrt{3}}{3} \doteq 1.1547.
\end{aligned}$$

Rešitev je torej $\frac{2\sqrt{3}}{3} < |x| < 2$.

Iteracijsko zaporedje konvergira za začetne približke

$$x \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right).$$

Če rešitev testiramo v Octaveu, vidimo, da iteracija res konvergira k točkama ± 2, odvisno od začetnega približka. Če vzamemo začetni približek blizu 0, vidimo, da iteracija ne konvergira.

(b) Izračunajmo rešitve enačbe,

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x(x^2+12)}{3x^2+4} \\
x(3x^2+4) &= x(x^2+12) \\
x(3x^2+4-x^2-12) &= 0 \\
x(2x^2-8) &= 0 \\
2x(x^2-4) &= 0 \\
2x(x-2)(x+2) &= 0,
\end{aligned}$$

torej so rešitve $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$.

Odvajajmo iteracijsko funkcijo $g(x) = \frac{x(x^2+12)}{3x^2+4}$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\left((x^2+12) + x\cdot(2x)\right)(3x^2+4) - x(x^2+12)\cdot 6x}{(3x^2+4)^2} \\
&= \frac{(3x^2+12)(3x^2+4) - 6x^4 - 12\cdot 6x^2}{(3x^2+4)^2} \\
&= \frac{9x^4 + 12x^2 + 12\cdot 3x^2 + 4\cdot 12 - 6x^4 - 12\cdot 6x^2}{(3x^2+4)^2} \\
&= \frac{3x^4 - 24x^2 + 48}{(3x^2+4)^2} \\
&= \frac{3(x^2-4)^2}{(3x^2+4)^2} \\
&= \frac{3(x-2)^2(x+2)^2}{(3x^2+4)^2}
\end{aligned}$$

in poglejmo vrednosti odvoda v rešitvah enačbe,

$$\begin{aligned}
g'(0) &= \frac{3\cdot 4\cdot 4}{16} = 3 \geq 1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \text{ nimamo konvergence v okolici točke 0}, \\
g'(2) &= 0 \Rightarrow \text{ imamo vsaj kvadratično konvergenco v okolici 2}, \\
g'(-2) &= 0 \Rightarrow \text{ imamo vsaj kvadratično konvergenco v okolici -2}.
\end{aligned}$$

Še enkrat odvajajmo,

$$\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{(3\cdot 2(x-2)(x+2)^2 + 3\cdot(x-2)^2\cdot 2(x+2))\cdot(3x^2+4)^2 -}{(3x^2+4)^4} \\
&\quad \frac{-3(x-2)^2(x+2)^2\cdot 2(3x^2+4)\cdot 6x}{} \\
&= \frac{6(x-2)(x+2)(x+2+x-2)\cdot(3x^2+4)^2 -}{(3x^2+4)^4} \\
&\quad \frac{-36x(x-2)^2(x+2)^2(3x^2+4)}{} \\
&= \frac{12x(x-2)(x+2)(3x^2+4)(3x^2+4-3(x-2)(x+2))}{(3x^2+4)^4} \\
&= \frac{12x(x-2)(x+2)(3x^2+4-3(x^2-4))}{(3x^2+4)^3} \\
&= \frac{12x(x-2)(x+2)\cdot 16}{(3x^2-4)^3} \\
&= \frac{192x(x-2)(x+2)}{(3x^2+4)^3},
\end{aligned}$$

torej velja

$$g''(\pm 2) = 0 \Rightarrow \text{ vsaj kubična konvergenca v okolici } \pm 2.$$

Uporabimo trik s funkcijo $h_1(x) = (x-2)(x+2)$, torej je $h_1'(x) = x + 2 + x - 2 = 2x$, in

$$\begin{aligned} g'''(\pm 2) &= \frac{192 \cdot (\pm 2)}{(3 \cdot 4 + 4)^3} \cdot (\pm 4) \\ &= \frac{192 \cdot 8}{16^3} = \frac{3}{8} \neq 0, \end{aligned}$$

zato je konvergenca kubična v okolici ± 2 (red je 3).

(c) Poiščimo rešitve enačbe,

$$\begin{aligned} x &= \frac{x(1 - \ln x)}{1 + x} \\ x(1 + x) &= x(1 - \ln x) \\ x + x^2 &= x - x \ln x \\ x^2 + x \ln x &= 0 \\ x(x + \ln x) &= 0. \end{aligned}$$

Rešitvi enačbe sta $x_1 = 0$ in $x_2 \doteq 0.5671$. Rešitev x_1 ni smiselna, saj $\ln 0$ ne obstaja. Odvajajmo iteracijsko funkcijo $g(x) = \frac{x(1-\ln x)}{1+x}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\left((1 - \ln x) + x(-\frac{1}{x})\right)(1 + x) - x(1 - \ln x)}{(1 + x)^2} \\ &= \frac{-\ln x(1 + x) - x(1 - \ln x)}{(1 + x)^2} \\ &= \frac{-\ln x - x \ln x - x + x \ln x}{(1 + x)^2} \\ &= -\frac{x + \ln x}{(1 + x)^2}. \end{aligned}$$

Vstavimo točko x_2 in dobimo $g'(x_2) = 0$, saj je $x_2 + \ln x_2 = 0$, ker je x_2 rešitev enačbe. Uporabimo trik s funkcijo $h_1(x) = x + \ln x$, torej dobimo $h_1'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, in

$$\begin{aligned} g''(x_2) &= -\frac{1}{(1 + x_2)^2}\left(1 + \frac{1}{x_2}\right) \\ &= -\frac{1 + x_2}{x_2(1 + x_2)^2} \\ &= -\frac{1}{x_2(1 + x_2)} \neq 0, \end{aligned}$$

zato imamo kvadratično konvergenco (red je 2).

6. Rešujemo enačbo $e^x = \frac{1}{x}$. Izračunajte red konvergence iteracije
$$x_{r+1} = \frac{x_r(1+x_r)}{1+2x_r+\ln x_r}.$$

Rešitev. Najprej poglejmo, kako dobimo iteracijsko funkcijo,
$$\begin{aligned}
e^x &= \frac{1}{x}\\
x &= \ln\frac{1}{x}\\
x &= -\ln x\\
-x &= \ln x\\
x &= 2x + \ln x\\
1 + x &= 1 + 2x + \ln x\\
\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1+2x+\ln x}\\
\frac{x}{1+x} &= \frac{x}{1+2x+\ln x}\\
x &= \frac{x(1+x)}{1+2x+\ln x}.
\end{aligned}$$
Odvajajmo iteracijsko funkcijo $g(x) = \frac{x(1+x)}{1+2x+\ln x}$,
$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{((1+x)+x)(1+2x+\ln x) - x(1+x)(2+\frac{1}{x})}{(1+2x+\ln x)^2}\\
&= \frac{(1+2x)(1+2x+\ln x) - (1+x)(2x+1)}{(1+2x+\ln x)^2}\\
&= \frac{(1+2x)(1+2x+\ln x-1-x)}{(1+2x+\ln x)^2}\\
&= \frac{(1+2x)(x+\ln x)}{(1+2x+\ln x)^2}.
\end{aligned}$$
Označimo rešitev enačbe z α. Torej velja
$$\begin{aligned}
e^\alpha &= \frac{1}{\alpha}\\
\alpha &= \ln\frac{1}{\alpha}\\
\alpha &= -\ln\alpha\\
\alpha + \ln\alpha &= 0,
\end{aligned}$$

kar uporabimo, ko α vstavimo v enačbo za odvod,

$$g'(\alpha) = \frac{(1+2\alpha)(\alpha+\ln\alpha)}{(1+2\alpha+\ln\alpha)^2} = 0.$$

Uporabimo trik s funkcijo $h_1(x) = x + \ln x$, sledi $h_1'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, in

$$\begin{aligned} g''(\alpha) &= \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{1+2\alpha}{(1+2\alpha+\ln\alpha)^2} \\ &= \frac{1+\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1+2\alpha}{(1+\alpha)^2} \\ &= \frac{1+2\alpha}{\alpha(1+\alpha)} \neq 0, \end{aligned}$$

ker $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ (vstavimo v enačbo in vidimo, da $e^{-1/2} \neq -2$). Torej je red konvergence enak 2.

7. V enačbi $x^2 + \ln x + a = 0$ je a določen tako, da je rešitev enačbe enaka $\alpha = \frac{1}{2}$. Enačbo lahko zapišemo v obliki $x = g(x)$, kjer je g ena od danih funkcij:

   (a)
   $$g_1(x) = \sqrt{-\ln x - a},$$

   (b)
   $$g_2(x) = e^{-(a+x^2)},$$

   (c)
   $$g_3(x) = \frac{1}{3}\left(x + 2e^{-(a+x^2)}\right).$$

   Izpeljite dano iteracijsko funkcijo in raziščite konvergenco zaporedja približkov $x_{r+1} = g(x_r)$ pri poljubnem začetnem približku.

   Rešitev.

   (a) Najprej izpeljimo iteracijsko funkcijo,

   $$\begin{aligned} x^2 &= -\ln x - a \\ x &= \sqrt{-\ln x - a}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

   Odvajajmo g_1,

   $$\begin{aligned} g_1'(x) &= \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{-\ln x - a}} \\ &= \frac{-1}{2x\sqrt{-\ln x - a}} \end{aligned}$$

in preverimo, ali je $|g_1'(\alpha)| < 1$, kjer je $\alpha = \frac{1}{2}$ rešitev enačbe. Pri tem uporabimo enakost $\alpha^2 = -\ln\alpha - a$, ki sledi iz enačbe (3.2). Ocenimo odvod v α,

$$\begin{aligned}
|g_1'(\alpha)| &= \frac{1}{2\alpha\sqrt{-\ln\alpha - a}} \\
&= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha^2}} \\
&= \frac{1}{2\alpha|\alpha|} \\
&= \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} \\
&= 2 > 1.
\end{aligned}$$

Iteracijsko zaporedje ne konvergira.

(b) Izpeljimo iteracijsko funkcijo,

$$\begin{aligned}
x^2 + \ln x + a = 0& \\
\ln x &= -(x^2 + a) \\
x &= e^{-(x^2+a)}.
\end{aligned}$$

Odvajajmo g_2,

$$g_2'(x) = e^{-(x^2+a)} \cdot (-2x)$$

in poglejmo vrednost v $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$|g_2'(\alpha)| = |e^{\ln\alpha}| \cdot |-2\alpha| = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} < 1,$$

kjer smo spet uporabili, da je α rešitev enačbe in zato velja $\alpha^2 + \ln\alpha + a = 0 \Rightarrow \ln\alpha = -(\alpha^2 + a)$. Po konvergenčnem izreku sledi, da zaporedje konvergira.

(c) Izpeljimo iteracijsko funkcijo, uporabimo točko 7b,

$$\begin{aligned}
x &= e^{-(x^2+a)} \\
2x &= 2e^{-(x^2+a)} \\
x + 2x &= x + 2e^{-(x^2+a)} \\
3x &= x + 2e^{-(x^2+a)} \\
x &= \frac{1}{3}\left(x + 2e^{-(x^2+a)}\right).
\end{aligned}$$

Odvajajmo g_3,

$$g_3'(x) = \frac{1}{3}\left(1 - 4xe^{-(x^2+a)}\right)$$

in vstavimo $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$|g_3'(\alpha)| = \left|\frac{1}{3}(1 - 4\alpha \cdot \alpha)\right| = \left|\frac{1}{3}(1 - 4\alpha^2)\right| = 0,$$

torej ima metoda vsaj kvadratično konvergenco.

Izračunajmo še drugi odvod,

$$\begin{aligned} g_3''(x) &= \frac{1}{3}\left(-4e^{-(x^2+a)} - 4xe^{-(x^2+a)} \cdot (-2x)\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 4e^{-(x^2+a)}(2x^2 - 1), \end{aligned}$$

in vstavimo $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$|g_3''(\alpha)| = \frac{4}{3} \cdot \alpha \cdot (2\alpha^2 - 1) \neq 0,$$

torej je metoda reda 2.

8. Iščemo rešitve enačbe $x^2 + \ln x = 0$ (točna rešitev je $\alpha \doteq 0.653$). Raziščite konvergenco zaporedja približkov v bližini rešitve, če uporabite naslednje iteracijske funkcije, ki jih tudi izpeljite:

   (a) $g_1(x) = \sqrt{-\ln x}$,
   (b) $g_2(x) = e^{-x^2}$,
   (c) $g_3(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x^2})$,
   (d) $g_4(x) = \frac{2x^3+e^{-x^2}}{1+2x^2}$.

   Rešitev.

   (a) Najprej izpeljimo iteracijsko funkcijo. Začnemo s funkcijo f in izrazimo spremenljivko x,

$$\begin{aligned} x^2 + \ln x &= 0 \\ x^2 &= -\ln x \\ x &= \sqrt{-\ln x}. \end{aligned}$$

Oglejmo si konvergenco zaporedja. Izračunajmo odvod funkcije $g_1(x) = \sqrt{-\ln x}$,

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{-\ln x}} \\ &= \frac{-1}{2x\sqrt{-\ln x}} \end{aligned}$$

in vstavimo vrednost α,

$$|g_1'(\alpha)| = \left|\frac{-1}{2\alpha\sqrt{-\ln\alpha}}\right| = \frac{1}{2\alpha^2} = 1.173 \geq 1,$$

kjer smo upoštevali $\alpha = g_1(\alpha) = \sqrt{-\ln\alpha}$. Ker je vrednost odvoda v točki α večja od 1, po izreku sledi, da zaporedje ne konvergira, torej ta metoda ni dobra.

(b) Najprej izpeljimo iteracijsko funkcijo,

$$\begin{aligned} x^2 + \ln x &= 0 \\ \ln x &= -x^2 \\ x &= e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Oglejmo si konvergenco zaporedja. Izračunajmo odvod funkcije $g_2(x) = e^{-x^2}$,

$$g_2'(x) = -2xe^{-x^2},$$

in vstavimo α,

$$|g_2'(\alpha)| = |-2\alpha e^{-\alpha^2}| = 2\alpha^2 = 0.853 < 1,$$

kjer smo upoštevali $\alpha = g_2(\alpha) = e^{-\alpha^2}$. Ker je vrednost odvoda v točki α manjša od 1, zaporedje po izreku konvergira, vendar pa je konvergenca počasna, saj je vrednost odvoda blizu 1.

(c) Najprej izpeljimo iteracijsko funkcijo, uporabimo še točko 8b,

$$\begin{aligned} x &= e^{-x^2} \\ 2x &= x + e^{-x^2} \\ x &= \frac{1}{2}(x + e^{-x^2}). \end{aligned}$$

Oglejmo si konvergenco zaporedja. Izračunajmo odvod funkcije $g_3(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x^2})$,

$$g_3'(x) = \frac{1}{2}(1 - 2xe^{-x^2}).$$

Vstavimo α,

$$|g_3'(\alpha)| = |\frac{1}{2}(1 - 2\alpha e^{-\alpha^2})| = |\frac{1}{2}(1 - 2\alpha^2)| = 0.074 < 1.$$

Po izreku zaporedje konvergira. Konvergenca je boljša, saj je vrednost odvoda zelo majhna.

(d) Najprej izpeljimo iteracijsko funkcijo, uporabimo še točko 8b,

$$\begin{aligned} x &= e^{-x^2} \\ 2x^3 + x &= 2x^3 + e^{-x^2} \\ x(2x^2 + 1) &= 2x^3 + e^{-x^2} \\ x &= \frac{2x^3 + e^{-x^2}}{2x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Oglejmo si konvergenco zaporedja. Izračunajmo odvod funkcije $g_4(x) = \frac{2x^3+e^{-x^2}}{1+2x^2}$,

$$\begin{aligned} g_4'(x) &= \frac{(2 \cdot 3x^2 - 2xe^{-x^2})(1 + 2x^2) - (2x^3 + e^{-x^2}) \cdot 2 \cdot 2x}{(1 + 2x^2)^2} \\ &= \frac{6x^2 + 6x^2 \cdot 2x^2 - 2xe^{-x^2} - 4x^3e^{-x^2} - 4x \cdot 2x^3 - 4x \cdot e^{-x^2}}{(1 + 2x^2)^2} \\ &= \frac{4x^4 - 4x^3e^{-x^2} + 6x^2 - 6xe^{-x^2}}{(1 + 2x^2)^2} \\ &= \frac{4x^3(x - e^{-x^2}) + 6x(x - e^{-x^2})}{(1 + 2x^2)^2} \\ &= \frac{(x - e^{-x^2})(4x^3 + 6x)}{(1 + 2x^2)^2} \\ &= \frac{2x(2x^2 + 3)(x - e^{-x^2})}{(1 + 2x^2)^2}, \end{aligned}$$

in vstavimo α. Iz točke 8b sledi $e^{-\alpha^2} = \alpha$, kar uporabimo v računu,

$$|g_4'(\alpha)| = 0.$$

Ta metoda nam je najbolj všeč, saj je odvod v α enak 0. Izračunajmo še drugi odvod (uporabimo trik s funkcijo $h_1(x) = x - e^{-x^2}$).

Dobimo

$$
\begin{aligned}
g_4''(\alpha) &= \left(1 - e^{-\alpha^2} \cdot (-2\alpha)\right) \frac{2\alpha(2\alpha^2+3)}{(1+2\alpha^2)^2} \\
&= \frac{(1+2\alpha^2)\cdot 2\alpha(2\alpha^2+3)}{(1+2\alpha^2)^2} \\
&= \frac{2\alpha(2\alpha^2+3)}{1+2\alpha^2} = 2.716 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Torej ima po izreku metoda kvadratično konvergenco (ima red 2). To pomeni, da konvergira hitreje od ostalih in da se število točnih decimalk na vsakem koraku podvoji.

9. Pokažite, da lahko kvadratni koren pozitivnega števila a računamo iterativno z $x_{r+1} = x_r \, \frac{x_r^2+3a}{3x_r^2+a}$. Določite red konvergence v bližini $\sqrt{a}$ in pokažite, da je metoda konvergentna za poljuben začetni približek večji od 0.

   Rešitev. Najprej preverimo, da je iterativna funkcija $g(x) = x\,\frac{x^2+3a}{3x^2+a}$ res dobra za računanje kvadratnega korena,

$$
g(\pm\sqrt{a}) = \pm\sqrt{a}\,\frac{a+3a}{3a+a} = \pm\sqrt{a},
$$

   dodatna negibna točka je še 0.

   Oglejmo si red konvergence. Zato izračunajmo odvod funkcije g v točki $\sqrt{a}$,

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{x^2+3a}{3x^2+a} + x\,\frac{2x(3x^2+a)-(x^2+3a)\cdot 6x}{(3x^2+a)^2} \\
&= \frac{(x^2+3a)(3x^2+a)}{(3x^2+a)^2} + \frac{6x^4+2ax^2-6x^4-18ax^2}{(3x^2+a)^2} \\
&= \frac{3x^4+9ax^2+ax^2+3a^2+2ax^2-18ax^2}{(3x^2+a)^2} \\
&= \frac{3x^4-6ax^2+3a^2}{(3x^2+a)^2} \\
&= \frac{3(x^4-2ax^2+a^2)}{(3x^2+a)^2} \\
&= \frac{3(x^2-a)^2}{(3x^2+a)^2} \;\Rightarrow\; g'(\sqrt{a}) = 0.
\end{aligned}
$$

Izračunajmo še drugi odvod,

$$\begin{aligned}
g''(x) &= 3\,\frac{2(x^2-a)\cdot 2x(3x^2+a)^2-(x^2-a)^2\cdot 2(3x^2+a)\cdot 6x}{(3x^2+a)^4}\\
&= 3\,\frac{(3x^2+a)(x^2-a)\left((12x^3+4ax)-(12x^3-12ax)\right)}{(3x^2+a)^4}\\
&= 3\,\frac{(x^2-a)\cdot 16ax}{(3x^2+a)^3}\\
&= 48ax\,\frac{x^2-a}{(3x^2+a)^3}\ \Rightarrow\ g''(\sqrt{a})=0.
\end{aligned}$$

Zdaj pri tretjem odvodu uporabimo trik s funkcijo $h_1(x)=x^2-a$,

$$\begin{aligned}
g'''(\sqrt{a}) &= \frac{48a\sqrt{a}}{(3a+a)^3}\cdot(2\sqrt{a})\\
&= \frac{2\cdot 48a^2}{64a^3}\\
&= \frac{3}{2a}\neq 0.
\end{aligned}$$

Od tod sledi, da je konvergenca kubična (metoda je reda 3).

Pokazati hočemo še, da je metoda konvergentna za vsak začetni približek večji od 0. Dokažimo, da velja (pri predpostavkah si pomagamo s sliko 3.2),

(a)

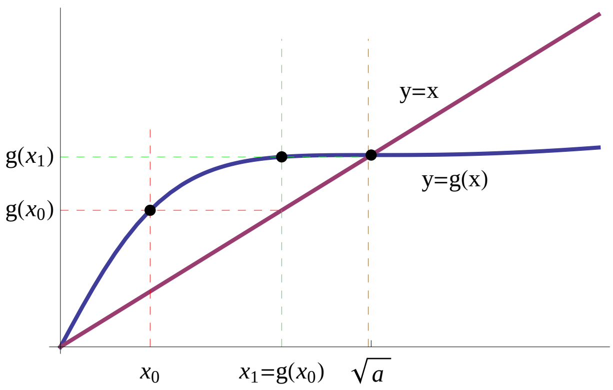
$$\sqrt{a}\geq x_{r+1}\geq x_r,\ x_0\in(0,\sqrt{a}],$$

v tem primeru dobimo naraščajoče navzgor omejeno zaporedje, torej je konvergentno.

(b)

$$\sqrt{a}\leq x_{r+1}\leq x_r,\ x_0\in(\sqrt{a},\infty),$$

v tem primeru dobimo padajoče navzdol omejeno zaporedje, torej je konvergentno.



Slika 3.2: Iteracija za $x_0 < \sqrt{a}$.

Najprej dokažimo desni neenakosti. Izračunajmo

$$\begin{aligned} g(x) - x &= x\,\frac{x^2+3a}{3x^2+a} - x \\ &= x\,\frac{x^2+3a-3x^2-a}{3x^2+a} \\ &= x\,\frac{-2x^2+2a}{3x^2+a} \\ &= 2x\,\frac{a-x^2}{3x^2+a}. \end{aligned}$$

Od tod za $x_0 < \sqrt{a}$ sledi $g(x_0) - x_0 = x_1 - x_0 > 0$, torej $x_1 > x_0$ in po indukciji sledi, da je zaporedje naraščajoče. Za $x_0 > \sqrt{a}$ dobimo $x_1 < x_0$, torej je po indukciji zaporedje padajoče.

Dokažimo še levi neenakosti:

$$\begin{aligned} g(x) - \sqrt{a} &= x\,\frac{x^2+3a}{3x^2+a} - \sqrt{a} \\ &= \frac{x^3+3ax-3\sqrt{a}x^2-a\sqrt{a}}{3x^2+a} \\ &= \frac{x^3-3x^2\sqrt{a}+3x\sqrt{a^2}-\sqrt{a^3}}{3x^2+a} \\ &= \frac{(x-\sqrt{a})^3}{3x^2+a}, \end{aligned}$$

od koder za $x_0 < \sqrt{a}$ sledi $x_1 < \sqrt{a}$, za $x_0 > \sqrt{a}$ pa je $x_1 > \sqrt{a}$. Torej zaporedje konvergira za vsak $x_0 > 0$.

10. Rešujemo enačbo $x - \sqrt{1+x} = 0$. Ali iteracija

$$x_{r+1} = \sqrt{1 + x_r}$$

konvergira k rešitvi, če izberemo x_0 dovolj blizu rešitve?

Za katere vrednosti c iteracija

$$x_{r+1} = x_r - c(x_r^2 - x_r - 1)$$

konvergira k rešitvi, če je x_0 dovolj blizu rešitve?

Rešitev. Izračunajmo rešitvi,

$$\begin{aligned} x - \sqrt{1+x} &= 0 \\ \sqrt{1+x} &= x \\ 1 + x &= x^2 \\ x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

in dobimo

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ker sta $\alpha_{1,2}$ rešitvi osnovne enačbe, velja tudi

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{1 + \alpha_{1,2}}. \tag{3.3}$$

Izračunajmo odvod iteracijske funkcije $g(x) = \sqrt{1+x}$,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}},$$

in poglejmo vrednost v rešitvah $\alpha_{1,2}$, kjer uporabimo (3.3),

$$|g'(\alpha_{1,2})| = \left|\frac{1}{2\sqrt{1+\alpha_{1,2}}}\right| = \left|\frac{1}{2\alpha_{1,2}}\right| = \frac{1}{|1 \pm \sqrt{5}|} < 1,$$

torej iteracija konvergira.

Rešimo še drugi del naloge. Odvajajmo novo iteracijsko funkcijo $g(x) = x - c(x^2 - x - 1)$,

$$g'(x) = 1 - c(2x - 1).$$

Zanima nas, za katere vrednosti x je v okolici $\alpha_{1,2}$ odvod $|g'(x)| < 1$.

Najprej poglejmo za α_1,

$$|g'(\alpha_1)| = |1 - c(1 + \sqrt{5} - 1)| = |1 - c\sqrt{5}| < 1.$$

Izraz pod absolutno vrednostjo je nenegativen za $c \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$, kjer dobimo neenačbo
$$1 - c\sqrt{5} < 1 \Rightarrow c > 0.$$
V nasprotnem primeru dobimo
$$-1 + c\sqrt{5} < 1 \Rightarrow c < \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$
torej v okolici $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ iteracija konvergira za $c \in (0, \frac{2\sqrt{5}}{5})$.

Oglejmo si še okolico α_2,
$$|g'(\alpha_2)| = |1 - c(1 - \sqrt{5} - 1)| = |1 + c\sqrt{5}| < 1.$$
Izraz pod absolutno vrednostjo je nenegativen za $c \geq -\frac{1}{\sqrt{5}}$, kjer je rešitev neenačbe
$$1 + c\sqrt{5} < 1 \Rightarrow c < 0,$$
v nasprotnem primeru pa dobimo
$$-1 - c\sqrt{5} < 1 \Rightarrow c > -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$
Torej iteracija v okolici $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ konvergira za $c \in (-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0)$.

11. V iteracijski formuli
$$x_{r+1} = \frac{A^2}{x_r^5}\left(\alpha + \beta\frac{x_r^3}{A} + \gamma\frac{x_r^6}{A^2}\right)$$
za računanje $\sqrt[3]{A}$ določite parametre α, β, γ, tako da bo konvergenca vsaj kubična. Kakšen je red konvergence?

Rešitev. Da bo iteracija konvergirala k $\sqrt[3]{A}$ in bo konvergenca vsaj kubična, mora veljati
$$\begin{aligned} g(\sqrt[3]{A}) &= \sqrt[3]{A}, \\ g'(\sqrt[3]{A}) &= 0, \\ g''(\sqrt[3]{A}) &= 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$
kjer je g iteracijska funkcija
$$g(x) = A^2\alpha x^{-5} + A\beta x^{-2} + \gamma x.$$

Izračunajmo odvoda,

$$\begin{aligned}g'(x) &= -5A^2\alpha x^{-6} - 2A\beta x^{-3} + \gamma,\\ g''(x) &= 30A^2\alpha x^{-7} + 6A\beta x^{-4}.\end{aligned}$$

Zdaj vstavimo $\sqrt[3]{A}$ in iz (3.4) dobimo tri pogoje. Prvi pogoj je

$$\begin{aligned}g(\sqrt[3]{A}) = A^2 \cdot A^{-\frac{5}{3}}\alpha + A \cdot A^{-\frac{2}{3}}\beta + A^{\frac{1}{3}}\gamma &= A^{\frac{1}{3}}\\ A^{\frac{1}{3}}\alpha + A^{\frac{1}{3}}\beta + A^{\frac{1}{3}}\gamma &= A^{\frac{1}{3}}\\ \alpha + \beta + \gamma &= 1,\end{aligned}$$

drugi

$$\begin{aligned}g'(\sqrt[3]{A}) = -5A^2\alpha \cdot A^{-2} - 2A\beta \cdot A^{-1} + \gamma &= 0\\ -5\alpha - 2\beta + \gamma &= 0,\end{aligned}$$

tretji pa

$$\begin{aligned}g''(\sqrt[3]{A}) = 30A^2\alpha A^{-\frac{7}{3}} + 6A\beta A^{-\frac{4}{3}} &= 0\\ 30\alpha A^{-\frac{1}{3}} + 6\beta A^{-\frac{1}{3}} &= 0\\ 5\alpha + \beta &= 0.\end{aligned}$$

Tako dobimo naslednji sistem za α, β in γ,

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 1,\\ -5\alpha - 2\beta + \gamma &= 0,\\ 5\alpha + \beta &= 0.\end{aligned}$$

Iz druge enačbe dobimo

$$\gamma = 5\alpha + 2\beta, \tag{3.5}$$

kar uporabimo v preostalih dveh enačbah, da dobimo nov sistem,

$$\begin{aligned}6\alpha + 3\beta &= 1,\\ 5\alpha + \beta &= 0.\end{aligned}$$

Od tod iz druge enačbe dobimo

$$\beta = -5\alpha, \tag{3.6}$$

kar vstavimo v prvo enačbo. Izračunamo $\alpha = -\frac{1}{9}$, iz (3.6) dobimo $\beta = \frac{5}{9}$, iz (3.5) pa še $\gamma = \frac{5}{9}$.

Za red konvergence izračunamo tretji odvod funkcije g in vstavimo $\sqrt[3]{A}$,

$$\begin{aligned}
g'''(x) &= 30A^2\alpha(-7x^{-8}) + 6A\beta(-4x^{-5}) \\
g'''(\sqrt[3]{A}) &= -210A^2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot A^{-\frac{8}{3}} - 24A \cdot \frac{5}{9} \cdot A^{-\frac{5}{3}} \\
&= \frac{70}{3}A^{-\frac{2}{3}} - \frac{40}{3}A^{-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{10}{\sqrt[3]{A^2}} \neq 0,
\end{aligned}$$

torej je konvergenca kubična (reda 3).

12. Za katere začetne približke je iteracija $x_{r+1} = g(x_r)$ konvergentna, če je $g(x) = 8x - 12 - x^2$? Kam konvergirajo ta zaporedja in kolikšen je red konvergence? Kje zagotavlja konvergenco konvergenčni izrek?

Rešitev. Izračunajmo negibne točke funkcije g,

$$\begin{aligned}
x &= g(x) \\
x &= 8x - 12 - x^2 \\
x^2 - 7x + 12 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2} \\
\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 &= 4
\end{aligned}$$

in njene ničle,

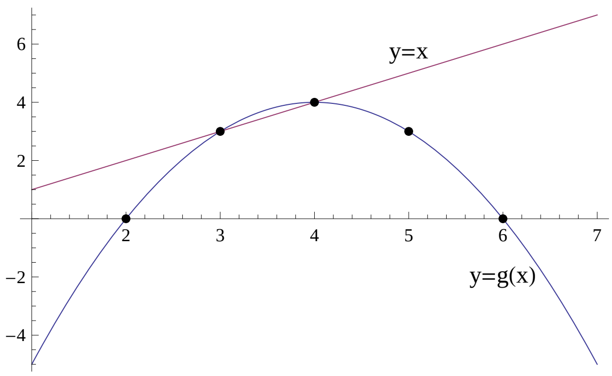
$$\begin{aligned}
-x^2 + 8x - 12 &= 0 \\
x^2 - 8x + 12 &= 0 \\
(x-6)(x-2) &= 0 \\
x_{N1} = 2,\ x_{N2} &= 6.
\end{aligned}$$

S skice 3.3 razberemo naslednje trditve, ki jih dokažemo:

(a) Za $x_0 < 3$ zaporedje divergira. Dokažimo, da je v tem primeru $x_{r+1} < x_r$ za vsak $r \in \mathbb{N}$.

$$g(x) - x = 8x - 12 - x^2 - x = -x^2 + 7x - 12 = -(x-3)(x-4),$$

torej je za $x < 3$ izraz $g(x) - x < 0$, zato zaporedje ne more biti konvergentno (če bi konvergiralo, bi konvergiralo k 3 ali 4).



Slika 3.3: Skica funkcij $g(x)$ in $y = x$ z negibnima točkama in ničlama.

(b) Za $x_0 > 5$ zaporedje divergira. Dokažimo, da velja $x_0 > 5 \Rightarrow x_1 < 3$. Potem po točki 12a zaporedje divergira.

$$\begin{aligned} 3 - x_1 = 3 - g(x_0) &= 3 - 8x_0 + 12 + x_0^2 \\ &= x_0^2 - 8x_0 + 15 = (x_0 - 3)(x_0 - 5) > 0, \end{aligned}$$

zato je $x_1 < 3$.

(c) Oglejmo si, kaj se zgodi, če je $x_0 = 3$,

$$g(3) = 8 \cdot 3 - 12 - 3^2 = 3,$$

torej je zaporedje konstantno in konvergira k 3.

(d) Če je $x_0 = 5$, je

$$g(5) = 8 \cdot 5 - 12 - 5^2 = 3$$

in zaporedje konvergira k 3.

(e) Ostane še primer, ko je $3 < x_0 < 5$. Trdimo, da v tem primeru zaporedje konvergira k 4. Izračunajmo

$$x_{r+1} - 4 = 8x_r - 12 - x_r^2 - 4 = -x_r^2 + 8x_r - 16 = -(x_r - 4)^2.$$

Oglejmo si napako na $r-$tem koraku iteracije $e_r = |x_r - 4|$. Iz zgornjega vemo, da je

$$e_{r+1} = e_r^2,$$

iz predpostavke $3 < x_0 < 5$ pa sledi

$$e_0 = |x_0 - 4| < 1.$$

Napaka na $r-$tem koraku je torej

$$\begin{aligned}
e_0 &= |x_0 - 4| < 1 \\
e_1 &= |x_1 - 4| = |x_0 - 4|^2 = e_0^2 \\
e_2 &= |x_2 - 4| = |x_1 - 4|^2 = e_0^4 \\
&\vdots \\
e_r &= e_0^{2^r} \longrightarrow 0, \text{ ko gre } r \to \infty,
\end{aligned}$$

in od tod sledi

$$|x_r - 4| \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies x_r \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 4.$$

Zanima nas tudi red konvergence. Izračunajmo odvode funkcije g v točki $x = 4$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 8 - 2x,\ g'(4) = 0, \\
g''(x) &= -2,\ g''(4) = -2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Po izreku sledi, da je konvergenca kvadratična (red je 2).

Zanima nas še, kje konvergenco zagotavlja konvergenčni izrek, tj. tam, kjer je

$$|g'(x)| = |8 - 2x| < 1.$$

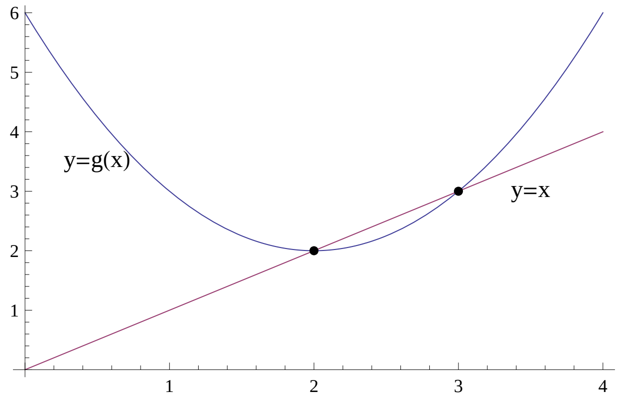
Za $x \leq 4$ dobimo $8-2x < 1$, torej $x > \frac{7}{2}$, za $x > 4$ pa $-8+2x < 1$, torej $x < \frac{9}{2}$. Izrek nam konvergenco zagotavlja na intervalu $(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$. Vidimo, da iteracija konvergira na večjem intervalu, kot ga zagotavlja konvergenčni izrek.

13. Za katere začetne približke je navadna iteracija za reševanje enačbe $x = g(x)$ konvergentna, če je $g(x) = x^2 - 4x + 6$? Kam konvergirajo ta zaporedja? Kolikšen je red konvergence? Za katere začetne približke zagotavlja konvergenco konvergenčni izrek?

    Rešitev. Izračunajmo rešitve enačbe (tj. fiksne točke iteracijske funkcije g),

$$\begin{aligned}
x &= g(x) \\
x &= x^2 - 4x + 6 \\
x^2 - 5x + 6 &= 0 \\
(x-3)(x-2) &= 0,
\end{aligned}$$

torej sta fiksni točki $\alpha_1 = 2$ in $\alpha_2 = 3$. Skicirajmo funkcijo g in funkcijo $y = x$ (slika 3.4). S skice dobimo naslednje predpostavke:



Slika 3.4: Skica funkcij $g(x)$ in $y = x$ z negibnima točkama.

(a) Za $x_0 > 3$ zaporedje divergira.

(b) Za $x_0 < 1$ zaporedje divergira.

(c) Za $x_0 = 3$ zaporedje konvergira k 3.

(d) Za $x_0 = 1$ zaporedje konvergira k 3.

(e) Za $x_0 \in (1, 3)$ zaporedje konvergira k 2.

Dokažimo predpostavke:

(a) Izračunajmo $g(x) - x$ za $x > 3$,

$$\begin{aligned} g(x) - x &= x^2 - 4x + 6 - x \\ &= x^2 - 5x + 6 \\ &= (x-3)(x-2) > 0 \text{ za } x > 3, \end{aligned}$$

torej po indukciji sledi, da je $x_{r+1} > x_r$, če je $x_0 > 3$, torej zaporedje ne more konvergirati k 2 ali k 3 in divergira.

(b) Dovolj je pokazati, da je $g(x_0) > 3$ za $x_0 < 1$, divergenca potem sledi iz točke 13a. Izračunajmo

$$\begin{aligned} g(x_0) - 3 &= x_0^2 - 4x_0 + 6 - 3 \\ &= x_0^2 - 4x_0 + 3 \\ &= (x_0 - 3)(x_0 - 1) > 0 \text{ za } x_0 < 1. \end{aligned}$$

(c) Za $x_0 = 3$ dobimo

$$g(x_0) = g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 6 = 3,$$

torej je zaporedje konstantno in konvergira k 3.

(d) Za $x_0 = 1$ dobimo

$$g(x_0) = g(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 6 = 3,$$

od tu naprej pa je zaporedje po točki 13c konstantno, torej konvergira k 3.

(e) Naj bo $x_0 \in (1, 3)$. Oglejmo si razliko $x_{r+1} - 2$,

$$x_{r+1} - 2 = x_r^2 - 4x_r + 6 - 2 = x_r^2 - 4x_r + 4 = (x_r - 2)^2.$$

Definirajmo napako na $r-$tem koraku iteracije z

$$e_r = |x_r - 2|.$$

Vemo, da velja $e_{r+1} = e_r^2$ in po predpostavki $e_0 = |x_0 - 2| < 1$, torej

$$\begin{aligned}
&e_0 = |x_0 - 2| < 1 \\
&e_1 = |x_1 - 2| = |x_0 - 2|^2 = e_0^2 \\
&e_2 = |x_2 - 2| = |x_1 - 2|^2 = e_0^4 \\
&\ \vdots \\
&e_r = |x_r - 2| = |x_{r-1} - 2|^2 = e_0^{2^r} \to 0,\ \text{ko gre } r \to \infty.
\end{aligned}$$

Zato zaporedje $|x_r - 2| \to 0$, ko gre $r \to \infty$, in gre torej $x_r \to 2$.
Zanima nas red konvergence. Izračunamo odvode:

$$\begin{gathered}
g'(x) = 2x - 4,\ g'(2) = 0, \\
g''(x) = 2,\ g''(2) = 2 \neq 0.
\end{gathered}$$

Torej je konvergenca kvadratična (red je 2).
Konvergenčni izrek zagotavlja konvergenco, kjer je

$$|g'(x)| = |2x - 4| < 1.$$

Za $x \geq 2$ mora biti $2x - 4 < 1 \Rightarrow x < \frac{5}{2}$, za $x < 2$ pa $-2x + 4 < 1 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$. Torej izrek zagotavlja konvergenco za vse $x \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

14. Izpeljite tangentno metodo za rešitev enačbe in izračunajte naslednji približek z začetnim približkom x_0,

(a)

$$x + \ln x = 0,\ x_0 = 1,$$

(b)
$$x = e^{-x},\ x_0 = 0,$$

(c)
$$\sin x = 10(1-x),\ x_0 = 0.$$

Rešitev.

(a) Tangentno metodo dobimo kot

$$x_{r+1} = x_r - \frac{x_r + \ln x_r}{1 + \frac{1}{x_r}} = x_r - \frac{x_r(x_r + \ln x_r)}{1 + x_r}.$$

Naslednji približek je

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0(x_0 + \ln x_0)}{1 + x_0} = 1 - \frac{1 \cdot (1+0)}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

(b) Najprej preoblikujemo enačbo v obliko $f(x) = 0$,

$$x - e^{-x} = 0,$$

nato vstavimo v formulo za tangentno metodo,

$$x_{r+1} = x_r - \frac{x_r - e^{-x_r}}{1 + e^{-x_r}}.$$

Naslednji približek je

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 - e^{-x_0}}{1 + e^{-x_0}} = 0 - \frac{0-1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

(c) Spet preoblikujemo enačbo v $\sin x - 10(1-x) = 0$ in vstavimo v formulo,

$$x_{r+1} = x_r - \frac{\sin x_r - 10(1-x_r)}{\cos x_r + 10}.$$

Naslednji približek je

$$x_1 = x_0 - \frac{\sin x_0 - 10(1-x_0)}{\cos x_0 + 10} = 0 - \frac{0 - 10(1-0)}{1+10} = \frac{10}{11}.$$

15. Določite vse polinome 4. stopnje z vodilnim koeficientom 1, pri katerih se tangentna metoda vede takole:

- v bližini ničle α ima linearno konvergenco,

- v bližini ničle $-\alpha$ ima kubično konvergenco.

Katere so preostale ničle in kakšen je red konvergence v njihovi bližini?

Rešitev. Ker je v okolici α konvergenca le linearna, mora biti α večkratna ničla. Kubična konvergenca v okolici $-\alpha$ pomeni, da je $p'(-\alpha) \neq 0$ in $p''(-\alpha) = 0$. Zapišimo polinom v obliki z ničlami (α ničla stopnje 2, $-\alpha$ enostavna ničla, neznana ničla (in edina neznanka!) naj bo β),

$$p(x) = (x-\alpha)^2(x+\alpha)(x-\beta).$$

Dvakrat odvajamo,

$$\begin{aligned}
p'(x) &= 2(x-\alpha)(x+\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)^2(x-\beta) + (x-\alpha)^2(x+\alpha) \\
p''(x) &= 2(x+\alpha)(x-\beta) + 2(x-\alpha)(x-\beta) + 2(x-\alpha)(x+\alpha) + \\
&\quad + 2(x-\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)^2 + \\
&\quad + 2(x-\alpha)(x+\alpha) + (x-\alpha)^2 \\
&= 2(x+\alpha)(x-\beta) + 4(x-\alpha)(x-\beta) + \\
&\quad + 4(x-\alpha)(x+\alpha) + 2(x-\alpha)^2,
\end{aligned}$$

in vstavimo $-\alpha$,

$$\begin{aligned}
p''(-\alpha) &= 4(-2\alpha)(-\alpha-\beta) + 2(-2\alpha)^2 \\
&= 8\alpha(\alpha+\beta) + 8\alpha^2 \\
&= 8\alpha(2\alpha+\beta) = 0.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo, da je

$$\beta = -2\alpha.$$

Preverimo še ostale pogoje,

$$p'(-\alpha) = (-2\alpha)^2(-\alpha-\beta) = 4\alpha^3 \neq 0,$$

ker bi v primeru $\alpha = 0$ dobili v okolici α linearno in kubično konvergenco, kar pa ni mogoče.

Zanima nas še red konvergence. Ker je $\beta \neq \pm\alpha$, torej je enostavna ničla, mora biti v okolici β metoda vsaj reda 2. Izračunajmo

$$p''(\beta) = p''(-2\alpha) = 4(-3\alpha)(-\alpha) + 2(-3\alpha)^2 = 30\alpha^2 \neq 0,$$

torej je metoda reda 2 (kvadratična konvergenca).

16. Izpeljite Laguerrovo metodo za

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

in naredite en korak z začetnim približkom $x_0 = 0$.

Rešitev. Najprej izračunamo s_1 in s_2,

$$\begin{aligned}
s_1(x_r) &= \frac{p'(x_r)}{p(x_r)} = \frac{3x_r^2 - 12x_r + 11}{x_r^3 - 6x_r^2 + 11x_r - 6}, \\
s_2(x_r) &= -s_1'(x_r) \\
&= \frac{(3x_r^2 - 12x_r + 11)^2 - (x_r^3 - 6x_r^2 + 11x_r - 6)(6x_r - 12)}{(x_r^3 - 6x_r^2 + 11x_r - 6)^2} \\
&= \frac{3x_r^4 - 24x_r^3 + 72x_r^2 - 96x_r + 49}{(x_r^3 - 6x_r^2 + 11x_r - 6)^2},
\end{aligned}$$

ki ju potem uporabimo v enačbi (3.1) za nov približek. Enačba je v tem primeru

$$\begin{aligned}
x_{r+1} &= x_r - \frac{n}{s_1(x_r) \pm \sqrt{(n-1)(ns_2(x_r) - s_1^2(x_r))}} \\
&= x_r - \frac{3}{\frac{3x_r^2-12x_r+11}{x_r^3-6x_r^2+11x_r-6} \pm \sqrt{2}} \\
&\overline{\sqrt{\left(3 \cdot \frac{3x_r^4-24x_r^3+72x_r^2-96x_r+49}{(x_r^3-6x_r^2+11x_r-6)^2} - \frac{(3x_r^2-12x_r+11)^2}{(x_r^3-6x_r^2+11x_r-6)^2}\right)}} \\
&= x_r - \frac{3(x_r^3 - 6x_r^2 + 11x_r - 6)}{3x_r^2 - 12x_r + 11 \pm \sqrt{2(9x_r^4 - 72x_r^3 + 216x_r^2 - 288x_r + 147 -}} \\
&\overline{-(9x_r^4 + 144x_r^2 + 121 - 72x_r^3 + 66x_r^2 - 264x_r))} \\
&= x_r - \frac{3(x_r^3 - 6x_r^2 + 11x_r - 6)}{3x_r^2 - 12x_r + 11 \pm \sqrt{2(6x_r^2 - 24x_r + 26)}} \\
&= x_r - \frac{3(x_r^3 - 6x_r^2 + 11x_r - 6)}{3x_r^2 - 12x_r + 11 \pm 2\sqrt{3x_r^2 - 12x_r + 13}}.
\end{aligned}$$

Izračunajmo nov približek s to metodo,

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{3(x_0^3 - 6x_0^2 + 11x_0 - 6)}{3x_0^2 - 12x_0 + 11 \pm 2\sqrt{3x_0^2 - 12x_0 + 13}} \\
&= -\frac{3 \cdot (-6)}{11 \pm 2\sqrt{13}} \\
&= \frac{18}{11 + 2\sqrt{13}} \doteq 0.9884,
\end{aligned}$$

kar je že zelo blizu 1, ki je ničla polinoma. V imenovalcu smo izbrali predznak $+$, ker je $11 > 0$ in bo tako imenovalec večji po absolutni vrednosti.

Poglavje 4

Reševanje sistemov nelinearnih enačb

4.1 Sistemi nelinearnih enačb

Rešujemo sistem n enačb z n neznankami

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

ki ga zapišemo v obliki

$$F(x) = 0,$$

kjer je

$$F = [f_1, f_2, \ldots, f_n]^T, \; x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T, \; F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n.$$

4.2 Navadna iteracija

Poiščemo funkcijo $G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, za katero velja

$$G(\alpha) = \alpha \; \Leftrightarrow \; F(\alpha) = 0.$$

Algoritem:

Izberemo začetni približek $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$
$r = 0, 1, \ldots$
    $x^{(r+1)} = G(x^{(r)})$

4.3 Newtonova metoda

Newtonova metoda je posplošitev tangentne metode, namesto odvoda nastopa Jacobijeva matrika,

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} - JF^{-1}(x^{(r)})F(x^{(r)}).$$

Inverza matrike ne računamo, zato sistem prevedemo na reševanje sistema linearnih enačb,

$$JF(x^{(r)})(x^{(r+1)} - x^{(r)}) = -F(x^{(r)}).$$

Označimo razliko $x^{(r+1)} - x^{(r)} = \Delta x^{(r)}$ in dobimo

$$JF(x^{(r)})\Delta x^{(r)} = -F(x^{(r)}).$$

Algoritem:

```
1   Izberemo začetni približek x^(0)
2   r = 0, 1, ...
3      rešimo sistem JF(x^(r))Δx^(r) = −F(x^(r))
4      x^(r+1) = x^(r) + Δx^(r)
```

V okolici enostavne ničle imamo kvadratično konvergenco ($JF(\alpha)$ je nesingularna). Slabost je, da težko izberemo dober začetni približek. Na vsakem koraku moramo izračunati novo Jacobijevo matriko, zato je metoda precej zahtevna.

4.3.1 Zgled

Z uporabo Octavea rešujemo sistem nelinearnih enačb

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x + y &= 1, \\ x^2 - y^2 - x + 10y &= 25. \end{aligned}$$

Zapišimo sistem v matrični obliki,

$$F = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 10x + y - 1 \\ x^2 - y^2 - x + 10y - 25 \end{bmatrix},$$

in izračunajmo Jacobijevo matriko,

$$JF = \begin{bmatrix} 2x - 10 & 2y + 1 \\ 2x - 1 & -2y + 10 \end{bmatrix}.$$

Pomagamo si s programom `newton` [1]. Začetni približek in število rešitev določimo s slike. Na sliki danih krivulj vidimo, da se krivulji sekata v okolici točk $(2,4)$ in $(9,-3)$, zato ti točki uporabimo za začetna približka v Newtonovi metodi. Podrobnejši potek si oglejte v datoteki `testnewton1` [1].

Če uporabimo začetni približek $(2,4)$ nam Newtonova metoda vrne rezultat $(1.9623, 3.6258)$, za začetni približek $(9,-3)$ pa $(9.0944, -3.5799)$. Dobili smo dve različni rešitvi sistema enačb, s slike pa vidimo, da sta to edini rešitvi. Torej smo poiskali vse rešitve sistema.

4.4 Naloge

1. Za dane sisteme enačb naredite korak Newtonove metode z začetnim približkom $[1,1]^T$,

   (a)
   $$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= 2, \\ x^2 - xy + y &= 0, \end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2, \\ x^2 - 2xy + y &= 2, \end{aligned}$$

   (c)
   $$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x + y &= 1, \\ x^2 - y^2 - x + 10y &= 25. \end{aligned}$$

   Rešitev.

   (a) Zapišimo v vektorski obliki
   $$F(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 + 2y^2 - 2 \\ x^2 - xy + y \end{bmatrix}$$
   in izračunajmo Jacobijevo matriko
   $$JF(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 4y \\ 2x - y & -x + 1 \end{bmatrix}.$$
   Rešiti moramo sistem
   $$JF(x_0,y_0) \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = -F(x_0,y_0),$$

torej

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo sistem v običajni obliki,

$$\begin{aligned} 2\,\Delta x_0 + 4\,\Delta y_0 &= -1, \\ \Delta x_0 &= -1, \end{aligned}$$

od koder dobimo še $\Delta y_0 = \frac{1}{4}$. Nov približek je torej enak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

(b) Zapišimo v vektorski obliki

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x^2 - 2xy + y - 2 \end{bmatrix}$$

in izračunajmo Jacobijevo matriko

$$JF(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x - 2y & -2x + 1 \end{bmatrix}.$$

Rešiti moramo sistem

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo sistem v običajni obliki,

$$\begin{aligned} 2\,\Delta x_0 + 2\,\Delta y_0 &= 0, \\ -\Delta y_0 &= 2, \end{aligned}$$

od koder dobimo $\Delta y_0 = -2$ in $\Delta x_0 = 2$. Nov približek je torej enak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Zapišimo v vektorski obliki

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 10x + y - 1 \\ x^2 - y^2 - x + 10y - 25 \end{bmatrix}$$

in izračunajmo Jacobijevo matriko

$$JF(x,y) = \begin{bmatrix} 2x-10 & 2y+1 \\ 2x-1 & -2y+10 \end{bmatrix}.$$

Rešiti moramo sistem

$$JF(x_0,y_0)\begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = -F(x_0,y_0),$$

torej

$$\begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo sistem v običajni obliki,

$$\begin{aligned} -8\,\Delta x_0 + 3\,\Delta y_0 &= 8, \\ \Delta x_0 + 8\,\Delta y_0 &= 16, \end{aligned}$$

od koder dobimo $\Delta x_0 = -\frac{16}{67}$ in $\Delta y_0 = \frac{136}{67}$. Nov približek je torej enak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{16}{67} \\ \frac{136}{67} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{51}{67} \\ \frac{203}{67} \end{bmatrix}.$$

2. Za dani sistem enačb naredite korak Newtonove metode z začetnim približkom $[\frac{1}{4}, \frac{15}{16}]^T$,

$$\begin{aligned} \ln(x^2+y) &= 1-y, \\ \sqrt{x}+xy &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev. Zapišimo v vektorski obliki

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} \ln(x^2+y)-1+y \\ \sqrt{x}+xy \end{bmatrix}$$

in izračunajmo Jacobijevo matriko

$$JF(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2+y}\cdot 2x & \frac{1}{x^2+y}+1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}+y & x \end{bmatrix}.$$

Rešiti moramo sistem

$$JF(x_0,y_0)\begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = -F(x_0,y_0),$$

torej

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{31}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} \\ \frac{47}{64} \end{bmatrix}.$$

Zapišimo sistem v običajni obliki,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\Delta x_0 + 2\,\Delta y_0 &= \frac{1}{16}, \\ \frac{31}{16}\,\Delta x_0 + \frac{1}{4}\,\Delta y_0 &= -\frac{47}{64}, \end{aligned}$$

od koder dobimo $\Delta x_0 = -\frac{19}{48}$ in $\Delta y_0 = \frac{25}{192}$, torej je nov približek enak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{15}{16} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{19}{48} \\ \frac{25}{192} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{48} \\ \frac{205}{192} \end{bmatrix}.$$

3. Zapišite Newtonovo metodo za reševanje sistema enačb

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 &= -1, \\ 3x^2y - y^3 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev. Zapišimo problem v obliki $F(x) = 0$,

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^3 - 3xy^2 + 1 \\ 3x^2y - y^3 \end{bmatrix} = 0,$$

in izračunajmo Jacobijevo matriko,

$$JF(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -3x \cdot 2y \\ 3y \cdot 2x & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}.$$

V prvem koraku metode izberemo začetni približek $[x_0, y_0]^T$ in rešujemo sistem

$$\begin{bmatrix} 3x_0^2 - 3y_0^2 & -6x_0y_0 \\ 6x_0y_0 & 3x_0^2 - 3y_0^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_0^3 - 3x_0y_0^2 + 1 \\ 3x_0^2y_0 - y_0^3 \end{bmatrix}.$$

4. Za dani sistem enačb naredite korak Newtonove metode z začetnim približkom $[1, 1, 1]^T$,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ 2x^2 + y^2 - 4z &= 0, \\ 3x^2 - 4y + z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev. Zapišimo v vektorski obliki

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ 2x^2+y^2-4z \\ 3x^2-4y+z^2 \end{bmatrix}$$

in izračunajmo Jacobijevo matriko

$$JF(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{bmatrix}.$$

Rešiti moramo sistem

$$JF(x_0,y_0,z_0) \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{bmatrix} = -F(x_0,y_0,z_0),$$

torej

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo sistem v običajni obliki,

$$\begin{aligned} 2\,\Delta x_0 + 2\,\Delta y_0 + 2\,\Delta z_0 &= -2, \\ 4\,\Delta x_0 + 2\,\Delta y_0 - 4\,\Delta z_0 &= 1, \\ 6\,\Delta x_0 - 4\,\Delta y_0 + 2\,\Delta z_0 &= 0, \end{aligned}$$

od koder dobimo $\Delta x_0 = -\frac{1}{12}, \Delta y_0 = -\frac{7}{18}$ in $\Delta z_0 = -\frac{19}{36}$, torej je nov približek enak

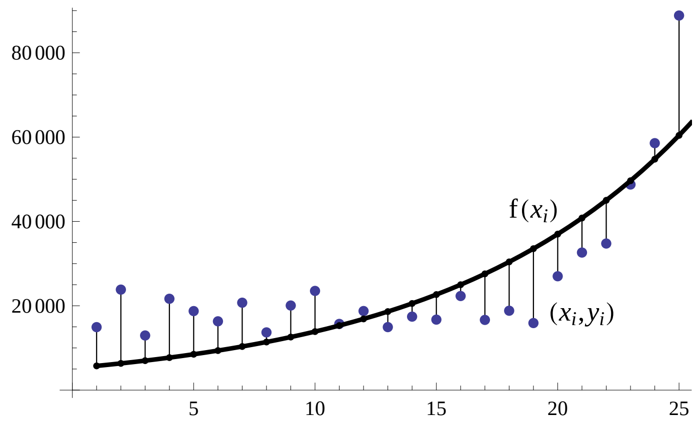
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} \\ -\frac{7}{18} \\ -\frac{19}{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{12} \\ \frac{11}{18} \\ \frac{17}{36} \end{bmatrix}.$$

5. Dani so podatki (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$. Poišči funkcijo oblike $y = f(x) = a\,e^{bx}$, ki se najbolje prilega podatkom.

   Rešitev.

   Oglejmo si skico na sliki 4.1. Razdalja med točko (x_i, y_i), ki jo določajo podatki, in točko $(x_i, f(x_i))$, ki leži na grafu iskane funkcije, je enaka $|y_i - f(x_i)|$. Želimo čim manjše odstopanje podatkov od funkcije, zato seštejemo razdalje pri vseh točkah,

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - f(x_i)|.$$



Slika 4.1: Iskanje funkcije, ki se najbolje prilega podatkom.

Želimo se izogniti absolutni vrednosti, zato razdaljo kvadriramo in dobimo funkcijo

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a\ e^{bx_i})^2,$$

ki je odvisna od parametrov a in b. Iščemo minimum te funkcije, zato jo (parcialno) odvajamo. Tako dobimo nelinearen sistem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a}: &\quad \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a\ e^{bx_i}) \cdot (-e^{bx_i}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial b}: &\quad \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a\ e^{bx_i}) \cdot (-a x_i\ e^{bx_i}) = 0. \end{aligned}$$

Rešujemo torej enačbo $F(a, b) = 0$ s funkcijo

$$F(a,b) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(y_i\ e^{bx_i} - a\ e^{2bx_i}) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i\ e^{bx_i} - a x_i\ e^{2bx_i}) \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo Jacobijevo matriko,

$$JF(a,b) = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{n} e^{2bx_i} & \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i\ e^{bx_i} - 2a x_i\ e^{2bx_i}) \\ -\sum_{i=1}^{n} x_i\ e^{2bx_i} & \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 y_i\ e^{bx_i} - 2a x_i^2\ e^{2bx_i}) \end{bmatrix},$$

zdaj pa rešimo sistem

$$\begin{aligned} JF(a_r, b_r) \begin{bmatrix} \Delta a_r \\ \Delta b_r \end{bmatrix} &= -F(a_r, b_r), \\ [a_{r+1}, b_{r+1}]^T &= [a_r, b_r]^T + [\Delta a_r, \Delta b_r]^T. \end{aligned}$$

Težave imamo še z izbiro začetnega približka, vendar se v to ne bomo spuščali.

Motivacija za to nalogo je npr. rast populacije zajcev na nekem območju ali razpad radioaktivnega elementa, kjer želimo iz danih podatkov določiti, kako se bo rast nadaljevala.

Poglavje 5

Vektorske in matrične norme

5.1 Vektorske norme

Dan je vektor $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$. Funkcija

$$\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

je *vektorska norma,* če za vse $x, y \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$, velja

1. $$\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0,$$

2. $$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$$

3. $$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Lastnosti 3 pravimo *trikotniška neenakost.*
Primeri norm so:

1. prva norma
$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

2. druga norma
$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

3. neskončna norma
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

5.2 Matrične norme

Matrična norma je preslikava $\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, za katero velja

1. $$\|A\| \geq 0,\ \|A\| = 0 \ \Leftrightarrow\ A = 0,$$
2. $$\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|,$$
3. $$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$
4. $$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

za vse matrike $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in vse skalarje $\alpha \in \mathbb{R}$. Točki 3 rečemo *trikotniška neenakost*, točki 4 pa *submultiplikativnost.*
Primeri norm so:

1. Prva norma
$$\|A\|_1 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1,$$
za katero velja
$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right),$$
torej je enaka maksimumu vsot absolutnih vrednosti elementov matrike po stolpcih.

2. Druga norma
$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2,$$
za katero velja
$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}.$$

3. Neskončna norma
$$\|A\|_\infty = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty,$$
za katero velja
$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right),$$
torej je enaka maksimumu vsot absolutnih vrednosti elementov matrike po vrsticah.

5.3 Naloge

1. Izračunajte prvo, drugo in neskončno normo danih vektorjev,

   (a)
   $$x = [1, 1, -2]^T,$$

   (b)
   $$x = [1, -2, -2]^T.$$

   Rešitev.

   (a) Izračunamo po definiciji:
   $$\begin{aligned} \|x\|_1 &= 1 + 1 + 2 = 4, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}, \\ \|x\|_\infty &= \max\{1, 1, 2\} = 2. \end{aligned}$$

   (b) Izračunamo po definiciji:
   $$\begin{aligned} \|x\|_1 &= 1 + 2 + 2 = 5, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, \\ \|x\|_\infty &= \max\{1, 2, 2\} = 2. \end{aligned}$$

2. Pokažite, da sta prva in neskončna norma res vektorski normi.

   Rešitev. Najprej pokažimo, da je prva norma vektorska norma.

   (a) Nenegativnost $\|x\|_1 \geq 0$ je očitna, saj seštevamo nenegativna števila. Enakost dobimo natanko takrat, ko so vse komponente vektorja enake nič, to pa je natanko takrat, ko je $x = 0$.

   (b) Preverimo drugo točko,
   $$\begin{aligned} \|\alpha x\|_1 &= |\alpha x_1| + |\alpha x_2| + \cdots + |\alpha x_n| \\ &= |\alpha| \left(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|\right) = |\alpha| \cdot \|x\|_1. \end{aligned}$$

   (c) Preverimo še trikotniško neenakost,
   $$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + \cdots + |x_n + y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \cdots + |x_n| + |y_n| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1, \end{aligned}$$

   kjer smo uporabili trikotniško neenakost, ki velja za absolutno vrednost.

Pokažimo še, da je neskončna norma vektorska norma.

(a) Nenegativnost je spet očitna, saj računamo maksimum nenegativnih števil. Maksimum nenegativnih števil je enak 0 natanko takrat, ko so vsa števila enaka 0, torej natanko takrat, ko je $x = 0$.

(b) Preverimo drugo točko,

$$\|\alpha x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |\alpha\, x_i| = |\alpha| \max_{1\le i\le n} |x_i| = |\alpha| \cdot \|x\|_\infty.$$

(c) Ostane še trikotniška neenakost,

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i + y_i| \le \max_{1\le i\le n} |x_i| + \max_{1\le i\le n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

kjer smo uporabili, da je maksimum vsote manjši ali enak vsoti maksimumov.

3. Pokažite, da veljajo neenakosti

(a)

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\, \|x\|_\infty,$$

(b)

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\, \|x\|_\infty,$$

(c)

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1.$$

Rešitev.

(a) Preverimo po definicijah norm,

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = \|x\|_1,$$

saj je maksimum le eno od števil na desni, na desni pa temu številu prištejemo še nekaj nenegativnega.

Za desno neenakost uporabimo oceno $|x_j| \le \max_{1\le i\le n} |x_i| = \|x\|_\infty$ za vsak $j = 1, 2, \ldots, n$ (torej vsaka komponenta je manjša ali enaka največji),

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\ &\le \underbrace{\|x\|_\infty + \|x\|_\infty + \cdots + \|x\|_\infty}_{n} = n\, \|x\|_\infty.\end{aligned}$$

(b) Označimo z ℓ indeks, pri katerem dosežemo maksimum, torej $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i| = |x_\ell|$. Potem velja

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \ge \sqrt{x_\ell^2} = |x_\ell| = \|x\|_\infty,$$

saj smo v vsoti izpustili nenegativne člene.

Za desno neenakost uporabimo enako oceno kot v točki 3a, torej $|x_j| \le \|x\|_\infty$ za vse j,

$$\begin{aligned}\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} &\le \sqrt{\underbrace{\|x\|_\infty^2 + \|x\|_\infty^2 + \cdots + \|x\|_\infty^2}_{n}} \\ &= \sqrt{n\,\|x\|_\infty^2} = \sqrt{n}\,\|x\|_\infty.\end{aligned}$$

(c) Dokazati želimo

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

Če neenačbo kvadriramo, dobimo

$$\begin{aligned}&x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \le (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^2 \\ &\quad = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 2\cdot(\text{mešani členi, ki so vsi nenegativni}),\end{aligned}$$

torej neenakost velja.

4. Izračunajte prvo in neskončno normo danih matrik,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Izračunajmo normi matrike A. Vsoti absolutnih vrednosti po stolpcih sta 9 in 12, torej je $\|A\|_1 = \max\{9, 12\} = 12$. Vsote po vrsticah so 3,7,11, torej je $\|A\|_\infty = \max\{3, 7, 11\} = 11$. Normi matrike B sta

$$\begin{aligned}\|B\|_1 &= \max\{5, 13, 19\} = 19, \\ \|B\|_\infty &= \max\{15, 12, 10\} = 15.\end{aligned}$$

5. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -2 & n-1 & & & & \\ n-1 & -4 & n-2 & & & \\ & n-2 & -6 & n-3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -2(n-1) & 1 \\ & & & & 1 & -2n \end{bmatrix}.$$

Izračunajte prvo in neskončno normo.

Rešitev. Izračunajmo vsote absolutnih vrednosti stolpcev,

$$\begin{aligned}
1.\ \text{stolpec: } & n+1, \\
2.\ \text{stolpec: } & 2n+1, \\
3.\ \text{stolpec: } & 2n+1, \\
& \vdots \\
j\text{–ti stolpec: } & (n-j)+2j+(n-(j-1)) = 2n+1, \\
& \vdots \\
\text{zadnji stolpec: } & 2n+1,
\end{aligned}$$

torej je

$$\|A\|_1 = \max\{n+1, 2n+1\} = 2n+1.$$

Ker je matrika simetrična, so vsote absolutnih vrednosti vrstic enake vsotam absolutnih vrednosti stolpcev, zato je

$$\|A\|_\infty = \|A\|_1 = 2n+1.$$

6. Naj bo

$$N_\infty(A) = \max_{1\le i,k\le n} |a_{i,k}|,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Dokažite, da je $nN_\infty(A)$ matrična norma. Dokažite, da $N_\infty(A)$ ni matrična norma.

Rešitev. Preverimo po točkah.

(a) Nenegativnost je očitna, saj računamo maksimum nenegativnih števil, torej $nN_\infty(A) \ge 0$. Enakost dobimo natanko takrat, kadar so vsa števila enaka 0, torej natanko takrat, ko je $A = 0$.

(b) Preverimo po definiciji

$$nN_\infty(\alpha A) = n \max_{1\le i,k\le n} |\alpha a_{i,k}| = n\,|\alpha| \max_{1\le i,k\le n} |a_{i,k}| = |\alpha|\, nN_\infty(A),$$

torej tudi druga točka velja.

(c) Preverimo trikotniško neenakost,

$$\begin{aligned}
nN_\infty(A+B) &= n \max_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}+b_{i,j}| \\
&\le n \max_{1\le i,j\le n} (|a_{i,j}|+|b_{i,j}|) \\
&\le n\,(\max_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}| + \max_{1\le i,j\le n} |b_{i,j}|) \\
&= nN_\infty(A) + nN_\infty(B).
\end{aligned}$$

(d) Ostane še submultiplikativnost,

$$\begin{aligned}
nN_\infty(A \cdot B) &= n \max_{1\le i,k\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} \right| \\
&\le n \max_{1\le i,k\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} b_{j,k}| \\
&\le n \max_{1\le i,k\le n} \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\max_{1\le \ell,m\le n} |a_{\ell,m}|}_{N_\infty(A)} \cdot \underbrace{\max_{1\le \ell,m\le n} |b_{\ell,m}|}_{N_\infty(B)} \right) \\
&= nN_\infty(A) \cdot nN_\infty(B)
\end{aligned}$$

Veljajo vse točke, torej je $nN_\infty(A)$ matrična norma.

Pokažimo še, da $N_\infty(A)$ ni matrična norma. Definirajmo matriki

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Njun produkt je enak

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo $N_\infty(A)$, $N_\infty(B)$ in $N_\infty(A \cdot B)$,

$$\begin{aligned}
N_\infty(A) &= 1, \\
N_\infty(B) &= 1, \\
N_\infty(A \cdot B) &= 2.
\end{aligned}$$

Torej v tem primeru ne velja

$$N_\infty(A \cdot B) \le N_\infty(A) \cdot N_\infty(B)$$

in $N_\infty(A)$ ni matrična norma.

Poglavje 6

Reševanje sistemov linearnih enačb

6.1 Štetje operacij

Za izračun skalarnega produkta vektorjev $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$y^T x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

potrebujemo $2n-1$ osnovnih operacij (n množenj in $n-1$ seštevanj $\Rightarrow 2n-1$ operacij).
Produkt $y = A \cdot x,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, lahko izračunamo kot

$$y_i = \alpha_i^T \cdot x,$$

kjer je α_i^T $i-$ta vrstica matrike A. Za izračun potrebujemo $2n^2 - n$ osnovnih operacij (n skalarnih produktov po $2n-1$ operacij $\Rightarrow 2n^2 - n$ operacij).
Produkt dveh matrik $C = A \cdot B,\ A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, izračunamo po stolpcih kot

$$c_i = A \cdot b_i$$

in za izračun potrebujemo $2n^3 - n^2$ operacij ($n(2n^2 - n) = 2n^3 - n^2$).

6.2 LU razcep brez pivotiranja

Dano matriko A zapišemo kot produkt

$$A = L \cdot U,$$

kjer je L spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali in U zgornje trikotna matrika.
Elemente, s katerimi v algoritmu delimo, imenujemo *pivotni elementi (pivoti)*. Postopek deluje le, če so vsi pivoti neničelni, nestabilen pa je tudi, če so pivoti blizu 0. Rešitev obeh problemov je pivotiranje (delno ali kompletno).
Algoritem:

$j = 1, 2, \ldots, n-1$
    $i = j+1, j+2, \ldots, n$
        $\ell_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$
        $k = j+1, j+2, \ldots, n$
            $a_{ik} = a_{ik} - \ell_{ij} a_{jk}$

Število operacij, ki jih potrebujemo za izračun LU razcepa, je

$$\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n = \frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2).$$

Če rešujemo sistem $Ax = b$ s pomočjo LU razcepa, to naredimo v treh korakih:

1. izračunamo LU razcep matrike A
$$A = LU,$$
2. prema substitucija
$$Ly = b,$$
3. obratna substitucija
$$Ux = y.$$

Za rešitev sistema potrebujemo

$$\underbrace{\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n}_{\text{LU razcep}} + \underbrace{n^2 - n}_{\text{prema subst.}} + \underbrace{n^2}_{\text{obratna subst.}} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

operacij.
Algoritem za premo substitucijo $Ly = b$:

$y_1 = b_1$
$k = 2, 3, \ldots, n$
    $y_k = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj} y_j$

Algoritem za obratno substitucijo $Ux = y$:

$k = n, n-1, \ldots, 1$
    $x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j \right)$

6.2.1 Zgled

Izračunajmo LU razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

V vsakem koraku popravimo matriko A in dopolnimo matriko L. Zadnja prirejenka je matrika U.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriko A priredimo tako, da prepišemo prvo vrstico, prvi stolpec dopolnimo z ničlami in izpolnimo ostala mesta,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 - 2 \cdot 2 & 6 - 2 \cdot 3 \\ 0 & 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 & 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{\frac{5}{2}} \end{bmatrix},$$

hkrati zgradimo še prvi stolpec matrike L in na diagonali zapišemo enice,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{4}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ \frac{1}{2} & & 1 \end{bmatrix}.$$

Isti postopek ponovimo na manjšem delu matrike (zapisan odebeljeno) in dobimo

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} - 1 \cdot 0 \end{bmatrix}, \ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezultat je

$$A = L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

6.3 LU razcep s pivotiranjem

Pri delnem pivotiranju dopuščamo zamenjavo vrstic. To pomeni, da, ko pridemo do $j-$tega stolpca, poiščemo med $a_{jj}, a_{j+1,j}, \ldots, a_{nj}$ po absolutni vrednosti največji element in zamenjamo $j-$to vrstico in vrstico s po absolutni vrednosti maksimalnim elementom.

Rezultat je
$$PA = LU,$$
kjer je P permutacijska matrika, ki opisuje preureditev vrstic, L spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali in U zgornje trikotna matrika.

Algoritem za LU razcep z delnim pivotiranjem:

$j = 1, 2, \ldots, n-1$
    poišči indeks m, tako da je $|a_{mj}| \geq |a_{ij}|$ za $i = j, j+1, \ldots, n$
    zamenjaj $m-$to in $j-$to vrstico
    $i = j+1, j+2, \ldots, n$
        $\ell_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$
        $k = j+1, j+2, \ldots, n$
            $a_{ik} = a_{ik} - \ell_{ij} a_{jk}$

Velja $|\ell_{ij}| \leq 1$.
Število operacij, ki jih potrebujemo, je $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ in še $\mathcal{O}(n^2)$ primerjanj za iskanje pivotov.
Če rešujemo sistem $Ax = b$ s pomočjo LU razcepa z delnim pivotiranjem, to storimo v treh korakih:

1. poiščemo LU razcep z delnim pivotiranjem,
$$PA = LU,$$
2. prema substitucija,
$$Ly = Pb,$$
3. obratna substitucija,
$$Ux = y.$$

6.3.1 Zgled

Izračunajmo LU razcep z delnim pivotiranjem matrike
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Začetna permutacijska matrika P je kar identiteta, v matriki A je odebeljeno označen pivot,
$$P = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zamenjamo 1. in 2. vrstico,

$$P = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj naredimo korak kot v LU razcepu brez pivotiranja,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{-2} & -2 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Zamenjamo 2. in 3. vrstico,

$$P = \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}, A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

in naredimo korak LU razcepa,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U, \; L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezultat lahko preverimo z Octaveom, vpišemo `[L,U,P] = lu(A)`.

6.4 LU razcep s kompletnim pivotiranjem

Pri kompletnem pivotiranju dopuščamo zamenjavo vrstic in stolpcev. To pomeni, da, ko pridemo do $j-$tega stolpca, poiščemo po absolutni vrednosti največji element v podmatriki in zamenjamo ustrezni vrstici in stolpca. Rezultat je

$$PAQ = LU,$$

kjer je P permutacijska matrika, ki opisuje preureditev vrstic, Q permutacijska matrika za preureditev stolpcev, L spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali in U zgornje trikotna matrika.

Algoritem za LU razcep s kompletnim pivotiranjem:

$j = 1, 2, \ldots, n-1$
  poišči a_{mr} - po abs. vrednosti maksimalen element v $A(j:n, j:n)$
  zamenjaj $r-$ti in $j-$ti stolpec
  zamenjaj $m-$to in $j-$to vrstico
  $i = j+1, j+2, \ldots, n$

$\qquad\ell_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$

$\qquad k = j+1, j+2, \ldots, n$

$\qquad\quad a_{ik} = a_{ik} - \ell_{ij} a_{jk}$

Velja $|\ell_{ij}| \leq 1$.

Število operacij, ki jih potrebujemo, je $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ in še $\mathcal{O}(n^3)$ primerjanj za iskanje pivotov. Dodatna cena, ki jo plačamo za iskanje pivotov je običajno prevelika, da bi odtehtala večjo stabilnost.

Če rešujemo sistem $Ax = b$ s pomočjo LU razcepa s kompletnim pivotiranjem, to storimo v štirih korakih:

1. poiščemo LU razcep s kompletnim pivotiranjem,
$$PAQ = LU,$$
2. prema substitucija,
$$Ly = Pb,$$
3. obratna substitucija,
$$U\tilde{x} = y,$$
4. menjava komponent vektorja,
$$x = Q\tilde{x}.$$

6.5 Razcep Choleskega

Pravimo, da je matrika A *simetrična pozitivno definitna* natanko tedaj, ko velja
$$A = A^T \text{ in } x^T A x > 0 \text{ za vsak } x \neq 0.$$

V tem primeru se razcep Choleskega izvede. Ta razcep je najhitrejši način za ugotavljanje pozitivne definitnosti. Če matrika A ni pozitivno definitna, v algoritmu pod kvadratnim korenom dobimo negativne vrednosti. Simetričnost preverimo neposredno.

Matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zapišemo v obliki $A = V \cdot V^T$, kjer je V spodnje trikotna matrika, ki ima pozitivne diagonalne elemente ($v_{ii} > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$).

Algoritem:

$k = 1, 2, \ldots, n$

$\qquad v_{kk} = (a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ki}^2)^{\frac{1}{2}}$

$\qquad j = k+1, k+2, \ldots, n$

$\qquad\quad v_{jk} = \frac{1}{v_{kk}}(a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ji} v_{ki})$

Število operacij, ki jih potrebujemo za izračun razcepa Choleskega, je

$$\sum_{k=1}^{n}(2k + \sum_{j=k+1}^{n} 2k) = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2n}{3} = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2).$$

Če rešujemo sistem $Ax = b$, kjer je A simetrična pozitivno definitna matrika, to naredimo v treh korakih:

1. razcep Choleskega,
$$A = V \cdot V^T,$$
2. prema substitucija,
$$Vy = b,$$
3. obratna substitucija,
$$V^T x = y.$$

Število operacij, ki jih potrebujemo za rešitev sistema, je $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.

6.5.1 Zgled

Izračunajmo razcep Choleskega matrike

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 & -5 & -5 \\ 4 & 1 & 9 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & -2 & 22 & 7 \\ 4 & -5 & 1 & 7 & 14 \end{bmatrix}.$$

Elemente matrike V izračunamo kot piše v algoritmu, torej diagonalni element matrike V dobimo tako, da diagonalnemu elementu matrike A odštejemo vsoto kvadratov elementov matrike V levo od iskanega diagonalca in rezultat korenimo,

$$v_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ki}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Za $j > k$ računamo

$$v_{jk} = \frac{1}{v_{kk}}\left(a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ji}v_{ki}\right),$$

v vsoti so produkti istoležnih členov v $j-$ti in $k-$ti vrstici. Če torej iščemo element v 4. vrstici in 2. stolpcu, bomo množili elemente 2. in 4. vrstice (ne vseh), produkte sešteli in vsoto odšteli elementu matrike A. Rezultat delimo z diagonalnim elementom matrike V, ki leži nad iskanim elementom.

1. izračunamo prvi diagonalni element, $v_{11} = \sqrt{4} = 2$,

2. izračunamo prvi stolpec,

$$\begin{aligned} v_{21} &= \frac{1}{2}(-2) = -1, \\ v_{31} &= \frac{1}{2} \cdot 4 = 2, \\ v_{41} &= \frac{1}{2}(-2) = -1, \\ v_{51} &= \frac{1}{2} \cdot 4 = 2. \end{aligned}$$

   Do sem smo sestavili prvi stolpec

$$V = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & & & & \\ 2 & & & & \\ -1 & & & & \\ 2 & & & & \end{bmatrix}.$$

3. prestavimo se v drugi stolpec, izračunamo diagonalni element $v_{22} = \sqrt{10 - (-1)^2} = 3$,

4. izračunamo drugi stolpec,

$$\begin{aligned} v_{32} &= \frac{1}{3}(1 - 2 \cdot (-1)) = 1, \\ v_{42} &= \frac{1}{3}(-5 - (-1) \cdot (-1)) = -2, \\ v_{52} &= \frac{1}{3}(-5 - 2 \cdot (-1)) = -1, \end{aligned}$$

   sestavili smo matriko

$$V = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & 3 & & & \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & & & \\ -1 & -2 & & & \\ 2 & -1 & & & \end{bmatrix}.$$

5. v tretjem stolpcu spet najprej izračunamo diagonalni element $v_{33} = \sqrt{9 - \mathbf{2}^2 - \mathbf{1}^2} = 2$,

6. in izračunamo ostanek tretjega stolpca,

$$v_{43} = \frac{1}{2}(-2 - (-1) \cdot 2 - (-2) \cdot 1) = 1,$$
$$v_{53} = \frac{1}{2}(1 - 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) = -1,$$

dobimo matriko

$$V = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & 3 & & & \\ 2 & 1 & 2 & & \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & & \\ 2 & -1 & -1 & & \end{bmatrix}.$$

7. izračunamo še ostale elemente matrike V,

$$v_{44} = \sqrt{22 - (-1)^2 - (-2)^2 - 1^2} = 4,$$
$$v_{54} = \frac{1}{4}(7 - 2 \cdot (-1) - (-2) \cdot (-1) - (-1) \cdot 1) = 2,$$
$$v_{55} = \sqrt{14 - 2^2 - (-1)^2 - (-1)^2 - 2^2} = 2,$$

in rezultat je

$$V = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & 3 & & & \\ 2 & 1 & 2 & & \\ -1 & -2 & 1 & 4 & \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

6.6 Naloge

1. Izračunajte LU razcep brez pivotiranja danih matrik:

   (a)
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix},$$

   (b)
   $$B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix},$$

(c)

$$C=\begin{bmatrix}2&3&-4\\5&4&4\\-1&7&0\end{bmatrix},$$

(d)

$$D=\begin{bmatrix}2&-1&3\\4&2&1\\-6&-1&2\end{bmatrix},$$

(e)

$$E=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&-4&6\\3&-9&-3\end{bmatrix},$$

(f)

$$F=\begin{bmatrix}9&3&6\\4&6&1\\1&1&7\end{bmatrix},$$

(g)

$$G=\begin{bmatrix}1&4&2&3\\1&2&1&0\\2&6&3&1\\0&0&1&4\end{bmatrix}.$$

Rešitev.

(a)

$$A=\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3\\&1\end{bmatrix}=U,$$

$$L=\begin{bmatrix}1&\\2&1\end{bmatrix}.$$

(b)

$$B=\begin{bmatrix}3&6&-9\\2&5&-3\\-4&1&10\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3&6&-9\\0&1&3\\0&9&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3&6&-9\\0&1&3\\0&0&-29\end{bmatrix}=U,$$

$$L=\begin{bmatrix}1&&\\\frac{2}{3}&1&\\-\frac{4}{3}&9&1\end{bmatrix}.$$

(c)

$$C=\begin{bmatrix}2&3&-4\\5&4&4\\-1&7&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&3&-4\\0&-\frac{7}{2}&14\\0&\frac{17}{2}&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&3&-4\\0&-\frac{7}{2}&14\\0&0&32\end{bmatrix}=U,$$

$$L=\begin{bmatrix}1&&\\\frac{5}{2}&1&\\-\frac{1}{2}&-\frac{17}{7}&1\end{bmatrix}.$$

(d)

$$D=\begin{bmatrix}2&-1&3\\4&2&1\\-6&-1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-1&3\\0&4&-5\\0&-4&11\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-1&3\\0&4&-5\\0&0&6\end{bmatrix}=U,$$

$$L=\begin{bmatrix}1&&\\2&1&\\-3&-1&1\end{bmatrix}.$$

(e)

$$E=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&-4&6\\3&-9&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-8&0\\0&-15&-12\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-8&0\\0&0&-12\end{bmatrix}=U,$$

$$L=\begin{bmatrix}1&&\\2&1&\\3&\frac{15}{8}&1\end{bmatrix}.$$

(f)

$$F=\begin{bmatrix}9&3&6\\4&6&1\\1&1&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}9&3&6\\0&\frac{14}{3}&-\frac{5}{3}\\0&\frac{2}{3}&\frac{19}{3}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}9&3&6\\0&\frac{14}{3}&-\frac{5}{3}\\0&0&\frac{46}{7}\end{bmatrix}=U,$$

$$L=\begin{bmatrix}1&&\\\frac{4}{9}&1&\\\frac{1}{9}&\frac{1}{7}&1\end{bmatrix}.$$

(g)

$$G=\begin{bmatrix}1&4&2&3\\1&2&1&0\\2&6&3&1\\0&0&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&2&3\\0&-2&-1&-3\\0&-2&-1&-5\\0&0&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&2&3\\0&-2&-1&-3\\0&0&\mathbf{0}&-2\\0&0&1&4\end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Postopka ne moremo nadaljevati, saj je pivot enak 0. V tem primeru moramo uporabiti pivotiranje (naloga 12).

2. S pomočjo LU razcepa rešite sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Najprej izračunamo LU razcep za A,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -3 & 1 & \\ 4 & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -3 & 1 & \\ 4 & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ -3y_1 + y_2 &= 0 \Rightarrow y_2 = 3, \\ 4y_1 - \frac{4}{3}y_2 + y_3 &= 4 \Rightarrow y_3 = 4. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

torej

$$
\begin{aligned}
-\frac{5}{3}x_3 = 4 &\Rightarrow x_3 = -\frac{12}{5},\\
-3x_2 + 4x_3 = 3 &\Rightarrow x_2 = -\frac{21}{5},\\
2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 &\Rightarrow x_1 = \frac{4}{5},
\end{aligned}
$$

in rešitev sistema je $x = [\frac{4}{5}, -\frac{21}{5}, -\frac{12}{5}]^T$.

3. S pomočjo LU razcepa rešite sistem $Ax = b$, kjer je

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 2 & -7 & -7 & -6 \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ -4 & -1 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.
$$

Rešitev. Najprej izračunamo LU razcep za A,

$$
\begin{aligned}
A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -7 & -4 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \end{bmatrix} \sim \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U, \\
L &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ -1 & 0 & 1 & \\ -4 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$
\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ -1 & 0 & 1 & \\ -4 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},
$$

torej

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 1,\\
2y_1 + y_2 = 7 &\Rightarrow y_2 = 5,\\
-y_1 + y_3 = 0 &\Rightarrow y_3 = 1,\\
-4y_1 + 3y_2 - 5y_3 + y_4 = 3 &\Rightarrow y_4 = -3.
\end{aligned}
$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} x_4 &= -3, \\ 2x_3 + x_4 &= 1 \Rightarrow x_3 = 2, \\ -3x_2 + x_3 &= 5 \Rightarrow x_2 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 &= 1 \Rightarrow x_1 = -2, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [-2, -1, 2, -3]^T$.

4. S pomočjo LU razcepa rešite sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & 9 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \\ 7 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Najprej izračunamo LU razcep za A,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \\ 7 \\ -16 \end{bmatrix},$$

torej

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 8,\\
-2y_1 + y_2 &= -14 \Rightarrow y_2 = 2,\\
y_1 + 2y_2 + y_3 &= 7 \Rightarrow y_3 = -5,\\
-y_1 - y_2 + y_3 + y_4 &= -16 \Rightarrow y_4 = -1.
\end{aligned}
$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix},
$$

torej

$$
\begin{aligned}
x_4 &= -1,\\
-2x_3 + 3x_4 &= -5 \Rightarrow x_3 = 1,\\
x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \Rightarrow x_2 = -1,\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 8 \Rightarrow x_1 = 1,
\end{aligned}
$$

in rešitev sistema je $x = [1, -1, 1, -1]^T$.

5. S pomočjo LU razcepa rešite sistem linearnih enačb

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5,\\
2x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 18,\\
3x_1 - 9x_2 - 3x_3 &= 6.
\end{aligned}
$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix}.
$$

To je matrika iz naloge 1e, zato je

$$
U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}, \ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{15}{8} & 1 \end{bmatrix}.
$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$
\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{15}{8} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix},
$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 5, \\ 2y_1 + y_2 &= 18 \Rightarrow y_2 = 8, \\ 3y_1 + \frac{15}{8}y_2 + y_3 &= 6 \Rightarrow y_3 = -24. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -24 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} -12x_3 &= -24 \Rightarrow x_3 = 2, \\ -8x_2 &= 8 \Rightarrow x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \Rightarrow x_1 = 1, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [1, -1, 2]^T$.

6. S pomočjo LU razcepa rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 8x_2 + 6x_3 &= 0, \\ -2x_1 + 5x_3 &= -11. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix},$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ y_2 &= 0, \\ 2y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3 &= -11 \Rightarrow y_3 = -11. \end{aligned}$$

Rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} 6x_3 = -11 \Rightarrow x_3 &= -\frac{11}{6}, \\ 8x_2 + 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 &= \frac{11}{8}, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 &= \frac{11}{12}, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [\frac{11}{12}, \frac{11}{8}, -\frac{11}{6}]^T$.

7. S pomočjo LU razcepa rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= -4. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix},$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ 2y_1 + y_2 &= 6 \Rightarrow y_2 = 6, \\ 3y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3 &= -4 \Rightarrow y_3 = -6. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} -2x_3 &= -6 \Rightarrow x_3 = 3, \\ -3x_2 + 3x_3 &= 6 \Rightarrow x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \Rightarrow x_1 = 2, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [2, 1, 3]^T$.

8. S pomočjo LU razcepa rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 2x + 6y + 4z &= 5, \\ 6x + 19y + 12z &= 6, \\ 2x + 8y + 14z &= 7. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 19 & 12 \\ 2 & 8 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 19 & 12 \\ 2 & 8 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 3 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $L\tilde{y} = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 3 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= 5, \\ 3\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 &= 6 \Rightarrow \tilde{y}_2 = -9, \\ \tilde{y}_1 + 2\tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 &= 7 \Rightarrow \tilde{y}_3 = 20. \end{aligned}$$

Rešimo sistem $U\tilde{x} = \tilde{y}$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 20 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} 10z &= 20 \Rightarrow z = 2, \\ y &= -9, \\ 2x + 6y + 4z &= 5 \Rightarrow x = \frac{51}{2}, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = \frac{51}{2},\ y = -9,\ z = 2.$

9. S pomočjo LU razcepa rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 14, \\ -2x_1 - x_3 &= -7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 13. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -7 \\ 13 \end{bmatrix},$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -7 \\ 13 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 14, \\ -2y_1 + y_2 &= -7 \Rightarrow y_2 = 21, \\ 2y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3 &= 13 \Rightarrow y_3 = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 21 \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} x_3 &= 1, \\ 6x_2 + 9x_3 &= 21 \Rightarrow x_2 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 14 \Rightarrow x_1 = 3, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [3, 2, 1]^T$.

10. S pomočjo LU razcepa rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ -2 & -2 & 1 & \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ -2 & -2 & 1 & \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ y_1 + y_2 &= 2 \Rightarrow y_2 = 1, \\ -2y_1 - 2y_2 + y_3 &= 3 \Rightarrow y_3 = 7, \\ 2y_1 + y_2 + y_4 &= 1 \Rightarrow y_4 = -2. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix},$$

torej

$$
\begin{aligned}
x_4 &= -2, \\
-x_3 + 2x_4 = 7 &\Rightarrow x_3 = -11, \\
-x_2 - 2x_3 = 1 &\Rightarrow x_2 = 21, \\
x_1 + 3x_2 + x_4 = 1 &\Rightarrow x_1 = -60,
\end{aligned}
$$

in rešitev sistema je $x = [-60, 21, -11, -2]^T$.

11. Izračunajte LU razcep z delnim pivotiranjem danih matrik:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix},$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

(a) Poiščemo pivot v matriki

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \mathbf{2} & 7 \end{bmatrix},$$

zamenjamo 1. in 2. vrstico,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in naredimo korak LU razcepa,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = U, \; L = \begin{bmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Poiščemo pivot v matriki

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zamenjamo 1. in 2. vrstico,

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

in naredimo korak LU razcepa,

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U, \ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Izračunajte LU razcep z delnim pivotiranjem za matriko iz točke 1g.

Rešitev. Poiščemo pivot v matriki

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \mathbf{2} & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

zamenjamo 1. in 3. vrstico

$$G \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

in naredimo korak LU razcepa,

$$G \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -\mathbf{1} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix},$$

zamenjamo 3. in 4. vrstico,

$$G \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U,\ P = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. S pomočjo LU razcepa z delnim pivotiranjem rešite sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Najprej izračunajmo LU razcep z delnim pivotiranjem,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ \mathbf{4} & -10 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} = U,\ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zamenjali smo 1. in 2. vrstico, zato je

$$P = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem $Ly = Pb$,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix},$$

torej

$$y_1 = -8,$$
$$\frac{1}{2}y_1 + y_2 = 5 \Rightarrow y_2 = 9,$$
$$\frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 = 13 \Rightarrow y_3 = \frac{21}{2}.$$

Rešimo sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 9 \\ \frac{21}{2} \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} \frac{7}{2}x_3 = \frac{21}{2} &\Rightarrow x_3 = 3, \\ 9x_2 = 9 &\Rightarrow x_2 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 2x_3 = -8 &\Rightarrow x_1 = -1, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [-1, 1, 3]^T$.

14. S pomočjo LU razcepa z delnim pivotiranjem rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -1, \\ 5x_1 + 2x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej izračunajmo LU razcep z delnim pivotiranjem,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{5} & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{13}{5} & 4 \\ 0 & \boldsymbol{\frac{16}{5}} & -2 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{5} & 1 & \\ \frac{2}{5} & & 1 \end{bmatrix}.$$

Zamenjali smo 1. in 3. vrstico. Zdaj zamenjamo 2. in 3. vrstico, zato je

$$P = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}.$$

Nadaljujemo z razcepom,

$$A \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & -2 \\ 0 & \frac{13}{5} & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{45}{8} \end{bmatrix} = U,\ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{2}{5} & 1 & \\ \frac{1}{5} & \frac{13}{16} & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem $Ly = Pb$,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{2}{5} & 1 & \\ \frac{1}{5} & \frac{13}{16} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 2, \\ \frac{2}{5}y_1 + y_2 &= 6 \Rightarrow y_2 = \frac{26}{5}, \\ \frac{1}{5}y_1 + \frac{13}{16}y_2 + y_3 &= -1 \Rightarrow y_3 = -\frac{45}{8}. \end{aligned}$$

Rešimo sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{45}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{26}{5} \\ -\frac{45}{8} \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} x_3 &= -1, \\ \frac{16}{5}x_2 - 2x_3 &= \frac{26}{5} \Rightarrow x_2 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 &= 2 \Rightarrow x_1 = 0. \end{aligned}$$

Rešitev sistema je $x = [0, 1, -1]^T$.

15. Rešite sistem s pomočjo LU razcepa s kompletnim pivotiranjem:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Najprej izračunajmo LU razcep s kompletnim pivotiranjem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & \mathbf{4} & 2 \end{bmatrix},$$

zamenjamo 1. in 3. vrstico, 1. in 2. stolpec,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Naredimo korak LU algoritma brez pivotiranja,

$$A \sim \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}, \ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ -\frac{1}{2} & & 1 \end{bmatrix},$$

zamenjamo 2. in 3. vrstico, 2. in 3. stolpec,

$$A \sim \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U, \ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem $Ly = Pb$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 2, \\ -\frac{1}{2}y_1 + y_2 &= 1 \Rightarrow y_2 = 2, \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 &= 4 \Rightarrow y_3 = 2. \end{aligned}$$

Rešimo sistem $U\tilde{x} = y$,

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3 &= 2, \\ 2\tilde{x}_2 &= 2 \Rightarrow \tilde{x}_2 = 1, \\ 4\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3 &= 2 \Rightarrow \tilde{x}_1 = 1, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = Q\tilde{x} = [2, 1, 1]^T$.

16. Izračunajte $\det A$ z uporabo LU razcepa,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

in preštejte število operacij.

Rešitev. Izračunajmo LU razcep matrike A,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \ L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{3}{2} & & 1 & \\ -\frac{1}{2} & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker bi morali deliti z 0, uporabimo pivotiranje in zamenjamo 2. in 3. vrstico,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \ L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{3}{2} & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ -\frac{1}{2} & & & 1 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Nadaljujmo z LU razcepom,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{3}{2} & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Velja $PA = LU$, torej $\det(PA) = \det P \cdot \det A = \det L \cdot \det U$,

$$-1 \cdot \det A = 1 \cdot \left(2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot (-2) \cdot 1\right) = 14,$$

torej je $\det A = -14$. Ker smo enkrat menjali vrstici, je $\det P = -1$. Če bi menjali sodo število vrstic, bi bila $\det P = 1$.

Število operacij, ki so potrebne za izračun $\det A$, je

$$\underbrace{\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)}_{\text{LU razcep}} + \underbrace{n-1}_{\det U}.$$

17. Sestavite učinkovit algoritem za LU razcep brez pivotiranja tridiagonalne matrike

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_3 & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_n & a_n \end{bmatrix}$$

in preštejte število operacij.

Pomagajte si s primerom na matriki

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Najprej izračunajmo LU razcep matrike B,

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{7} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{7} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{11} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 4 & 1 & & \\ 0 & -\frac{2}{7} & 1 & \\ 0 & 0 & \frac{7}{11} & 1 \end{bmatrix}.$$

Torej je matrika L oblike

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_2 & 1 & & & \\ & \ell_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ell_n & 1 \end{bmatrix},$$

matrika U pa oblike

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & v_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo produkt, saj hočemo $A = LU$,

$$L \cdot U = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 0 & \dots & & \\ \ell_2 u_1 & \ell_2 v_1 + u_2 & v_2 & 0 & \dots & \\ 0 & \ell_3 u_2 & \ell_3 v_2 + u_3 & v_3 & \dots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ell_{n-1} u_{n-2} & \ell_{n-1} v_{n-2} + u_{n-1} & v_{n-1} & \\ & & & \ell_n u_{n-1} & \ell_n v_{n-1} + u_n & \end{bmatrix},$$

zdaj pa primerjajmo istoležne elemente matrik,

$$\begin{aligned} v_i &= b_i, \\ u_1 &= a_1, \\ \ell_2 &= \frac{c_2}{u_1}, \\ u_2 &= a_2 - \ell_2 v_1, \end{aligned}$$

v $i-$ti vrstici dobimo:

$$\begin{aligned} \ell_i u_{i-1} = c_i &\Rightarrow \ell_i = \frac{c_i}{u_{i-1}}, \\ \ell_i v_{i-1} + u_i = a_i &\Rightarrow u_i = a_i - \ell_i v_{i-1}. \end{aligned}$$

Algoritem je torej:

```
1   u_1 = a_1, v_1 = b_1
2   i = 2, 3, ..., n
3       v_i = b_i
4       ℓ_i = c_i / u_{i-1}
5       u_i = a_i − ℓ_i v_{i-1}
```

Preštejmo število operacij: v četrti vrstici algoritma imamo 1 deljenje, v peti vrstici pa 2 operaciji (množenje in odštevanje). Število operacij je torej enako

$$\sum_{i=2}^{n} 3 = 3(n-1) = 3n - 3.$$

Za polno matriko je število operacij $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.

18. Rešite sistem $Ax = b$, kjer je A tridiagonalna matrika, in preštejte število operacij. Pomagajte si z rezultatom iz naloge 17.

Rešitev. Sistem bomo rešili v treh korakih,

(a) LU razcep,

$$A = LU,$$

(b) prema substitucija,

$$Ly = b,$$

(c) obratna substitucija,

$$Ux = y.$$

Najprej rešujemo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_2 & 1 & & & \\ & \ell_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ell_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1, \\ \ell_2 y_1 + y_2 &= b_2 \Rightarrow y_2 = b_2 - \ell_2 y_1, \\ \ell_3 y_2 + y_3 &= b_3 \Rightarrow y_3 = b_3 - \ell_3 y_2, \\ i\text{−ta vrstica:} & \\ \ell_i y_{i-1} + y_i &= b_i \Rightarrow y_i = b_i - \ell_i y_{i-1}. \end{aligned}$$

Algoritem je torej:

```
1     y_1 = b_1
2     i = 2, 3, ..., n
3         y_i = b_i - ℓ_i y_{i-1}
```

Število operacij, ki jih potrebujemo, je $2(n-1) = 2n-2$.

Zdaj rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & v_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} u_n x_n = y_n &\Rightarrow x_n = \frac{y_n}{u_n}, \\ u_{n-1}x_{n-1} + v_{n-1}x_n = y_{n-1} &\Rightarrow x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - v_{n-1}x_n}{u_{n-1}}, \\ u_{n-2}x_{n-2} + v_{n-2}x_{n-1} = y_{n-2} &\Rightarrow x_{n-2} = \frac{y_{n-2} - v_{n-2}x_{n-1}}{u_{n-2}}, \\ i\text{−ta vrstica: } x_i &= \frac{y_i - v_i x_{i+1}}{u_i}, \end{aligned}$$

in algoritem je:

$x_n = \frac{y_n}{u_n}$
$i = n-1, n-2, \ldots, 1$
$\quad x_i = \frac{y_i - v_i x_{i+1}}{u_i}$

Število operacij, ki jih potrebujemo, je

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} 3 = 1 + 3(n-1) = 3n - 2,$$

torej za rešitev celotnega sistema potrebujemo

$$\underbrace{3n + \mathcal{O}(1)}_{\text{LU razcep}} + \underbrace{2n + \mathcal{O}(1)}_{\text{prema subst.}} + \underbrace{3n + \mathcal{O}(1)}_{\text{obratna subst.}} = 8n + \mathcal{O}(1)$$

operacij.

Da algoritem deluje, morajo biti vsi $u_i \neq 0$. Kdaj se zgodi, da je kakšen $u_i = 0$? Oglejmo si determinanto

$$\det A = \det L \cdot \det U = 1 \cdot u_1 u_2 \cdots u_n,$$

torej je nek $u_i = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$, kar pomeni, da A ni obrnljiva in imamo težave z reševanjem sistema. Takrat ni rešitve ali pa jih je neskončno, taki sistemi pa nas ne zanimajo.

19. Izračunajte razcep Choleskega za matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 13 & 23 & 8 & 8 \\ 4 & 23 & 77 & 32 & 32 \\ 1 & 8 & 32 & 30 & 30 \\ 1 & 8 & 32 & 30 & 55 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Izračunajmo elemente po algoritmu,

$$V_A = \begin{bmatrix} \sqrt{1} = 1 & & & & \\ \frac{1}{1} \cdot 2 = 2 & \sqrt{13 - 2^2} = 3 & & & \\ \frac{1}{1} \cdot 4 = 4 & \frac{1}{3}(23 - 2 \cdot 4) = 5 & \sqrt{77 - 4^2 - 5^2} = 6 & & \\ \frac{1}{1} \cdot 1 = 1 & \frac{1}{3}(8 - 2 \cdot 1) = 2 & \frac{1}{6}(32 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 5) = 3 & \sqrt{30 - 1^2 - 2^2 - 3^2} = 4 & \\ \frac{1}{1} \cdot 1 = 1 & \frac{1}{3}(8 - 2 \cdot 1) = 2 & \frac{1}{6}(32 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 5) = 3 & \frac{1}{4}(30 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) = 4 & \sqrt{55 - 1^2 - 2^2 - 3^2 - 4^2} = 5 \end{bmatrix},$$

rezultat je torej matrika

$$V_A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 3 & & & \\ 4 & 5 & 6 & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo še razcep za matriko B,

$$V_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

20. Preštejte število operacij, ki jih potrebujete za reševanje sistema $Ax = b$, kjer je $A \in \mathbb{C}^{n\times n},\ x, b \in \mathbb{C}^n$.

Rešitev. Zapišimo

$$\begin{aligned} A &= A_1 + iA_2, \\ x &= x_1 + ix_2, \\ b &= b_1 + ib_2, \end{aligned}$$

torej lahko sistem $Ax = b$ zapišemo kot

$$(A_1 + iA_2)(x_1 + ix_2) = b_1 + ib_2.$$

Ko primerjamo realni in imaginarni komponenti, dobimo

$$\begin{aligned} A_1x_1 - A_2x_2 &= b_1, \\ A_2x_1 + A_1x_2 &= b_2, \end{aligned}$$

v matrični obliki je to

$$\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

kar je realni sistem dimenzije $2n \times 2n$. Za reševanje torej potrebujemo $\frac{2}{3}(2n)^3 + \mathcal{O}(n^2) = \frac{16n^3}{3}$ operacij v realni aritmetiki.

Preštejmo še število operacij, ki jih potrebujemo za standardni LU razcep v kompleksni aritmetiki. Najprej preštejmo število operacij v realni aritmetiki, ki jih potrebujemo za izračun ene kompleksne operacije. Naj bosta $x = a + bi,\ y = c + di$ kompleksni števili. Njuno vsoto ali razliko izračunamo kot

$$x \pm y = (a \pm c) + i(b \pm d),$$

torej za izračun potrebujemo 2 realni operaciji. Produkt izračunamo kot

$$x \cdot y = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

torej potrebujemo 6 realnih operacij. Za kvocient

$$\frac{x}{y} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2},$$

pa potrebujemo 11 realnih operacij.

V algoritmu LU razcepa je

(a) število deljenj

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} 1 &= \sum_{j=1}^{n-1} (n - j) = (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n),\end{aligned}$$

(b) število množenj

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} 1 &= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (n - j) = \sum_{j=1}^{n-1} (n - j)^2 \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2),\end{aligned}$$

(c) število odštevanj

$$\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2).$$

Število realnih operacij, ki jih potrebujemo za reševanje kompleksnega sistema je torej,

$$\begin{aligned}&\underbrace{11 \cdot \left(\frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n)\right)}_{\text{deljenje}} + \underbrace{6 \cdot \left(\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)\right)}_{\text{množenje}} + \underbrace{2 \cdot \left(\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)\right)}_{\text{odštevanje}} \\ &= \frac{8}{3} n^3 + \mathcal{O}(n^2).\end{aligned}$$

Poglavje 7

Iterativno reševanje sistemov linearnih enačb

Rešujemo sistem $Ax = b$. Sistem prevedemo na ekvivalentni sistem $x = Rx + c$, ki ga rešujemo z iteracijo

$$x^{(r+1)} = Rx^{(r)} + c,\ r = 0, 1, \ldots .$$

Matriko R imenujemo *iteracijska matrika.* Iterativne metode uporabljamo za reševanje velikih sistemov enačb $Ax = b$, kjer je večina elementov matrike enakih 0.

Izrek. Zaporedje vektorjev, ki jih izračunamo po vektorski formuli $x^{(r+1)} = Rx^{(r)} + c$, konvergira za vsak $x^{(0)}$ natanko takrat, ko je $\rho(R) < 1$, tj. natanko takrat, ko so vse lastne vrednosti matrike R po absolutni vrednosti manjše od 1.

7.1 Jacobijeva iteracija

Algoritem:

$r = 0, 1, 2, \ldots$

  $k = 1, 2, \ldots, n$

$$x_k^{(r+1)} = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j^{(r)} \right)$$

V matrični obliki to pomeni, da matriko zapišemo kot $A = L + D + U$, kjer je L strogo spodnje trikotna matrika, D diagonalna matrika in U strogo zgornje trikotna matrika. Potem sistem zapišemo kot

$$Dx^{(r+1)} = -(L + U)x^{(r)} + b.$$

Pri Jacobijevi iteraciji je iteracijska matrika enaka

$$R_J = -D^{-1}(L+U).$$

7.2 Gauss - Seidlova iteracija

Algoritem:

$r = 0, 1, 2, \ldots$

$\quad k = 1, 2, \ldots, n$

$$x_k^{(r+1)} = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j^{(r+1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j^{(r)} \right)$$

V matrični obliki to pomeni, da matriko zapišemo kot $A = L + D + U$, kjer je L strogo spodnje trikotna matrika, D diagonalna matrika in U strogo zgornje trikotna matrika. Sistem zapišemo kot

$$(L+D)x^{(r+1)} = -Ux^{(r)} + b.$$

Pri Gauss-Seidlovi iteraciji je iteracijska matrika enaka

$$R_{GS} = -(L+D)^{-1}U.$$

Izrek. Če je matrika A simetrična pozitivno definitna, potem Gauss-Seidlova iteracija konvergira za poljuben $x^{(0)}$.
Pravimo, da je matrika *strogo diagonalno dominantna po vrsticah*, če velja

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Izrek. Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija konvergirata za poljuben začetni približek $x^{(0)}$ za matrike, ki so po vrsticah strogo diagonalno dominantne.

7.2.1 Zgled

Poglejmo, kako se Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija obnašata pri reševanju sistema

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

V Octave vnesemo podatka A in b, izberemo začetni približek $x^{(0)} = \mathbf{0}$ in zahtevano natančnost 10^{-10}. V spodnji tabeli so rezultati, ki jih vrneta funkciji `jacobi` in `gauss_seidel` ([1]). Za primerjavo je navedena tudi točna rešitev sistema in razlika približka od točne rešitve. Za dobljena približka porabimo 44 korakov Jacobijeve iteracije oz. 23 korakov Gauss-Seidlove iteracije. Gauss-Seidlova iteracija je približno dvakrat hitrejša od Jacobijeve.

Jacobi	napaka	Gauss-Seidel	napaka	točna rešitev
-0.1751724138	$2.05 \cdot 10^{-11}$	-0.1751724138	$-2.15 \cdot 10^{-11}$	-0.1751724138
-0.5337931034	$3.48 \cdot 10^{-11}$	-0.5337931035	$-2.09 \cdot 10^{-12}$	-0.5337931035
0.4165517241	$-8.95 \cdot 10^{-12}$	0.4165517241	$-1.43 \cdot 10^{-11}$	0.4165517241
1.371034483	$-3.80 \cdot 10^{-11}$	1.371034483	$-2.54 \cdot 10^{-12}$	1.371034483

Če metodi preizkusimo pri reševanju sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

ne konvergirata.

7.3 Metoda SOR

Vpeljemo *relaksacijski parameter* ω. Z ustrezno izbranim ω pospešimo konvergenco iteracije. Nov približek dobimo iz

$$x_k^{(r+1)(\mathrm{SOR})} = x_k^{(r)} + \omega(x_k^{(r+1)(\mathrm{GS})} - x_k^{(r)}),$$

kar je isto kot

$$x_k^{(r+1)} = x_k^{(r)} + \frac{\omega}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j^{(r+1)} - \sum_{j=k}^{n} a_{kj} x_j^{(r)} \right).$$

Pri $\omega = 1$ je metoda SOR kar Gauss-Seidlova metoda.
Zapišimo metodo SOR še v matrični obliki

$$(\omega L + D) x^{(r+1)} = ((1-\omega)D - \omega U)\, x^{(r)} + \omega b,$$

torej je

$$R_{SOR}(\omega) = (\omega L + D)^{-1} \left((1-\omega)D - \omega U \right).$$

Izrek. Metoda SOR ne konvergira za vsak začetni približek $x^{(0)}$, če $\omega \notin (0, 2)$.
Izrek. Če je matrika A simetrična pozitivno definitna, potem metoda SOR konvergira za poljuben začetni približek $x^{(0)}$ za vsak $\omega \in (0, 2)$.

7.4 Naloge

1. Naredite dva koraka Jacobijeve iteracije z začetnim približkom $x^{(0)} = [0,0]^T$ za reševanje sistema $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Preoblikujmo sistem v obliko $Dx^{(r+1)} = -(L+U)x^{(r)} + b$,

$$\begin{bmatrix} 2 & \\ & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo

$$x_1^{(1)} = \frac{11}{2}, \; x_2^{(1)} = \frac{13}{7}.$$

Naredimo nov korak metode,

$$\begin{bmatrix} 2 & \\ & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{13}{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{38}{7} \\ -\frac{29}{2} \end{bmatrix},$$

od koder dobimo

$$x_1^{(2)} = \frac{19}{7}, \; x_2^{(2)} = -\frac{29}{14}.$$

2. Naredite dva koraka Jacobijeve iteracije in korak Gauss-Seidlove iteracije z začetnim približkom $x^{(0)} = [0,0,0]^T$ pri reševanju sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Preoblikujmo sistem v obliko $Dx^{(r+1)} = -(L+U)x^{(r)} + b$,

$$\begin{bmatrix} 5 & & \\ & 7 & \\ & & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo

$$x_1^{(1)} = \frac{2}{5}, \; x_2^{(1)} = -\frac{1}{7}, \; x_3^{(1)} = \frac{1}{6}.$$

Naredimo nov korak Jacobijeve metode,

$$\begin{bmatrix} 5 & & \\ & 7 & \\ & & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{103}{42} \\ -\frac{27}{10} \\ \frac{1}{35} \end{bmatrix},$$

od koder dobimo

$$x_1^{(2)} = \frac{103}{210},\ x_2^{(2)} = -\frac{27}{70},\ x_3^{(2)} = \frac{1}{210}.$$

Naredimo še korak Gauss-Seidlove metode. Najprej preoblikujmo sistem v obliko $(L+D)x^{(r+1)} = -Ux^{(r)} + b$,

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo rešitev,

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{2}{5}, \\ 3x_1^{(1)} + 7x_2^{(1)} = -1 \Rightarrow x_2^{(1)} &= -\frac{11}{35}, \\ x_1^{(1)} - 4x_2^{(1)} + 6x_3^{(1)} = 1 \Rightarrow x_3^{(1)} &= -\frac{23}{210}. \end{aligned}$$

3. Naredite dva koraka Jacobijeve iteracije in korak Gauss-Seidlove iteracije z začetnim približkom $x^{(0)} = [0,0,0]^T$ pri reševanju sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Preoblikujmo sistem v obliko $Dx^{(r+1)} = -(L+U)x^{(r)} + b$,

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{2},\ x_2^{(1)} = 1,\ x_3^{(1)} = -\frac{1}{4}.$$

Naredimo nov korak Jacobijeve metode,

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

od koder dobimo

$$x_1^{(2)} = \frac{5}{8},\ x_2^{(2)} = \frac{7}{8},\ x_3^{(2)} = -\frac{1}{8}.$$

Naredimo še korak Gauss-Seidlove metode. Najprej preoblikujmo sistem v obliko $(L+D)x^{(r+1)} = -Ux^{(r)} + b$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo rešitev,

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{2}, \\ x_2^{(1)} &= 1, \\ x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 4x_3^{(1)} &= -1 \Rightarrow x_3^{(1)} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4. Naredite dva koraka Gauss-Seidlove metode z danim začetnim približkom $x^{(0)} = [0,0,0]^T$ za sistem

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

in ga preoblikujmo v obliko $(L+D)x^{(r+1)} = -Ux^{(r)} + b$,

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema je $x^{(1)} = [\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]^T$. Naredimo še drugi korak,

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema je $x^{(2)} = [\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{13}{21}]^T$.

5. Naredite en korak Gauss-Seidlove iteracije za dane sisteme linearnih enačb z začetnim približkom $\mathbf{0}$:

(a)

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 &= 19, \\ x_1 - 3x_2 + 12x_3 &= 31, \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 13, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13, \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 &= 13, \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x - y + z &= -7, \\ 20x + 3y - 2z &= 51, \\ 2x + 8y + 4z &= 25, \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} 10x - y &= 1, \\ -x + 10y - z &= 1, \\ -y + 10z - w &= 1, \\ -z + 10w &= 1. \end{aligned}$$

Rešitev. Te sisteme bomo rešili na drugačen način. Najprej iz prve enačbe izrazimo prvo spremenljivko, iz druge drugo, ..., potem pa uporabimo vrednosti spremenljivk za izračun.

(a) Izrazimo spremenljivke in dobimo sistem, v katerega vstavimo vrednosti spremenljivk,

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(3 - x_2^{(0)} + x_3^{(0)}\right) = \frac{3}{4}, \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{7}\left(19 - 2x_1^{(1)} - x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{7}\left(19 - 2 \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{2}, \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{12}\left(31 - x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{12}\left(31 - \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{5}{2}\right) = \frac{151}{48}. \end{aligned}$$

(b) Izrazimo spremenljivke in dobimo sistem, v katerega vstavimo vrednosti spremenljivk,

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(13 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) = \frac{13}{10},\\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(13 - 2x_1^{(1)} - x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{10}\left(13 - 2\cdot\frac{13}{10}\right) = \frac{26}{25},\\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(13 - 2x_1^{(1)} - x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{10}\left(13 - 2\cdot\frac{13}{10} - \frac{26}{25}\right) = \frac{117}{125}.
\end{aligned}$$

(c) Izrazimo spremenljivke in dobimo sistem, v katerega vstavimo vrednosti spremenljivk,

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= -7 + y^{(0)} - z^{(0)} = -7,\\
y^{(1)} &= \frac{1}{3}\left(51 - 20x^{(1)} + 2z^{(0)}\right) = \frac{1}{3}\left(51 - 20\cdot(-7)\right) = \frac{191}{3},\\
z^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(25 - 2x^{(1)} - 8y^{(1)}\right) = \frac{1}{4}\left(25 + 2\cdot 7 - 8\cdot\frac{191}{3}\right) = -\frac{1411}{12}.
\end{aligned}$$

(d) Izrazimo spremenljivke in dobimo sistem, v katerega vstavimo vrednosti spremenljivk,

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(1 + y^{(0)}\right) = \frac{1}{10},\\
y^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(1 + x^{(1)} + z^{(0)}\right) = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{10}\right) = \frac{11}{100},\\
z^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(1 + y^{(1)} + w^{(0)}\right) = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{11}{100}\right) = \frac{111}{1000},\\
w^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(1 + z^{(1)}\right) = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{111}{1000}\right) = \frac{1111}{10000}.
\end{aligned}$$

6. Naredite en korak Jacobijeve in en korak Gauss-Seidlove iteracije za sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}
10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6,\\
-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25,\\
2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= 11,\\
3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15.
\end{aligned}$$

V obeh primerih uporabite začetni približek $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$. V Octaveu primerjajte hitrost konvergence obeh metod.

Rešitev. Izrazimo spremenljivke v sistemu in dobimo

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{10}(6 + x_2 - 2x_3), \\ x_2 &= \frac{1}{11}(25 + x_1 + x_3 - 3x_4), \\ x_3 &= \frac{1}{10}(11 - 2x_1 + x_2 + x_4), \\ x_4 &= \frac{1}{8}(15 - 3x_2 + x_3). \end{aligned}$$

Pri Jacobijevi metodi na desni strani vedno uporabimo približek iz prejšnjega koraka, zato je rešitev

$$x^{(1)} = \left[\frac{3}{5}, \frac{25}{11}, \frac{11}{10}, \frac{15}{8}\right]^T.$$

Pri Gauss-Seidlovi metodi pa uporabimo tudi vrednosti iz tekočega koraka, zato dobimo

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{3}{5}, \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{11}\left(25 + \frac{3}{5}\right) = \frac{128}{55}, \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(11 - 2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{128}{55}\right) = \frac{667}{550}, \\ x_4^{(1)} &= \frac{1}{8}\left(15 - 3 \cdot \frac{128}{55} + \frac{667}{550}\right) = \frac{5077}{4400}. \end{aligned}$$

Primerjajmo hitrost konvergence. Vnesimo matriko sistema, desno stran in začetni približek v Octave. Rezultate izračunajmo do natančnosti 10^{-10}. Uporabimo programa `jacobi` in `gauss_seidel` ([1]) in poglejmo, ali iteraciji v tem primeru konvergirata in če da, kam.

Jacobijeva iteracija se konča po 29 korakih, Gauss-Seidlova pa po 12 korakih. Oba rezultata se res za manj kot 10^{-10} razlikujeta od točne rešitve sistema, torej iteraciji konvergirata k točni rešitvi sistema.

7. Izračunajte prva dva približka za rešitev sistema

$$\begin{aligned} 12x_1 - 3x_2 + x_3 &= 10, \\ -x_1 + 9x_2 + 2x_3 &= 10, \\ x_1 - x_2 + 10x_3 &= 10, \end{aligned}$$

po Jacobijevi in Gauss-Seidlovi metodi za začetni približek $[1, 0, 1]^T$.

Rešitev. Izrazimo spremenljivke v sistemu in dobimo

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{12}(10 + 3x_2 - x_3),\\
x_2 &= \frac{1}{9}(10 + x_1 - 2x_3),\\
x_3 &= \frac{1}{10}(10 - x_1 + x_2).
\end{aligned}
$$

Pri Jacobijevi metodi na desni strani vedno uporabimo približek iz prejšnjega koraka,

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{12}(10 + 3 \cdot 0 - 1) = \frac{3}{4},\\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{9}(10 + 1 - 2 \cdot 1) = 1,\\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}(10 - 1 + 0) = \frac{9}{10}
\end{aligned}
$$

in

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{1}{12}\left(10 + 3 \cdot 1 - \frac{9}{10}\right) = \frac{121}{120},\\
x_2^{(2)} &= \frac{1}{9}\left(10 + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{9}{10}\right) = \frac{179}{180},\\
x_3^{(2)} &= \frac{1}{10}\left(10 - \frac{3}{4} + 1\right) = \frac{41}{40}.
\end{aligned}
$$

Pri Gauss-Seidlovi metodi uporabimo tudi vrednosti iz tekočega koraka, zato dobimo

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{3}{4},\\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{9}\left(10 + \frac{3}{4} - 2 \cdot 1\right) = \frac{35}{36},\\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(10 - \frac{3}{4} + \frac{35}{36}\right) = \frac{46}{45}
\end{aligned}
$$

in

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{1}{12}\left(10 + 3 \cdot \frac{35}{36} - \frac{46}{45}\right) = \frac{2141}{2160},\\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{9}\left(10 + \frac{2141}{2160} - 2 \cdot \frac{46}{45}\right) = \frac{3865}{3888},\\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(10 - \frac{2141}{2160} + \frac{3865}{3888}\right) = \frac{24307}{24300}.
\end{aligned}
$$

8. Preuredite enačbe v sistemu

$$\begin{aligned} -x_1 + 6x_2 &= 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= -1, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \end{aligned}$$

tako da bo Jacobijeva iteracija zagotovo konvergirala.

Rešitev. Iteracija konvergira, če je matrika sistema strogo diagonalno dominantna. Zapišimo matriko sistema z dodanim stolpcem $b = [1, -1, 4]^T$ in jo z menjavo vrstic preoblikujmo v strogo diagonalno dominantno matriko,

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 & | \, 1 \\ 1 & -1 & 4 & |-1 \\ -3 & 1 & 1 & | \, 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & | \, 4 \\ 1 & -1 & 4 & |-1 \\ -1 & 6 & 0 & | \, 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & | \, 4 \\ -1 & 6 & 0 & | \, 1 \\ 1 & -1 & 4 & |-1 \end{bmatrix}.$$

Zadnja matrika je strogo diagonalno dominantna po vrsticah, saj velja

$$\begin{aligned} |-3| &> |1| + |1|, \\ |6| &> |-1| + |0|, \\ |4| &> |1| + |-1|. \end{aligned}$$

Menjava vrstic je potrebna tudi takrat, ko je kakšen diagonalni element enak 0 (takrat D ni obrnljiva).

9. Pokažite, da za sisteme dimenzije 2×2 Jacobijeva iteracija konvergira natanko takrat, ko konvergira Gauss-Seidlova iteracija.

Rešitev. Iteraciji konvergirata, kadar je spektralni radij matrike R_J oz. R_{GS} manjši od 1, tj. takrat, ko so vse lastne vrednosti po absolutni vrednosti manjše od 1. Matriki dobimo iz

$$R_J = -D^{-1}(L + U), \; R_{GS} = -(L + D)^{-1}U.$$

Zapišimo splošno matriko 2×2 sistema,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Torej so matrike, ki nastopajo zgoraj, enake

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Inverz matrike D je enak
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix},$$
zato je
$$R_J = -\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{b}{a} \\ \frac{c}{d} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ -\frac{c}{d} & 0 \end{bmatrix}.$$
Izračunajmo lastne vrednosti te matrike,
$$\det(R_J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{b}{a} \\ -\frac{c}{d} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{bc}{ad} = 0,$$
torej sta lastni vrednosti $\lambda_{1,2}^{(J)} = \pm\sqrt{\frac{bc}{ad}}$. Ponovimo postopek za Gauss-Seidlovo iteracijo,
$$L + D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow (L+D)^{-1} = \frac{1}{ad}\begin{bmatrix} d & 0 \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{ad} & \frac{1}{d} \end{bmatrix},$$
zato je
$$R_{GS} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{ad} & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ 0 & \frac{bc}{ad} \end{bmatrix}.$$
Lastni vrednosti izračunamo iz
$$\det(R_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{b}{a} \\ 0 & \frac{bc}{ad} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\frac{bc}{ad} - \lambda\right) = 0,$$
torej je $\lambda_1^{(GS)} = 0,\ \lambda_2^{(GS)} = \frac{bc}{ad}$.

Opazimo, da velja $\left|\lambda_2^{(GS)}\right| = \left(\lambda_{1,2}^{(J)}\right)^2$, od koder sledi
$$\left|\lambda_2^{(GS)}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\lambda_{1,2}^{(J)}\right| < 1,$$
kar pomeni, da Jacobijeva iteracija konvergira natanko tedaj, ko konvergira Gauss-Seidlova.

10. Recimo, da je Jacobijeva iteracija za reševanje sistema $Ax = b$ konvergentna za vsak začetni približek. Pokažite, da je tedaj konvergentna za vsak začetni približek tudi pri reševanju sistema $A^T y = c$.

    Rešitev. Po izreku Jacobijeva iteracija konvergira natanko tedaj, ko je $\rho(R_J(A)) < 1$, torej je
$$\rho(R_J(A)) < 1 \text{ za } R_J(A) = -D^{-1}(L+U).$$

Poglejmo, kakšna je matrika $R_J(A^T)$ za reševanje sistema $A^Ty = c$ z Jacobijevo metodo. Zapišimo $A = L + D + U$. Sledi

$$\begin{aligned} A^T y &= c \\ (L^T + D^T + U^T)y &= c \\ (\widetilde{U} + \widetilde{D} + \widetilde{L})y &= c, \end{aligned}$$

kjer so $\widetilde{U} = L^T$, $\widetilde{D} = D^T = D$, $\widetilde{L} = U^T$. Torej je iteracijska matrika Jacobijeve metode za sistem $A^Ty = c$ enaka

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_J(A^T) &= -\widetilde{D}^{-1}(\widetilde{L} + \widetilde{U}) \\ &= -D^{-1}(U^T + L^T) \\ &= -D^{-1}(L + U)^T. \end{aligned}$$

Izračunajmo transponiranko te matrike,

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_J^T(A^T) &= -(L + U)(D^{-1})^T \\ &= -(L + U)D^{-1} \\ &= -DD^{-1}(L + U)D^{-1} \\ &= DR_J(A)D^{-1}. \end{aligned}$$

Torej sta si matriki $R_J(A)$ in $\widetilde{R}_J^T(A^T)$ podobni, zato imata enake lastne vrednosti in velja

$$\rho(\widetilde{R}_J(A^T)) = \rho(\widetilde{R}_J^T(A^T)) = \rho(R_J(A)) < 1.$$

Po izreku Jacobijeva iteracija pri reševanju sistema $A^Ty = c$ konvergira za vsak začetni približek.

11. Naj bo matrika A strogo diagonalno dominantna po stolpcih, naj torej za vsak $k = 1, 2, \ldots, n$ velja

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |a_{ik}|.$$

Pokažite, da je tedaj Jacobijeva iteracija za reševanje sistema $Ax = b$ konvergentna za vsak začetni približek.

Rešitev. Vemo že, da Jacobijeva iteracija konvergira za vsak začetni približek, če je matrika strogo diagonalno dominantna po vrsticah. Če je matrika A strogo diagonalno dominantna po stolpcih, je matrika A^T strogo diagonalno dominantna po vrsticah, torej Jacobijeva iteracija konvergira za vsak začetni približek pri reševanju sistema $A^Ty = d$. Potem pa po nalogi 10 sledi, da Jacobijeva iteracija konvergira pri reševanju sistema $(A^T)^Tx = b$, kar je enako kot $Ax = b$.

12. Naj bo A simetrična tridiagonalna matrika oblike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Pokažite, da Gauss-Seidlova iteracija za reševanje sistema $Ax = b$ konvergira za vsak začetni približek.
Namig: Najprej pokažite, da velja

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & & & \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & & & \\ & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\sqrt{\frac{n-1}{n}} & \sqrt{\frac{n+1}{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & & & \\ & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \sqrt{\frac{n}{n-1}} & -\sqrt{\frac{n-1}{n}} \\ & & & & \sqrt{\frac{n+1}{n}} \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Zmnožimo matriki iz namiga,

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \sqrt{2}\sqrt{2} = 2,\\
a_{12} &= \sqrt{2}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -1,\\
a_{21} &= -\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{2} = -1,\\
a_{ii} &= \left(-\sqrt{\frac{i-1}{i}}\right)\left(-\sqrt{\frac{i-1}{i}}\right) + \sqrt{\frac{i+1}{i}}\sqrt{\frac{i+1}{i}} = \frac{i-1}{i} + \frac{i+1}{i} = 2,\\
a_{i,i+1} &= \sqrt{\frac{i+1}{i}}\left(-\sqrt{\frac{i}{i+1}}\right) = -1,\\
a_{i+1,i} &= \left(-\sqrt{\frac{i}{i+1}}\right)\sqrt{\frac{i+1}{i}} = -1,\\
a_{n-1,n} &= \sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(-\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right) = -1,\\
a_{n,n-1} &= -\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{\frac{n}{n-1}} = -1,\\
a_{n,n} &= -\sqrt{\frac{n-1}{n}}\left(-\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right) + \sqrt{\frac{n+1}{n}}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{n-1}{n} + \frac{n+1}{n} = 2.
\end{aligned}
$$

Torej se za matriko A izvede razcep Choleskega in je A simetrična pozitivno definitna. Po izreku sledi, da Gauss-Seidlova iteracija konvergira za vsak začetni približek.

Poglavje 8

Reševanje predoločenih sistemov

Rešujemo sistem

$$Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ m \geq n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,$$

torej je enačb več ali enako, kot je neznank (matrika A ima več ali enako vrstic kot stolpcev).
Običajno tak x, da je $Ax = b$, ne obstaja. Iščemo tak x, da se Ax "najbolj" ujema z b, tj. želimo minimizirati $\|Ax-b\|$. Če izberemo $\|.\|_2$, dobimo rešitev po *metodi najmanjših kvadratov.*

8.1 Normalni sistem

Izrek. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ m \geq n,\ b \in \mathbb{R}^m$, in naj bo A polnega ranga ($\text{rang}(A) = n$). Vektor x, ki minimizira $\|Ax - b\|_2$, je enoličen in je rešitev linearnega sistema

$$A^T Ax = A^T b.$$

Temu sistemu rečemo *normalni sistem.*
V normalnem sistemu je $A^T A$ simetrična pozitivno definitna matrika, zato ga rešujemo preko razcepa Choleskega. Za reševanje sistema torej potrebujemo

$$\underbrace{mn^2}_{\text{izračun } A^T A} + \underbrace{\frac{n^3}{3}}_{\text{razcep Choleskega}}$$

operacij. Glavni del operacij prinese izračun $A^T A$, saj je običajno m veliko večji od n.
Normalni sistem je najcenejši postopek za reševanje predoločenih sistemov, vendar je potencialno nestabilen.

8.1.1 Zgled

Dane so točke $(x_i, y_i),\ i = 1, 2, \ldots, m,\ m \geq 4$. Skozi te točke želimo napeljati kubični polinom $y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$. V splošnem tak polinom ne obstaja. Z rešitvijo predoločenega sistema bomo dobili polinom, ki se najbolje prilega danim podatkom. Iščemo koeficiente $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, da bo

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & x_m^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

V splošnem iščemo funkcijo $y(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x)$, ki se najbolje prilega podatkom. V tem primeru je matrika A enaka

$$A = [g_j(x_i)]_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.1}$$

8.2 QR razcep

Rešujemo predoločen sistem $Ax = b$, kjer je $\mathrm{rang}(A) = n$. Matriko A zapišemo kot $A = QR$, kjer je $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrika z ortonormiranimi stolpci, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pa zgornje trikotna matrika. Če razcep vstavimo v normalni sistem, dobimo

$$\begin{aligned} (QR)^T (QR) x &= (QR)^T b, \\ Rx &= Q^T b. \end{aligned}$$

Reševanje preko QR razcepa je bolj stabilno. Matriki Q in R izračunamo po spodnjem algoritmu, kjer matriki zapišemo po stolpcih

$$A = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n],\ Q = [q_1\ q_2\ \ldots\ q_n].$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija:

$k = 1, 2, \ldots, n$
    $q_k = a_k$
    $i = 1, 2, \ldots, k-1$
        $r_{ik} = q_i^T a_k$
        $q_k = q_k - r_{ik} q_i$
    $r_{kk} = \|q_k\|_2$
    $q_k = \frac{1}{r_{kk}} q_k$

Če četrto vrstico algoritma spremenimo v

4 $\quad r_{ik} = q_i^T q_k,$

je algoritem bolj stabilen in ga imenujemo *modificirana Gram-Schmidtova ortogonalizacija.*

Število operacij, ki jih potrebujemo za izračun QR razcepa na ta način, je

$$2mn^2.$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija za matrike s tremi stolpci:

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_1 & = & a_1 & q_2 & = & a_2 & q_3 & = & a_3 \\
r_{11} & = & \|q_1\|_2 & r_{12} & = & q_1^T a_2 & r_{13} & = & q_1^T a_3 \\
q_1 & = & \frac{1}{r_{11}} q_1 & q_2 & = & q_2 - r_{12} q_1 & r_{23} & = & q_2^T a_3 \\
 & & & r_{22} & = & \|q_2\|_2 & q_3 & = & q_3 - r_{13} q_1 - r_{23} q_2 \\
 & & & q_2 & = & \frac{1}{r_{22}} q_2 & r_{33} & = & \|q_3\|_2 \\
 & & & & & & q_3 & = & \frac{1}{r_{33}} q_3
\end{array}$$

Rezultat sta matriki

$$Q = [q_1 \; q_2 \; q_3], \qquad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}.$$

8.3 Givensove rotacije

V ravnini zavrtimo vektor $x = [x_1, x_2]^T$ za kot ϕ tako, da ga pomnožimo z $R^T = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$, kjer sta $c = \cos\phi,\; s = \sin\phi$.

Rotacijo posplošimo na rotacijo v ravnini (i, k) in jo poimenujemo *Givensova rotacija*

$$R_{ik}^T = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & i & & & k & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & \vdots & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & \cdots & & c & & \cdots & s & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & \cdots & & -s & & \cdots & c & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix} \end{array}.$$

Matrika R_{ik} je ortogonalna in velja

$$\begin{aligned} R_{ik}^T x = y \Rightarrow y_j &= x_j,\ j \neq i, k, \\ y_i &= c x_i + s x_k, \\ y_k &= -s x_i + c x_k. \end{aligned}$$

Konstanti c in s izberemo tako, da bo $y_k = 0$,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_i^2 + x_k^2}, \\ c &= \frac{x_i}{r}, \\ s &= \frac{x_k}{r}, \\ &\Rightarrow y_i = r,\ y_k = 0. \end{aligned}$$

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ m \geq n,\ \operatorname{rang}(A) = n$. Iščemo razširjeni QR razcep matrike A,

$$A = \widetilde{Q}\widetilde{R},$$

kjer je $\widetilde{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ortogonalna matrika ($\widetilde{Q}\widetilde{Q}^T = \widetilde{Q}^T\widetilde{Q} = I$) in $\widetilde{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zgornje trapezna matrika. Matriki zapišemo v bločni obliki

$$\widetilde{Q} = [\underbrace{Q}_{n}\ \underbrace{Q_1}_{m-n}]\}\ m,\ \widetilde{R} = \begin{array}{c} n \\ \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\ n \\ \}\ m-n \end{array}$$

Matrika Q ima ortonormirane stolpce ($Q^T Q = I$), matrika R pa je zgornje trikotna.
Z ustrezno izbiro Givensovih rotacij spravimo matriko v zgornje trapezno obliko in tako dobimo matriko $\widetilde{R}$ razširjenega QR razcepa. Matrika $\widetilde{Q}$ je enaka produktu Givensovih rotacij, ki smo jih uporabili.

8.4 Householderjeva zrcaljenja

Za $w \in \mathbb{R}^n,\ w \neq 0$, definiramo *Householderjevo zrcaljenje* kot

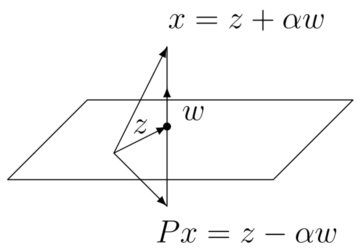
$$P = I - \frac{2}{w^T w}\, w w^T.$$

Matrika P je simetrična in ortogonalna. Velja

$$\begin{aligned} Pw &= -w, \\ Px &= x \text{ za } x \perp w. \end{aligned}$$

Matrika P predstavlja zrcaljenje preko ravnine, ki ima normalo w. Poljuben $x \in \mathbb{R}^n$ lahko zapišemo kot $x = z + \alpha w$, kjer je $z \perp w$ (slika 8.1). Potem je

$$Px = z - \alpha w.$$



Slika 8.1: Geometrijska interpretacija Householderjevega zrcaljenja.

S primerno izbranim zrcaljenjem lahko x prezrcalimo v $\pm\|x\|_2\, e_1$. Izberemo

$$w = \begin{bmatrix} x_1 \pm \|x\|_2 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

kjer predznak izberemo tako, da bo prva komponenta vektorja w po absolutni vrednosti čim večja.
S Householderjevimi zrcaljenji lahko matriko transformiramo v zgornje trapezno obliko:

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{R}.$$

Transformacije P_i so Householderjeva zrcaljenja oblike

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_1 &= I - \frac{2}{w_1^T w_1} w_1 w_1^T,\ w_1 \in \mathbb{R}^4,\ P_1 = \widetilde{P}_1, \\
\widetilde{P}_2 &= I - \frac{2}{w_2^T w_2} w_2 w_2^T,\ w_2 \in \mathbb{R}^3,\ P_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \widetilde{P}_2 \end{bmatrix}, \\
\widetilde{P}_3 &= I - \frac{2}{w_3^T w_3} w_3 w_3^T,\ w_3 \in \mathbb{R}^2,\ P_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \widetilde{P}_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Matriko $\widetilde{Q}$ dobimo kot $\widetilde{Q} = P_1 P_2 P_3$.

8.5 Singularni razcep

Za matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, obstaja *singularni razcep*

$$A = U \Sigma V^T,$$

kjer sta $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalni matriki in $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\Sigma = \left.\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}\right\} m,$$

matrika singularnih vrednosti, urejenih po velikosti $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$. Če je $\operatorname{rang}(A) = r \leq n$, potem je rešitev predoločenega sistema $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov enaka

$$x = \sum_{i=1}^{r} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i.$$

Singularni razcep izračunamo v korakih:

1. izračunamo $A^T A$
2. izračunamo lastne vrednosti $A^T A$, ki so rešitve enačbe $\det(A^T A - \lambda I) = 0$
3. singularne vrednosti so kvadratni koreni iz lastnih vrednosti, uredimo jih po velikosti in zložimo v matriko Σ
4. izračunamo lastne vektorje v_i matrike $A^T A$ iz enačb $(A^T A - \lambda_i I) v_i = 0$ in jih normiramo $\rightarrow$ dobimo matriko V
5. izračunamo $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i \rightarrow$ dobimo matriko U

8.6 Naloge

1. Poiščite premico, ki se najbolje prilega točkam (1,13), (2,10), (3,11), (4,8), (5,6).

Rešitev. Zapišimo problem v obliki predoločenega sistema,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 11 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

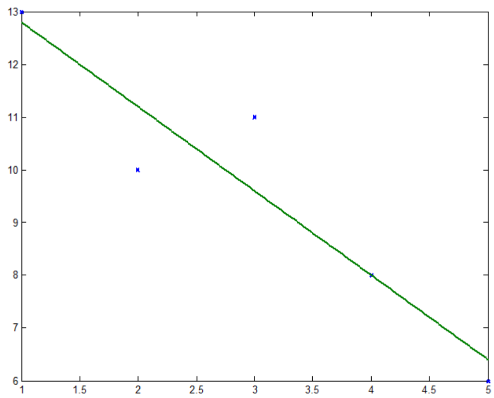
Normalni sistem je

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 128 \end{bmatrix},$$

njegova rešitev pa

$$\alpha = \left[\frac{72}{5}, -\frac{8}{5}\right]^T.$$

Torej je iskana premica $y(x) = \frac{72}{5} - \frac{8}{5}x$. Rezultat je prikazan na sliki 8.2.



Slika 8.2: Dane točke in premica, ki se jim najbolje prilega.

2. Poiščite premico, ki se najbolje prilega točkam (1,-1), (4,11), (-1,-9), (-2,-13).

   Rešitev. Zapišimo problem v obliki predoločenega sistema,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ -9 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Rešimo ga z normalnim sistemom, $A^TA\alpha = A^Tb$,

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 22 \end{bmatrix},$$

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ -9 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 78 \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema je

$$\alpha = [-5, 4]^T,$$

torej je premica, ki jo iščemo, $y(x) = 4x - 5$.

3. Izpeljite eksplicitno formulo za enačbo premice, ki se najbolje prilega danim točkam (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, m$.

   Rešitev. Iščemo premico $y = kx + n$. Problem zapišemo v obliki predoločenega sistema,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

   Izračunamo A^TA in A^Tb, ki nastopata v normalnem sistemu,

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{bmatrix}$$

   in

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{bmatrix}.$$

   Torej rešujemo normalni sistem

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{bmatrix}.$$

Vemo, da je inverz 2×2 matrike enak

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

kar uporabimo v normalnem sistemu. Torej velja

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i + m \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{bmatrix}.$$

Eksplicitni formuli za koeficienta sta

$$\begin{aligned} n &= \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m x_i y_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}, \\ k &= \frac{- \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i + m \sum_{i=1}^m x_i y_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}. \end{aligned}$$

4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $\operatorname{rang}(A) = n$. Pokažite, da ima sistem

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

rešitev, ki ustreza rešitvi predoločenega sistema $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev. Iz danega sistema dobimo matrični enačbi

$$\begin{aligned} r + Ax &= b, \\ A^T r &= 0. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Preuredimo prvo enačbo,

$$\begin{aligned} Ax &= b - r \\ A^T Ax &= A^T(b - r) \\ A^T Ax &= A^T b - A^T r. \end{aligned}$$

Ker velja enačba (8.2), dobimo

$$A^T Ax = A^T b,$$

kar je ravno normalni sistem za reševanje predoločenega sistema $Ax = b$.

5. V spodnji tabeli je zapisano število ribičev, ki so na določen dan lovili ribe, in število ujetih rib v tistem dnevu,

dan	število ribičev	količina ujetih rib
1	18	39
2	14	9
3	9	9
4	10	7
5	5	8
6	22	35
7	14	36
8	12	22

Poiščite linearno funkcijo, ki najbolje opisuje povezavo med številom ribičev, ki lovijo, in številom ujetih rib.

Rešitev. Zapišimo problem v obliki predoločenega sistema. Iščemo funkcijo oblike $y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$, ki se najbolje prilega podatkom $\tilde{x} = [18, 14, 9, 10, 5, 22, 14, 12]^T$, $\tilde{y} = [39, 9, 9, 7, 8, 35, 36, 22]^T$. Sistem, ki ga rešujemo, je torej

$$\begin{bmatrix} 1 & 18 \\ 1 & 14 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \\ 1 & 5 \\ 1 & 22 \\ 1 & 14 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \\ 8 \\ 35 \\ 36 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo normalni sistem $A^T A \alpha = A^T \tilde{y}$,

$$\begin{bmatrix} 8 & 104 \\ 104 & 1550 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 165 \\ 2557 \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema je

$$\alpha_0 = -\frac{5089}{792} \doteq -6.43, \ \alpha_1 = \frac{206}{99} \doteq 2.08.$$

Linearna zveza med številom ribičev in številom ujetih rib je $y(x) = -6.43 + 2.08x$.

6. Dane so točke $\left(-1, \frac{11}{4}\right), \left(0, \frac{7}{4}\right), \left(1, \frac{1}{4}\right), \left(2, \frac{13}{4}\right)$. Poiščite parabolo, ki jih najbolje aproksimira po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev. Iščemo funkcijo oblike $y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$. Matriko A dobimo iz (8.1), kjer za $g_j(x)$ vzamemo $1, x, x^2$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \ b = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Iščemo koeficiente $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, da bo veljalo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}$$

v smislu najmanjših kvadratov. Sistem rešimo z normalnim sistemom $A^T A\alpha = A^T b$,

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} = B,$$

$$A^T b = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} = z.$$

Normalni sistem $B\alpha = z$ rešimo z razcepom Choleskega, $B = V \cdot V^T$,

$$V = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & \sqrt{5} & \\ 3 & \sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem $Vw = z$,

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & \sqrt{5} & \\ 3 & \sqrt{5} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Od tod izračunamo

$$\begin{aligned} w_1 &= 4, \\ w_1 + \sqrt{5} w_2 &= 4 \Rightarrow w_2 = 0, \\ 3w_1 + \sqrt{5} w_2 + 2w_3 &= 16 \Rightarrow w_3 = 2. \end{aligned}$$

Rešimo še sistem $V^T\alpha = w$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 1, \\ \sqrt{5}\alpha_1 + \sqrt{5}\alpha_2 &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = -1, \\ 2\alpha_0 + \alpha_1 + 3\alpha_2 &= 4 \Rightarrow \alpha_0 = 1. \end{aligned}$$

Parabola, ki se najbolje prilega danim točkam, je torej $y(x) = x^2 - x + 1$.

7. Dane so točke (x_i, y_i),

x	1.1	1.4	2.5	2.7	3.2	3.6	4.1	4.3	4.5	4.9
y	2.14	2.60	1.15	1.19	1.88	1.55	2.65	3.80	4.46	6.35

Poiščite kvadratni polinom, ki se jim najbolje prilega po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev. Zapišimo problem v obliki predoločenega sistema,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.1 & 1.1^2 \\ 1 & 1.4 & 1.4^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4.9 & 4.9^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.14 \\ 2.60 \\ \vdots \\ 6.35 \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Octaveom in dobimo rešitev

$$\alpha = [6.367, -4.277, 0.856]^T.$$

Kvadratni polinom, ki ga iščemo, je $y(x) = 6.367 - 4.277\,x + 0.865\,x^2$.

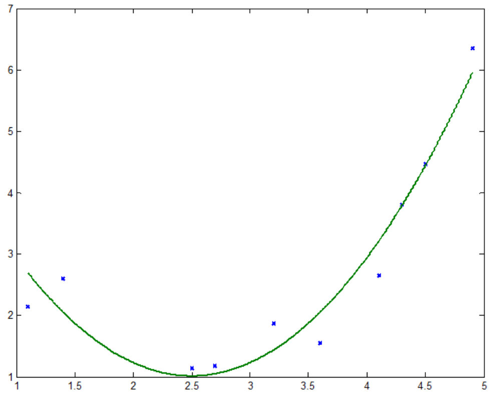
Na sliki 8.3 so narisane dane točke in kvadratna funkcija, ki se jim najbolje prilega.

8. Dane so točke (x_i, y_i),

x	0.21	0.66	0.93	1.25	1.75	2.03	2.24	2.57	2.87	2.98
y	0.25	-0.27	-1.12	-0.45	0.28	0.13	-0.27	0.26	0.58	1.03

Poiščite funkcijo oblike

$$y(x) = ae^x + b\ln x + c\sin x + d\cos x,$$



Slika 8.3: Dane točke in funkcija, ki se jim najbolje prilega.

ki najbolje aproksimira podatke po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev. Zapišimo problem v obliki predoločenega sistema,

$$\begin{bmatrix} e^{0.21} & \ln(0.21) & \sin(0.21) & \cos(0.21) \\ e^{0.66} & \ln(0.66) & \sin(0.66) & \cos(0.66) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{2.98} & \ln(2.98) & \sin(2.98) & \cos(2.98) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.27 \\ \vdots \\ 1.03 \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Octaveom. Uporabimo vgrajeno funkcijo \, ki vrne rešitev

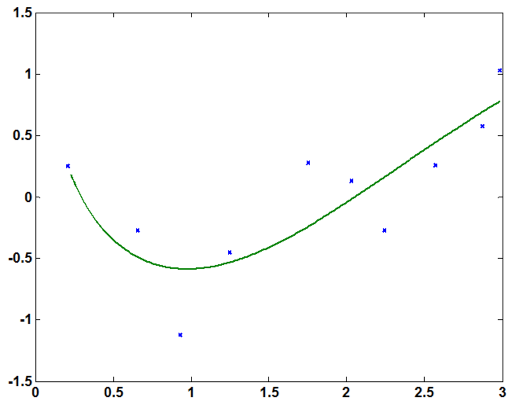
$$\begin{aligned} a &= 0.0353, \\ b &= -0.7580, \\ c &= -0.1938, \\ d &= -0.9556. \end{aligned}$$

Na sliki 8.4 so narisane dane točke in funkcija $y(x)$, ki se jim najbolje prilega.

9. Rešite sistem

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

v smislu najmanjših kvadratov.



Slika 8.4: Dane točke in funkcija, ki se jim najbolje prilega.

Rešitev. Uporabimo normalni sistem,

$$A^T A = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 17 \\ -11 & 28 & -16 \\ 17 & -16 & 22 \end{bmatrix} = B, \ A^T b = \begin{bmatrix} -22 \\ 0 \\ -21 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem in dobimo

$$x_1 = -\frac{18}{7}, \ x_2 = -\frac{151}{210}, \ x_3 = \frac{107}{210}.$$

10. Rešite sistem

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3, \\ 3x + 2y &= 5, \\ x + y &= 2.09, \end{aligned}$$

v smislu najmanjših kvadratov.

Rešitev. Zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2.09 \end{bmatrix}.$$

Opazimo, da rešujemo predoločen sistem, ki ga bomo rešili preko normalnega sistema,

$$\begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.09 \\ 18.09 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem

$$\begin{aligned} 11x + 9y &= 20.09, \\ 9x + 9y &= 18.09, \end{aligned}$$

in dobimo $x = 1,\ y = 1.01$.

11. Rešite sistem

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

v smislu najmanjših kvadratov.

Rešitev. Predoločen sistem rešimo preko normalnega sistema,

$$\begin{bmatrix} 69 & 39 \\ 39 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

Rešitev je $x = \frac{29}{35},\ y = -\frac{92}{105}$.

12. Izračunajte QR razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_1 & = & \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{bmatrix} & q_3 & = & \begin{bmatrix}1\\7\\-4\\2\end{bmatrix}\\
r_{11} & = & 2 & r_{12} & = & 2 & r_{13} & = & 3\\
q_1 & = & \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{bmatrix} & r_{23} & = & 5\\
 & & & r_{22} & = & 4 & q_3 & = & \begin{bmatrix}-3\\3\\-3\\3\end{bmatrix}\\
 & & & q_2 & = & \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix} & r_{33} & = & 6\\
 & & & & & & q_3 & = & \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}
\end{array}$$

Rezultat sta matriki

$$Q = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\0 & 4 & 5\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}.$$

13. Izračunajte QR razcep matrike

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\-1 & 0 & 7\\0 & -1 & -1\end{bmatrix}.$$

Rešitev.

$$\begin{aligned} q_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ r_{11} &= \sqrt{5} \\ q_1 &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ r_{12} &= \frac{2}{\sqrt{5}} \\ q_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -1 \end{bmatrix} \\ r_{22} &= \sqrt{\frac{6}{5}} \\ q_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \sqrt{\frac{2}{15}} \\ -\sqrt{\frac{5}{6}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_3 &= \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} \\ r_{13} &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ r_{23} &= 11\sqrt{\frac{2}{15}} \\ q_3 &= \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{16}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} \\ r_{33} &= 8\sqrt{\frac{2}{3}} \\ q_3 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rezultat sta matriki

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{2}{15}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \sqrt{\frac{6}{5}} & 11\sqrt{\frac{2}{15}} \\ 0 & 0 & 8\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}.$$

14. Z uporabo QR razcepa poiščite rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev. Najprej izračunamo QR razcep,

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \\
r_{11} &= \sqrt{15} \\
q_1 &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
q_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
r_{12} &= -\frac{11}{\sqrt{15}} \\
q_2 &= \begin{bmatrix} \frac{7}{15} \\ -\frac{64}{15} \\ -\frac{6}{5} \\ -\frac{4}{15} \end{bmatrix} \\
r_{22} &= \sqrt{\frac{299}{15}} \\
q_2 &= \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{4485}} \\ -\frac{64}{\sqrt{4485}} \\ -6\sqrt{\frac{3}{1495}} \\ -\frac{4}{\sqrt{4485}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
q_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \\
r_{13} &= \frac{17}{\sqrt{15}} \\
r_{23} &= -\frac{53}{\sqrt{4485}} \\
q_3 &= \begin{bmatrix} -\frac{354}{299} \\ \frac{33}{299} \\ -\frac{243}{299} \\ -\frac{54}{299} \end{bmatrix} \\
r_{33} &= 3\sqrt{\frac{70}{299}} \\
q_3 &= \begin{bmatrix} -59\sqrt{\frac{2}{10465}} \\ \frac{11}{\sqrt{20930}} \\ -\frac{81}{\sqrt{20930}} \\ -9\sqrt{\frac{2}{10465}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Rezultat sta matriki

$$
Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{7}{\sqrt{4485}} & -59\sqrt{\frac{2}{10465}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{64}{\sqrt{4485}} & \frac{11}{\sqrt{20930}} \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & -6\sqrt{\frac{3}{1495}} & -\frac{81}{\sqrt{20930}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{4}{\sqrt{4485}} & -9\sqrt{\frac{2}{10465}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{15} & -\frac{11}{\sqrt{15}} & \frac{17}{\sqrt{15}} \\ 0 & \sqrt{\frac{299}{15}} & -\frac{53}{\sqrt{4485}} \\ 0 & 0 & 3\sqrt{\frac{70}{299}} \end{bmatrix}.
$$

Zdaj rešimo sistem $Rx = Q^T b$,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{15} & -\frac{11}{\sqrt{15}} & \frac{17}{\sqrt{15}} \\ 0 & \sqrt{\frac{299}{15}} & -\frac{53}{\sqrt{4485}} \\ 0 & 0 & 3\sqrt{\frac{70}{299}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{7}{\sqrt{4485}} & -59\sqrt{\frac{2}{10465}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{64}{\sqrt{4485}} & \frac{11}{\sqrt{20930}} \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & -6\sqrt{\frac{3}{1495}} & -\frac{81}{\sqrt{20930}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{4}{\sqrt{4485}} & -9\sqrt{\frac{2}{10465}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{22}{\sqrt{15}} \\ -\frac{242}{\sqrt{4485}} \\ \frac{107}{\sqrt{20930}} \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema je $x = [-\frac{18}{7}, -\frac{151}{210}, \frac{107}{210}]^T$.

15. Izračunajte QR razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

$$\begin{aligned} q_1 &= \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} \\ r_{11} &= 14 \\ q_1 &= \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= \begin{bmatrix} -51 \\ 167 \\ 24 \end{bmatrix} \\ r_{12} &= 21 \\ q_2 &= \begin{bmatrix} -69 \\ 158 \\ 30 \end{bmatrix} \\ r_{22} &= 175 \\ q_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{69}{175} \\ \frac{158}{175} \\ \frac{6}{35} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_3 &= \begin{bmatrix} 4 \\ -68 \\ -41 \end{bmatrix} \\ r_{13} &= -14 \\ r_{23} &= -70 \\ q_3 &= \begin{bmatrix} -\frac{58}{5} \\ \frac{6}{5} \\ -33 \end{bmatrix} \\ r_{33} &= 35 \\ q_3 &= \begin{bmatrix} -\frac{58}{175} \\ \frac{6}{175} \\ -\frac{33}{35} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rezultat sta matriki

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{69}{175} & -\frac{58}{175} \\ \frac{3}{7} & \frac{158}{175} & \frac{6}{175} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{35} & -\frac{33}{35} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}.$$

16. Izračunajte QR razcep matrike

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_1 & = & \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} & q_3 & = & \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \\
r_{11} & = & 3 & r_{12} & = & 4 & r_{13} & = & 2 \\
q_1 & = & \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} & r_{23} & = & -1 \\
 & & & r_{22} & = & 2 & q_3 & = & \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \\
 & & & q_2 & = & \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} & r_{33} & = & 4 \\
 & & & & & & q_3 & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}
\end{array}$$

Rezultat sta matriki

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

17. Rešite sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

s pomočjo QR razcepa.

Rešitev.

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
r_{11} &= \sqrt{2} \\
q_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
q_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
r_{12} &= 0 \\
q_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
r_{22} &= \sqrt{2} \\
q_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
q_3 &= \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
r_{13} &= -2\sqrt{2} \\
r_{23} &= 0 \\
q_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
r_{33} &= 2 \\
q_3 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Rezultat sta matriki

$$
Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
$$

Zdaj rešimo sistem $Rx = Q^T b$,

$$
\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{2} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.
$$

Rešitev je $x = [\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}]^T$.

18. Izračunajte QR razcep matrike

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_1 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & q_3 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
r_{11} & = & 1 & r_{12} & = & 1 & r_{13} & = & 2 \\
q_1 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & r_{23} & = & 1 \\
 & & & r_{22} & = & 1 & q_3 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 & & & q_2 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & r_{33} & = & 3 \\
 & & & & & & q_3 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Rezultat sta matriki

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

19. Izračunajte QR razcep matrike

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

$$
\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_1 &=& \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} & q_2 &=& \begin{bmatrix}-1\\4\\4\\-1\end{bmatrix} & q_3 &=& \begin{bmatrix}4\\-2\\2\\0\end{bmatrix}\\
r_{11} &=& 2 & r_{12} &=& 3 & r_{13} &=& 2\\
q_1 &=& \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} & q_2 &=& \begin{bmatrix}-\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\\-\frac{5}{2}\end{bmatrix} & r_{23} &=& -2\\
 && & r_{22} &=& 5 & q_3 &=& \begin{bmatrix}2\\-2\\2\\-2\end{bmatrix}\\
 && & q_2 &=& \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix} & r_{33} &=& 4\\
 && & && & q_3 &=& \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Rezultat sta matriki

$$
Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.
$$

20. Izračunajte QR razcep matrike

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}
$$

in rešite sistem

$$
Ax = [-3, 1, 5]^T.
$$

Rešitev.

$$
\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_1 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} & q_3 & = & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
r_{11} & = & \sqrt{2} & r_{12} & = & -\sqrt{2} & r_{13} & = & \sqrt{2} \\
q_1 & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} & r_{23} & = & -1 \\
 & & & r_{22} & = & 2 & q_3 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & & & q_2 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & r_{33} & = & \sqrt{2} \\
 & & & & & & q_3 & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Rezultat sta matriki

$$
Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.
$$

Rešimo sistem $Ax = [-3, 1, 5]^T$ preko QR razcepa. Rešujemo

$$
\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ -5 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}.
$$

Rešitev sistema je $x = [-4, -3, -1]^T$.

21. Število izdelkov, ki jih podjetje proda na nekem območju, je odvisno od števila prebivalcev na tem območju in povprečnega dohodka prebivalca območja. V tabeli je zapisana prodaja podjetja na petih območjih, število tamkajšnjih prebivalcev in povprečen dohodek.

območje	prodaja	število preb.	dohodek
1	162	274	2450
2	120	180	3254
3	223	375	3802
4	131	205	2838
5	67	86	2347

Podjetje želi podatke uporabiti za napoved prodaje in predvideva, da je odvisnost oblike

$$\text{prodaja } = \alpha_0 + \alpha_1 \times \text{ število prebivalcev } + \alpha_2 \times \text{ dohodek.}$$

Zapišite problem v obliki predoločenega sistema in določite konstante $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$.

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v običajni obliki

$$\begin{aligned}
162 &= \alpha_0 + 274\ \alpha_1 + 2450\ \alpha_2, \\
120 &= \alpha_0 + 180\ \alpha_1 + 3254\ \alpha_2, \\
223 &= \alpha_0 + 375\ \alpha_1 + 3802\ \alpha_2, \\
131 &= \alpha_0 + 205\ \alpha_1 + 2838\ \alpha_2, \\
67 &= \alpha_0 + 86\ \alpha_1 + 2347\ \alpha_2
\end{aligned}$$

in ga pretvorimo v matrično obliko,

$$\begin{bmatrix} 1 & 274 & 2450 \\ 1 & 180 & 3254 \\ 1 & 375 & 3802 \\ 1 & 205 & 2838 \\ 1 & 86 & 2347 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 162 \\ 120 \\ 223 \\ 131 \\ 67 \end{bmatrix}.$$

Rešimo predoločen sistem preko normalnega sistema $A^TA = A^Tb$,

$$\begin{bmatrix} 5 & 1120 & 14691 \\ 1120 & 297522 & 3466402 \\ 14691 & 3466402 & 44608873 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 703 \\ 182230 \\ 2164253 \end{bmatrix},$$

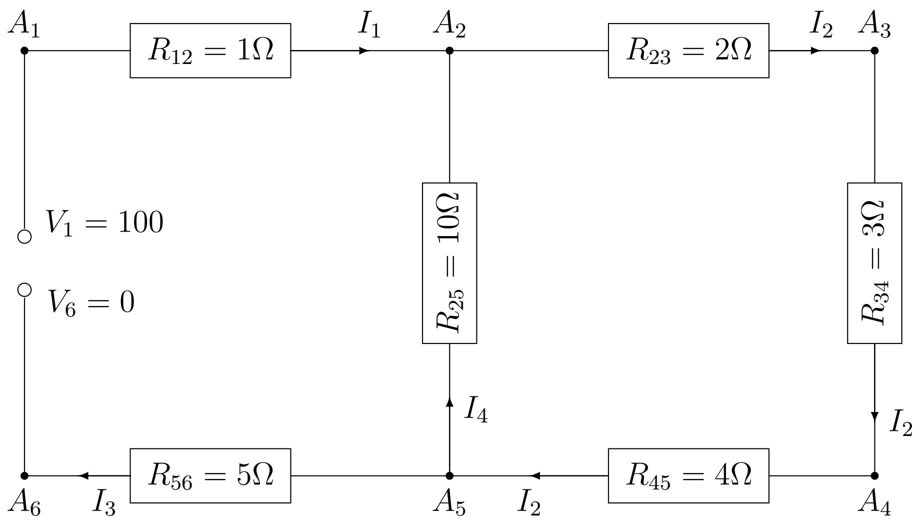
ki ga rešimo z razcepom Choleskega in dobimo rešitev

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 7.0325, \\
\alpha_1 &= 0.5044, \\
\alpha_2 &= 0.0070.
\end{aligned}$$

22. Radi bi izračunali tok v vozliščih A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 in A_6 električnega vezja na sliki 8.5. Zapišite problem v obliki linearnega sistema in izračunajte rešitev.

Rešitev. Kirchoffov zakon o tokovih pravi, da je vsota tokov v vozlišču enaka 0. Če ta zakon uporabimo v vozliščih, dobimo

$$\begin{aligned}
I_1 - I_2 + I_4 &= 0 \text{ v vozlišču } A_2, \\
I_2 - I_3 - I_4 &= 0 \text{ v vozlišču } A_5, \\
I_2 - I_2 &= 0 \text{ v vozlišču } A_3, \\
I_2 - I_2 &= 0 \text{ v vozlišču } A_4.
\end{aligned}$$



Slika 8.5: Shema električnega vezja.

Zdaj pogledamo še padec napetosti v vsaki zanki tokokroga, $A_1A_2A_3A_4$ $A_5A_6A_1$, $A_1A_2A_5A_6A_1$ in $A_2A_3A_4A_5A_2$. Kirchoffov zakon o napetosti pravi, da je skupna sprememba napetosti v vsaki sklenjeni zanki enaka 0. Iz zanke $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_1$ dobimo

$$I_1 + 9I_2 + 5I_3 = 100, \tag{8.3}$$

kjer smo pri koeficientih upoštevali upornosti. Enačbi, ki ju dobimo iz ostalih dveh zank, pa sta

$$\begin{aligned} I_1 - 10I_4 + 5I_3 &= 100, \\ 9I_2 + 10I_4 &= 0. \end{aligned}$$

Opazimo, da se ti dve enačbi seštejeta v enačbo (8.3). Torej imamo štiri enačbe za štiri neznanke:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_4 &= 0, \\ I_2 - I_3 - I_4 &= 0, \\ I_1 - 10I_4 + 5I_3 &= 100, \\ 9I_2 + 10I_4 &= 0. \end{aligned}$$

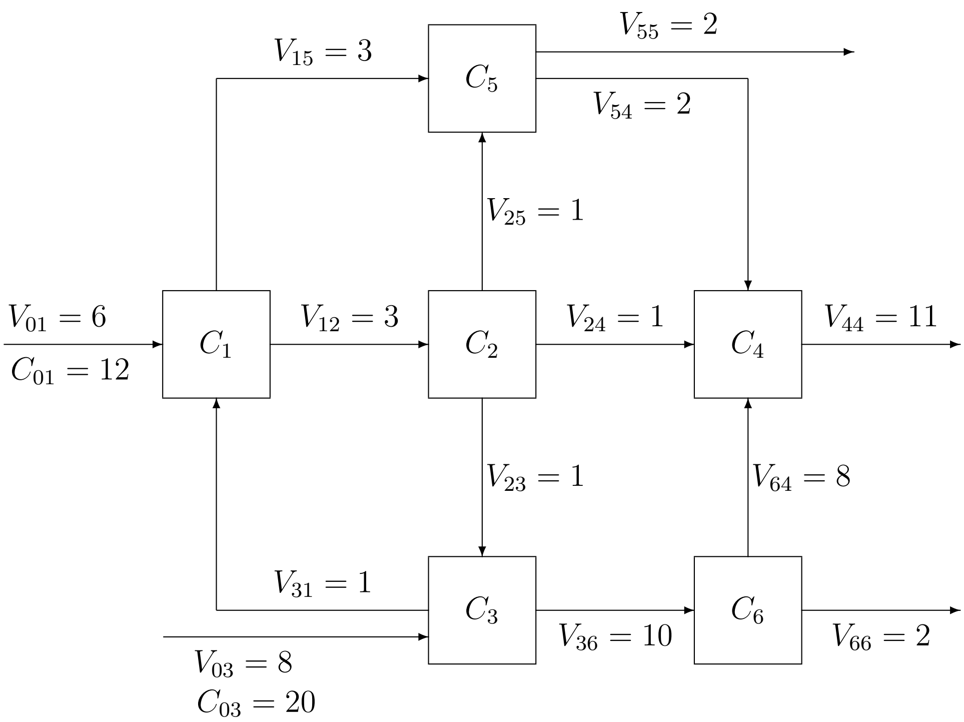
Zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 9 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Octaveom in dobimo rešitev

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 9.31, \\
I_2 &= 4.90, \\
I_3 &= 9.31, \\
I_4 &= -4.41.
\end{aligned}
$$

23. Rešujemo problem za kemično tovarno, v kateri je šest kemičnih reaktorjev z različnimi masnimi tokovi mešanice v in iz reaktorja. Shema tovarne je na sliki 8.6. Tovarno zanima koncentracija mešanice v različnih reaktorjih. Zapišite problem v obliki linearnega sistema in ga rešite.



Slika 8.6: Shema kemične tovarne.

Opomba. Uporabimo oznake

$$\begin{aligned} m_i =& \text{ masni tok komponente skozi reaktor } i \text{ v mg/min,} \\ V_{ij} =& \text{ volumski tok iz reaktorja } i \text{ v reaktor } j\text{, v m}^3\text{/min,} \\ C_i =& \text{ koncentracija v reaktorju } i \text{ v mg/m}^3\text{,} \\ &(i, j = 1, 2, \dots, 6.) \end{aligned}$$

Rešitev. Uporabili bomo zakon o ohranitvi mase in zvezo

$$m_i = V_i \cdot C_i.$$

Oglejmo si prvi reaktor. V reaktor priteče

$$m_{\mathrm{n}} = V_{01}C_{01} + V_{31}C_3 = 72 + C_3,$$

iz njega pa odteče

$$m_{\mathrm{v}} = V_{15}C_1 + V_{12}C_1 = 6C_1,$$

torej velja

$$6C_1 = 72 + C_3.$$

S slike razberemo tudi ostale zveze:

$$\begin{aligned} 6C_1 - C_3 &= 72 \text{ za reaktor 1,} \\ 3C_1 - 3C_2 &= 0 \text{ za reaktor 2,} \\ -C_2 + 11C_3 &= 160 \text{ za reaktor 3,} \\ C_2 - 11C_4 + 2C_5 + 8C_6 &= 0 \text{ za reaktor 4,} \\ 3C_1 + C_2 - 4C_5 &= 0 \text{ za reaktor 5,} \\ 10C_3 - 10C_6 &= 0 \text{ za reaktor 6.} \end{aligned}$$

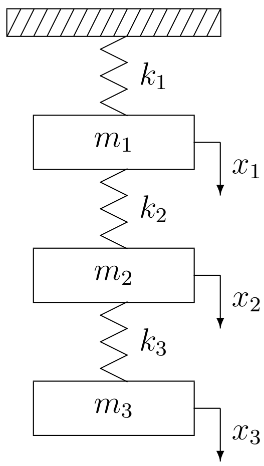
Zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 \\ 0 \\ 160 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev, ki jo dobimo z Octaveom je

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 14.65,\\
C_2 &= 14.65,\\
C_3 &= 15.88,\\
C_4 &= 15.54,\\
C_5 &= 14.65,\\
C_6 &= 15.88.
\end{aligned}
$$

24. Na sliki 8.7 je sistem treh uteži, ki so obešene na vzmeteh. S k_1, k_2 in k_3 smo označili koeficiente vzmeti. Iščemo njihove raztezke v ravnovesni legi, x_1, x_2 in x_3. Zapišite problem v obliki linearnega sistema.



Slika 8.7: Sistem treh uteži.

Rešitev. Uporabili bomo Hookov zakon $F = k \cdot x$ in drugi Newtonov zakon $\sum F = m \cdot a$. Za vsako utež napišemo enačbo drugega Newtonovega zakona:

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= k_2(x_2 - x_1) + m_1 g - k_1 x_1,\\
m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} &= k_3(x_3 - x_2) + m_2 g - k_2(x_2 - x_1),\\
m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} &= m_3 g - k_3(x_3 - x_2).
\end{aligned}
$$

Ker nas zanima ravnovesna lega, so drugi odvodi enaki 0, in se zgornji sistem poenostavi v

$$\begin{aligned} k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) &= m_1g, \\ k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_2 - x_3) &= m_2g, \\ k_3(x_3 - x_2) &= m_3g. \end{aligned}$$

Zapišimo sistem še v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1g \\ m_2g \\ m_3g \end{bmatrix}.$$

25. Problem toplotne prevodnosti je ugotoviti porazdelitev temperature $T(x, y, z, t)$ v snovi, ki je odvisna od robnih pogojev na površini snovi. Ko poznamo temperaturno porazdelitev, lahko enostavno izračunamo toplotni tok v vsaki točki. Toplotna enačba, po kateri se spreminja temperaturna porazdelitev v najenostavnejšem dvodimenzionalnem primeru, je Laplaceova enačba

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Pogosto so realni pogoji taki, da analitične rešitve ne znamo poiskati. V teh primerih uporabimo npr. *metodo končnih diferenc.*

Pri tej metodi zamenjamo odvode z njihovimi aproksimacijami, območje pa razdelimo na manjše kose. Označimo korak v x smeri z Δx, korak v y smeri pa z Δy. Vsako vozlišče ima indeksa i in j, ki označujeta, kje se točka nahaja. Temperaturno porazdelitev snovi predstavimo s temperaturo v vozliščih. Temperatura v vsakem vozlišču (x_i, y_j), ki ga bomo označevali kar z (i, j), je $T_{i,j}$. Shematično je delitev prikazana na sliki 8.8.

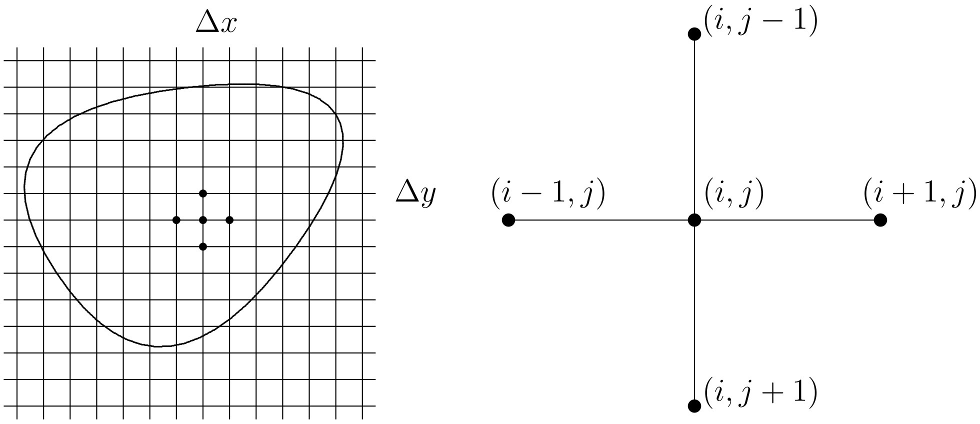
Rezultat, ki ga dobimo iz Laplaceove enačbe za notranja vozlišča, je

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0.$$

Če predpostavimo še, da je $\Delta x = \Delta y$, za notranje vozle dobimo enačbo

$$4T_{i,j} - T_{i-1,j} - T_{i,j-1} - T_{i+1,j} - T_{i,j+1} = 0. \tag{8.4}$$

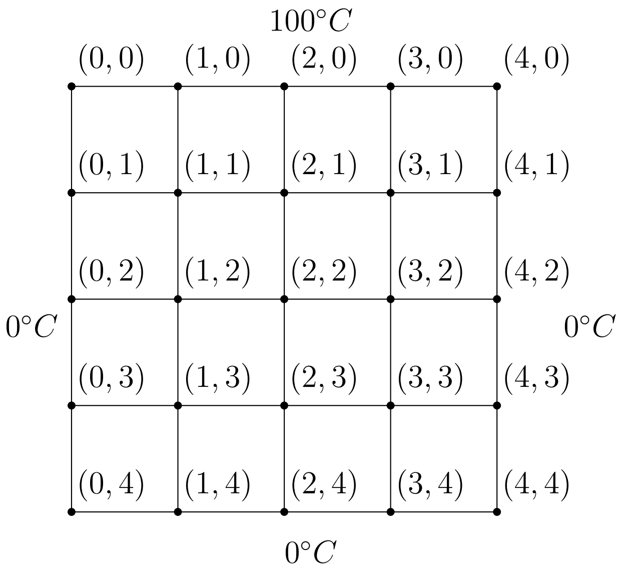
Naloga: Dana je dvodimenzionalna pravokotna plošča ($0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$), ki ima zgornji rob na konstantni temperaturi $100°C$, vse



Slika 8.8: Delitev območja (levo) in pettočkovna shema (desno).

ostale robove pa na konstantni temperaturi $0°C$. Zanima nas temperatura v 9 notranjih točkah (x_i, y_i), kjer je $x_i = i\ \Delta x,\ y_j = j\ \Delta y,\ i, j = 1, 2, 3,\ \Delta x = \Delta y = \frac{1}{4}$. Zapišite problem v obliki linearnega sistema.

Rešitev. Na sliki 8.9 je skica delitve pravokotne plošče z robnimi pogoji.



Slika 8.9: Delitev pravokotnika z dopisanimi robnimi pogoji.

Problem je simetričen, torej je $T_{3,3} = T_{1,3},\ T_{3,2} = T_{1,2},\ T_{3,1} = T_{1,1}$. Ostane nam še šest neznank: $T_{1,1}, T_{1,2}, T_{1,3}, T_{2,1}, T_{2,2}, T_{2,3}$. Iz enačbe (8.4) sledi:

$$\begin{aligned}
4T_{1,1} - 0 - 100 - T_{2,1} - T_{1,2} &= 0,\\
4T_{2,1} - T_{1,1} - 100 - T_{1,1} - T_{2,2} &= 0,\\
4T_{1,2} - 0 - T_{1,1} - T_{2,2} - T_{1,3} &= 0,\\
4T_{2,2} - T_{1,2} - T_{2,1} - T_{1,2} - T_{2,3} &= 0,\\
4T_{1,3} - 0 - T_{1,2} - T_{2,3} - 0 &= 0,\\
4T_{2,3} - T_{1,3} - T_{2,2} - T_{1,3} - 0 &= 0.
\end{aligned}$$

Enačbe uredimo in dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema je

$$\begin{aligned}
T_{1,1} &= 42.86,\\
T_{2,1} &= 52.68,\\
T_{1,2} &= 18.75,\\
T_{2,2} &= 25.00,\\
T_{1,3} &= 7.14,\\
T_{2,3} &= 9.82.
\end{aligned}$$

26. Ogledali si bomo prevajanje toplote po žici v primeru, ko je temperatura ves čas konstantna. Enačba, ki opisuje spreminjanje temperature, je

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f(x).$$

Predpostavimo, da je domena problema $0 \leq x \leq 1$. Razdelimo jo na štiri kose enake dolžine $\Delta x = \frac{1}{4}$. Temperaturo T v točki $x = i\,\Delta x$ bomo označili s T_i. Poznamo temperaturo v krajiščih,

$$T_0 = \alpha,\ T_4 = \beta.$$

To sta robna pogoja problema. Uporabimo podobno shemo kot v prejšnji nalogi in tako dobimo temperaturo v poljubni točki po enačbi

$$T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} = (\Delta x)^2 f(x_i).$$

Problem zapišite v obliki linearnega sistema.

Rešitev. Temperaturo v vozliščih izračunamo iz

$$\begin{aligned}
T_0 &= \alpha \text{ v } x = 0 \text{ (podatek)},\\
T_0 - 2T_1 + T_2 &= (\Delta x)^2 f(\Delta x) \text{ v } x = \Delta x,\\
T_1 - 2T_2 + T_3 &= (\Delta x)^2 f(2\Delta x) \text{ v } x = 2\Delta x,\\
T_2 - 2T_3 + T_4 &= (\Delta x)^2 f(3\Delta x) \text{ v } x = 3\Delta x,\\
T_4 &= \beta \text{ v } x = 1 \text{ (podatek)}.
\end{aligned}$$

Sistem zapišimo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0\\ T_1\\ T_2\\ T_3\\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\\ (\Delta x)^2 f(\Delta x)\\ (\Delta x)^2 f(2\Delta x)\\ (\Delta x)^2 f(3\Delta x)\\ \beta \end{bmatrix}.$$

27. Zdaj poglejmo še prevajanje toplote, ko se temperatura T spreminja s časom t. Toplotna enačba v tem primeru je

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Ravnino (x, t) razdelimo na dele z razmikom Δx v x smeri in Δt v smeri t. Temperaturo v vozliščih $x_i = i\Delta x,\ t_j = j\Delta t$ označimo s T_{ij}. Odvoda $\frac{\partial T}{\partial t}$ in $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ aproksimiramo s končnimi diferencami,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &\approx \frac{1}{\Delta t}\Big(T_{i,j+1} - T_{ij}\Big),\\
\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{(\Delta x)^2}\Big(T_{i+1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i-1,j+1}\Big).
\end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}
&(1 + 2C)T_{i,j+1} - C(T_{i+1,j+1} + T_{i-1,j+1}) = T_{i,j},\\
&\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n,\ C = \alpha\,\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}.
\end{aligned}$$

Poznate temperaturi na robovih,

$$T_{0,t} = T_{W_1},\ T_{n+1,t} = T_{W_2}.$$

Zapišite problem določanja temperature v obliki linearnega sistema.

Rešitev. Ob časovnem koraku $j = k+1$ lahko določimo temperaturo, če poznamo temperaturo ob prejšnjem koraku. Zapišimo enačbe, ki veljajo ob časovnem koraku $j = k$,

$$\begin{aligned}
(1+2C)T_{1,k+1} - CT_{2,k+1} &= CT_{0,k+1} + T_{1,k}, \\
(1+2C)T_{2,k+1} - CT_{3,k+1} - CT_{1,k+1} &= T_{2,k}, \\
&\vdots \\
(1+2C)T_{n-1,k+1} - CT_{n,k+1} - CT_{n-2,k+1} &= T_{n-1,k}, \\
(1+2C)T_{n,k+1} - CT_{n-1,k+1} &= T_{n,k} + CT_{n+1,k+1}.
\end{aligned}$$

Uporabimo še robne pogoje in dobimo

$$\begin{bmatrix} 1+2C & -C & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -C & 1+2C & -C & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & -C & 1+2C & -C \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -C & 1+2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,k+1} \\ T_{2,k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{n-1,k+1} \\ T_{n,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1,k} + CT_{W_1} \\ T_{2,k} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{n-1,k} \\ T_{n,k} + CT_{W_2} \end{bmatrix}.$$

28. V spodnji tabeli je zapisano število prebivalcev ZDA v posameznem letu.

leto	število prebivalcev (v milijonih)
1815	8.3
1825	11
1835	14.7
1845	19.7
1855	26.7
1865	35.2
1875	44.4
1885	55.9
1895	68.9
1905	83.2
1915	98.8
1925	114.2
1935	127.1
1945	140.1
1955	164
1965	190.9
1975	214.3

Poiščite funkcijo oblike

$$f(x) = a\ e^{bx},$$

ki se najbolje prilega podatkom. Kakšno bo število prebivalcev leta 2100, če se demografski trend ne spremeni?

Rešitev. Funkcija ni linearna, zato bomo rešitev poiskali z Newtonovo metodo. Da jo lahko uporabimo, potrebujemo dober začetni približek, ki ga bomo dobili z linearizacijo. Obe strani enačbe logaritmiramo in dobimo

$$\begin{aligned} y &= a\ e^{bx} \\ \ln y &= \ln a + \ln e^{bx} \\ \ln y &= \ln a + bx. \end{aligned}$$

Zdaj rešujemo linearen problem

$$\tilde{y} = A + Bx,$$

kjer je $\tilde{y} = \ln y,\ A = \ln a,\ B = b$. Naj bo m število podatkov. Iz naloge 3 vidimo, da moramo rešiti sistem

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \tilde{y}_i \\ \sum_{i=1}^m x_i \tilde{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \ln y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i \ln y_i \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Octaveom in dobimo

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.21017 \\ 0.20107 \end{bmatrix},$$

torej je primeren začetni približek za Newtonovo metodo

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.11725 \\ 0.20107 \end{bmatrix}.$$

Funkcijo F in odvod JF smo izpeljali v nalogi 5. Vstavimo ju v Newtonovo metodo (program `newton` [1]) in dobimo rešitev

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.9507 \\ 0.155328 \end{bmatrix}.$$

Funkcija, ki se najbolje prilega podatkom je torej

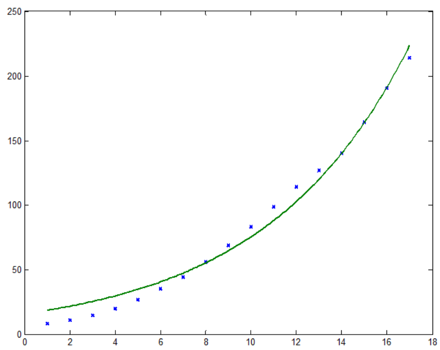
$$f(x) = 15.9507\, e^{0.155328\, x}.$$

Vstavimo $t = 2100$, torej je pričakovano število prebivalcev enako

$$f(2100) = 1558.8.$$

Na sliki 8.10 so narisani podatki in funkcija, ki se jim najbolje prilega po metodi najmanjših kvadratov.

Opomba: Pri reševanju je treba paziti, da ne pride do prekoračitve obsega.



Slika 8.10: Dane točke in funkcija, ki se jim najbolje prilega.

29. Biologi so opazovali razmnoževanje bakterij in dobili naslednje rezultate:

čas t (min)	število bakterij N
10	149000
20	215000
30	335000
40	477000
50	769000

Predvidevajo, da je rast števila bakterij eksponentna. Poiščite konstanti N_0 in β, da se bo krivulja oblike

$$N = N_0 \, e^{\beta t}$$

najbolje prilegala podatkom.

Rešitev. Funkcija ni linearna, zato bomo rešitev poiskali z Newtonovo metodo. Da jo lahko uporabimo, potrebujemo dober začetni približek, ki ga bomo dobili z linearizacijo. Obe strani enačbe logaritmiramo in dobimo

$$\begin{aligned} N &= N_0 \, e^{\beta t} \\ \ln N &= \ln N_0 + \ln e^{\beta t} \\ \ln N &= \ln N_0 + \beta t. \end{aligned}$$

Zdaj rešujemo linearen problem

$$\widetilde{N} = n_0 + \beta t,$$

kjer je $\widetilde{N} = \ln N, \ N_0 = e^{n_0}$. Naj bo m število podatkov. Iz naloge 3 vemo, da moramo rešiti sistem

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \widetilde{N}_i \\ \sum_{i=1}^m t_i \widetilde{N}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \ln N_i \\ \sum_{i=1}^m t_i \ln N_i \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Octaveom in dobimo

$$\begin{bmatrix} n_0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.4843 \\ 0.04079 \end{bmatrix},$$

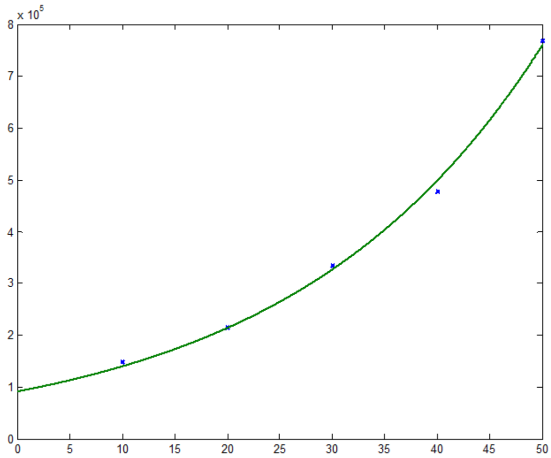
torej je primeren začetni približek za Newtonovo metodo

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{n_0} \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97175 \\ 0.04079 \end{bmatrix}.$$

Funkcijo F in odvod JF smo izpeljali v nalogi 5. Vstavimo ju v Newtonovo metodo in dobimo rešitev

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 92074 \\ 0.04222 \end{bmatrix}.$$

Na sliki 8.11 so prikazani podatki in dobljena funkcija.



Slika 8.11: Dane točke in funkcija, ki se jim najbolje prilega.

30. V Kumrovcu so posadili 12 češnjevih dreves. Vsa so bila stara eno leto in visoka 1.83m. V tabeli je zapisana njihova rast.

starost drevesa (v letih)	povprečna višina (v metrih)
1	1.83
2	2.90
3	3.96
4	4.57
5	5.03
6	5.33
7	5.64
8	5.79
9	5.94
10	6.00
11	6.04

(a) Poiščite konstanti a in b, da bo funkcija

$$y = a + b \ln x$$

najbolje aproksimirala podatke. Narišite tudi graf, na katerem so dane točke in dobljena funkcija.

(b) Kakšna je bila povprečna višina dreves, ko so bila stara leto in pol?

(c) Kakšna bo povprečna višina dreves, ko bodo stara 20 let?

Rešitev.

(a) Rešujemo predoločen sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & \ln 1 \\ 1 & \ln 2 \\ 1 & \ln 3 \\ 1 & \ln 4 \\ 1 & \ln 5 \\ 1 & \ln 6 \\ 1 & \ln 7 \\ 1 & \ln 8 \\ 1 & \ln 9 \\ 1 & \ln 10 \\ 1 & \ln 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.83 \\ 2.90 \\ 3.96 \\ 4.57 \\ 5.03 \\ 5.33 \\ 5.64 \\ 5.79 \\ 5.94 \\ 6.00 \\ 6.04 \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Octaveom in dobimo

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8605 \\ 1.8606 \end{bmatrix}.$$

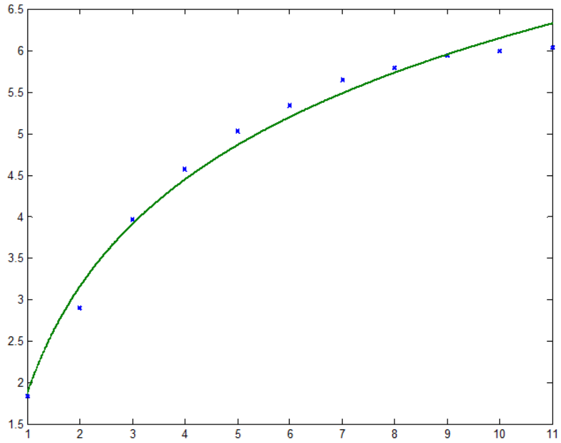
Funkcija oblike $y = a + b \ln x$, ki najbolje aproksimira dane podatke, je

$$y(x) = 1.8605 + 1.8606 \ \ln x.$$

Njen graf skupaj s podatki je narisan na sliki 8.12.

(b) V funkcijo iz prejšnje točke vstavimo $x = 1.5$. Povprečna leto in pol stara češnja je visoka 2.61m.

(c) V funkcijo vstavimo $x = 20$ in dobimo 7.43m. Torej bodo po dvajsetih letih češnje povprečno visoke 7.43m.



Slika 8.12: Dane točke in funkcija, ki se jim najbolje prilega.

31. Poiščite Givensovo rotacijo, ki vektor $x = [1, \frac{1}{2}]^T$ zavrti v vektor oblike $y = [\alpha, 0]^T$ in izračunajte konstanto α.

    Rešitev. Givensova rotacija je oblike

$$G = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix},$$

    kjer velja

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ c &= \frac{1}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ s &= \frac{\frac{1}{2}}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

    Preverimo rezultat:

$$Gx = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

    torej je $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

32. Z uporabo Givensovih rotacij zavrtite vektor $x = [1, -1, 2]^T$ v vektor oblike $y = [\alpha, 0, 0]^T$.

Rešitev. Najprej uničimo srednjo komponento vektorja x s pomočjo prve. Izračunamo

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \\ c &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ s &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

torej je Givensova rotacija

$$G_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

zavrteni vektor x pa je $\tilde{x} = G_1 x = [\sqrt{2}, 0, 2]^T$. Uničimo še zadnjo komponento vektorja $\tilde{x}$ s pomočjo prve. Najprej izračunamo

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6}, \\ c &= \sqrt{\frac{2}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ s &= \frac{2}{\sqrt{6}}, \end{aligned}$$

torej je Givensova rotacija

$$G_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Zarotiramo še vektor $\tilde{x}$ in dobimo $y = G_2 \tilde{x} = [\sqrt{6}, 0, 0]^T$.

33. Dana je matrika

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Z uporabo Givensovih rotacij jo preoblikujte v zgornje trikotno obliko in zapišite njen QR razcep.

Rešitev. Želimo “uničiti” neničelna elementa na mestih (2,1) in (3,2). Najprej izberimo element na mestu (2,1) in konstruirajmo Givensovo rotacijo, ki bo oblike

$$G_1 = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo c in s,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} = 7.810, \\ c &= \frac{6}{r} = 0.768, \\ s &= \frac{5}{r} = 0.640. \end{aligned}$$

Nova matrika je

$$R_1 = G_1 A = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.8102 & 4.4813 & 2.5607 \\ 0 & -2.4327 & 3.0729 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zdaj želimo"uničiti" element na mestu (3,2) v matriki R_1, torej bo Givensova rotacija oblike

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix},$$

kjer je

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-2.4327)^2 + 4^2} = 4.6817, \\ c &= \frac{-2.4327}{r} = -0.5196, \\ s &= \frac{4}{r} = 0.8544. \end{aligned}$$

Uporabimo jo na matriki in dobimo

$$\begin{aligned} R = G_2 R_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.8102 & 4.4813 & 2.5607 \\ 0 & -2.4327 & 3.0729 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7.8102 & 4.4813 & 2.5607 \\ 0 & 4.6817 & 0.9664 \\ 0 & 0 & -4.1843 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matrika Q je enaka

$$Q = G_1^T G_2^T = \begin{bmatrix} 0.7682 & 0.3327 & 0.5470 \\ 0.6402 & -0.3992 & -0.6564 \\ 0 & 0.8544 & -0.5196 \end{bmatrix}.$$

34. Dana sta vektorja $x = [1, -1, 2]^T$ in $y = [-1, 2, 1]^T$. Poiščite Householderjevo zrcaljenje, ki preslika x v y.

Rešitev. Če vektorja nista enako dolga, naloga nima rešitve, zato najprej izračunajmo njuni dolžini,

$$\begin{aligned}\|x\|_2 &= \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6},\\ \|y\|_2 &= \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}.\end{aligned}$$

Torej naloga ima rešitev. Iščemo tako Householderjevo zrcaljenje

$$P = I - \frac{2}{w^T w}\, w w^T,$$

da bo $Px = y$. Torej

$$\left(I - \frac{2}{w^T w}\, w w^T\right) x = y.$$

Predpostavimo, da je $\|w\|_2 = 1$, in dobimo

$$\begin{aligned} x - 2ww^T x &= y,\\ -2w(w^T x) &= y - x,\ \alpha := w^T x,\\ -2\alpha w &= y - x,\\ 2\alpha w &= x - y.\end{aligned}$$

Zanima nas le smer vektorja w, veljati pa mora še $\|w\|_2 = 1$, zato vzamemo

$$w = \frac{x - y}{\|x - y\|_2}.$$

Zdaj vstavimo dana vektorja,

$$\begin{aligned} w = \frac{[1, -1, 2]^T - [-1, 2, 1]^T}{\|[2, -3, 1]^T\|_2} &= \frac{1}{\sqrt{4+9+1}}\,[2, -3, 1]^T\\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}\,[2, -3, 1]^T.\end{aligned}$$

Iskano Householderjevo zrcaljenje je torej

$$\begin{aligned} P = I - 2ww^T &= \begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix} - 2\,\frac{1}{14}\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}[2, -3, 1]\\ &= \frac{1}{7}\begin{bmatrix}7 & & \\ & 7 & \\ & & 7\end{bmatrix} - \frac{1}{7}\begin{bmatrix}4 & -6 & 2\\ -6 & 9 & -3\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}3 & 6 & -2\\ 6 & -2 & 3\\ -2 & 3 & 6\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

35. S pomočjo Householderjevih zrcaljenj in QR razcepa rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} x + 6y - 2z &= -7, \\ 2x + y - 2z &= -1, \\ 2x + 2y + 6z &= 6. \end{aligned}$$

Nasvet: Zrcaljenja delajte na razširjeni matriki $[A\ b]$.

Rešitev. Razširjena matrika je enaka

$$[A\ b] = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & | & -7 \\ 2 & 1 & -2 & | & -1 \\ 2 & 2 & 6 & | & 6 \end{bmatrix}.$$

Prvo Householderjevo zrcaljenje dobimo iz prvega stolpca matrike $\widetilde{w}_1 = [\widetilde{w}_{11}, \widetilde{w}_{12}, \widetilde{w}_{13}]^T = [1, 2, 2]^T$, torej

$$\begin{aligned} \|\widetilde{w}_1\|_2 &= \sqrt{1+4+4} = 3, \\ w_1 &= \begin{bmatrix} \widetilde{w}_{11} \pm \|\widetilde{w}_1\|_2 \\ \widetilde{w}_{12} \\ \widetilde{w}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ P_1 &= I - \frac{2}{w_1^T w_1}\, w_1 w_1^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{16+4+4} \begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uporabimo zrcaljenje na matriki $[A\ b]$,

$$\begin{aligned} P_1[A\ b] &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & | & -7 \\ 2 & 1 & -2 & | & -1 \\ 2 & 2 & 6 & | & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 & | & -1 \\ 0 & -4 & -2 & | & 2 \\ 0 & -3 & 6 & | & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zdaj sestavimo naslednje Householderjevo zrcaljenje iz drugega stolpca nove matrike, $\widetilde{w}_2 = [\widetilde{w}_{21}, \widetilde{w}_{22}]^T = [-4, -3]^T$,

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{w}_2\|_2 &= \sqrt{16+9} = 5, \\
w_2 &= \begin{bmatrix} \widetilde{w}_{21} \pm \|\widetilde{w}_2\|_2 \\ \widetilde{w}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -3 \end{bmatrix}, \\
\widetilde{P}_2 &= I - \frac{2}{w_2^T w_2}\, w_2 w_2^T = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{81+9} \begin{bmatrix} 81 & 27 \\ 27 & 9 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Torej je drugo Householderjevo zrcaljenje

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \widetilde{P}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & & \\ & -4 & -3 \\ & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo ga na spremenjeni matriki,

$$\begin{aligned}
P_2 \cdot P_1 [A\ b] &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & & \\ & -4 & -3 \\ & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 & | & -1 \\ 0 & -4 & -2 & | & 2 \\ 0 & -3 & 6 & | & 9 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 & | & -1 \\ 0 & 5 & -2 & | & -7 \\ 0 & 0 & 6 & | & 6 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

torej je

$$R = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},\ Q^T b = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Za rešitev sistema matrike $Q = P_1 P_2$ ne potrebujemo, saj sistem rešujemo z $Rx = Q^T b$, torej

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Rešitev je

$$\begin{aligned}
z &= 1, \\
5y - 2z &= -7 \Rightarrow y = -1, \\
-3x - 4y - 2z &= -1 \Rightarrow x = 1.
\end{aligned}$$

36. Izračunajte singularni razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Izračunajmo $A^T A$,

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

in njene lastne vrednosti

$$\begin{aligned} \det(A^T A - \lambda I) &= 0, \\ \begin{vmatrix} 10-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 10-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= 0, \\ (10-\lambda)\left((10-\lambda)(2-\lambda) - 16\right) + 2(0 - 2(10-\lambda)) &= 0, \\ (10-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda) &= 0, \\ (10-\lambda)\lambda(\lambda - 12) &= 0, \\ \lambda_1 = 12,\ \lambda_2 = 10,\ \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Pazimo, da so lastne vrednosti urejene po velikosti ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$). Torej je matrika Σ enaka

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor v_1, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_1 = 12$, zadošča enačbi

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix} v_1 = 0,$$

izberemo $v_1 = [1, 2, 1]^T$ in ga normiramo

$$v_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^T.$$

Lastni vektor v_2, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_2 = 10$, izračunamo iz

$$\begin{aligned} (A^T A - \lambda_2 I) v_2 &= 0, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{bmatrix} v_2 &= 0. \end{aligned}$$

Izberemo $v_2 = [2, -1, 0]^T$ in ga normiramo

$$v_2 = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right]^T.$$

Lastni vektor v_3, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_3 = 0$, zadošča enačbi

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} v_3 = 0,$$

izberemo $v_3 = [1, 2, -5]^T$ in ga normiramo

$$v_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}\right]^T.$$

Lastne vektorje zložimo v matriko V,

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo stolpce matrike U iz

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{6}} \\ \frac{6}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{5}} \\ -\frac{5}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Torej je matrika U enaka

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Singularni razcep matrike A je

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}^T.$$

37. Izračunajte singularni razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Izračunajmo $A^T A$,

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -15 \\ -15 & 25 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti so rešitve enačbe

$$\begin{aligned} \det(A^T A - \lambda I) &= 0, \\ \begin{vmatrix} 25-\lambda & -15 \\ -15 & 25-\lambda \end{vmatrix} &= 0, \\ (25-\lambda)^2 - 15^2 &= 0, \\ \lambda^2 - 50\lambda + 400 &= 0, \\ \lambda_1 = 40, \lambda_2 &= 10. \end{aligned}$$

Torej je matrika Σ enaka

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo lastne vektorje matrike $A^T A$, iz

$$\begin{aligned}
(A^T A - \lambda_1 I)v_1 &= 0,\\
\begin{bmatrix} -15 & -15 \\ -15 & -15 \end{bmatrix} v_1 &= 0,\\
v_1 &= [1, -1]^T, \text{ normiramo,}\\
v_1 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T \text{ in}\\
(A^T A - \lambda_2 I)v_2 &= 0,\\
\begin{bmatrix} 15 & -15 \\ -15 & 15 \end{bmatrix} v_2 &= 0,\\
v_2 &= [1, 1]^T, \text{ normiramo,}\\
v_2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T.
\end{aligned}$$

Lastna vektorja zložimo v matriko V, torej

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Zdaj izračunamo stolpce matrike U iz

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{8}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},\\
u_2 &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Matrika U je torej

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Singularni razcep matrike A je enak

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T .$$

Poglavje 9

Numerično računanje lastnih vrednosti

Poglavje 10

Interpolacija

Dane so točke $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ in vrednosti funkcije f v teh točkah $y_0, y_1, \ldots, y_n$, torej $y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$. Iščemo polinom p stopnje $\leq n$, za katerega velja $p(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$.
Tak polinom zapišemo v *Lagrangeovi obliki* kot

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x), \text{ kjer so} \\
\ell_i(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \text{ Lagrangeovi bazni polinomi.}
\end{aligned}
$$

V *Newtonovi obliki* polinom p zapišemo z uporabo *deljenih diferenc:* $k-$ta deljena diferenca $[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]f$ je vodilni koeficient polinoma stopnje $\leq k$, ki se z dano funkcijo f ujema v različnih točkah $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$. Za deljene diference velja rekurzivna formula

$$
[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]f = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}, \text{ za } x_i = x_{i+1} = \cdots = x_{i+k}, \\ \frac{[x_i, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_{i+k}]f - [x_i, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_{i+k}]f}{x_s - x_r},\ x_r \neq x_s. \end{cases}
$$

Torej v posebnem velja

$$
\begin{aligned}
[x_i]f &= f(x_i), \\
[x_1, x_2]f &= \frac{[x_1]f - [x_2]f}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \\
[x_1, x_1]f &= f'(x_1), \\
[x_1, x_1, x_1]f &= \frac{f''(x_1)}{2}, \\
[x_1, x_2, \ldots, x_n]f &= \frac{[x_1, \ldots, x_{n-1}]f - [x_2, \ldots, x_n]f}{x_1 - x_n}.
\end{aligned}
$$

Interpolacijski polinom v *Newtonovi obliki* je

$$\begin{aligned}p(x) = f(x_0) + [x_0, x_1]f \cdot (x - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \cdots +\\ + [x_0, x_1, \ldots, x_n]f \cdot (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}),\end{aligned}$$

napaka interpolacije pa je

$$\begin{aligned}f(x) - p(x) &= [x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f \cdot (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)\\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n),\ \xi \in [x_0, x_n].\end{aligned}$$

Deljene diference zapišemo v shemo oblike

x_i	$[.]f$	$[.,.]f$	$[.,.,.]f$	$[.,.,.,.]f$
x_0	y_0			
		$[x_0, x_1]f$		
x_1	y_1		$[x_0, x_1, x_2]f$	
		$[x_1, x_2]f$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]f$
x_2	y_2		$[x_1, x_2, x_3]f$	
		$[x_2, x_3]f$		
x_3	y_3			

10.1 Naloge

1. Interpolirajte točke (1,1), (2,5), (3,3), (4,8) s kubičnim polinomom.

   Rešitev. Zapišimo tabelo deljenih diferenc:

x_i	$[.]f$	$[.,.]f$	$[.,.,.]f$	$[.,.,.,.]f$
1	1			
		$\frac{5-1}{2-1} = 4$		
2	5		$\frac{-2-4}{3-1} = -3$	
		$\frac{3-5}{3-2} = -2$		$\frac{\frac{7}{2}-(-3)}{4-1} = \frac{13}{6}$
3	3		$\frac{5-(-2)}{4-2} = \frac{7}{2}$	
		$\frac{8-3}{4-3} = 5$		
4	8			

   Torej je iskani interpolacijski polinom enak

   $$p(x) = 1 + 4(x - 1) - 3(x - 1)(x - 2) + \frac{13}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

2. Interpolirajte točke (0,1), (-1,3), (-2,2), (-3,4) s kubičnim polinomom.

   Rešitev. Zapišimo tabelo deljenih diferenc:

x_i	$[.]f$	$[.,.]f$	$[.,.,.]f$	$[.,.,.,.]f$
0	1			
		$\frac{3-1}{-1-0} = -2$		
-1	3		$\frac{1-(-2)}{-2-0} = -\frac{3}{2}$	
		$\frac{2-3}{-2-(-1)} = 1$		$\frac{\frac{3}{2}-(-\frac{3}{2})}{-3-0} = -1$
-2	2		$\frac{-2-1}{-3-(-1)} = \frac{3}{2}$	
		$\frac{4-2}{-3-(-2)} = -2$		
-3	4			

Torej je iskani interpolacijski polinom enak

$$p(x) = 1 - 2x - \frac{3}{2}x(x+1) - x(x+1)(x+2).$$

3. Poiščite interpolacijski polinom, za katerega velja

$$p(0) = -2,\ p(1) = 2,\ p(3) = 4,\ p(4) = -10.$$

Rešitev. Zapišimo tabelo deljenih diferenc:

x_i	$[.]f$	$[.,.]f$	$[.,.,.]f$	$[.,.,.,.]f$
0	-2			
		$\frac{2-(-2)}{1-0} = 4$		
1	2		$\frac{1-4}{3-0} = -1$	
		$\frac{4-2}{3-1} = 1$		$\frac{-5-(-1)}{4-0} = -1$
3	4		$\frac{-14-1}{4-1} = -5$	
		$\frac{-10-4}{4-3} = -14$		
4	-10			

Torej je iskani interpolacijski polinom enak

$$\begin{aligned} p(x) &= -2 + 4(x-0) - 1(x-0)(x-1) - 1(x-0)(x-1)(x-3) \\ &= -2 + 4x - x(x-1) - x(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

4. Interpolirajte funkcijo $f(x) = \ln x$ na [1,2] s kubičnim polinomom, ki se z f ujema dvojno v obeh krajiščih.

Rešitev. Zapišimo tabelo deljenih diferenc:

x_i	$[.]f$	$[.,.]f$	$[.,.,.]f$	$[.,.,.,.]f$
1	0			
		1		
1	0		-0.306853	
		0.693147		0.113706
2	0.693147		-0.193147	
		0.5		
2	0.693147			

Torej je iskani interpolacijski polinom enak

$$p(x) = 0 + 1(x-1) - 0.306853(x-1)^2 + 0.113706(x-1)^2(x-2).$$

5. Dana je funkcija $f(x) = \frac{4}{1+x}$. Preko deljenih diferenc poiščite interpolacijski polinom p stopnje ≤ 5, za katerega velja

$$\begin{aligned} &p(0) = f(0),\ p'(0) = f'(0),\ p''(0) = f''(0), \\ &p(1) = f(1),\ p'(1) = f'(1),\ p''(1) = f''(1). \end{aligned}$$

Ocenite tudi napako $\max|f(x) - p(x)|$ za $x \in [0,1]$.

Rešitev. Najprej izračunajmo vrednosti funkcije f in njenih odvodov v danih točkah,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4(1+x)^{-2}, \\ f''(x) &= 8(1+x)^{-3}, \\ f(0) = 4,\ &f'(0) = -4,\ f''(0) = 8, \\ f(1) = 2,\ &f'(1) = -1,\ f''(1) = 1. \end{aligned}$$

Zapišimo tabelo deljenih diferenc,

x_i	$[.]f$	$[..]f$	$[...]f$	$[....]f$	$[.....]f$
0	4				
		-4			
0	4		$\frac{8}{2} = 4$		
		-4		$\frac{2-4}{1-0} = -2$	
0	4		$\frac{-2-(-4)}{1-0} = 2$		$\frac{-1-(-2)}{1-0} = 1$
		$\frac{2-4}{1-0} = -2$		$\frac{1-2}{1-0} = -1$	
1	2		$\frac{-1-(-2)}{1-0} = 1$		$\frac{-\frac{1}{2}-(-1)}{1-0} = \frac{1}{2}$
		-1		$\frac{\frac{1}{2}-1}{1-0} = -\frac{1}{2}$	
1	2		$\frac{1}{2}$		
		-1			
1	2				

$$[\ldots\ldots]f = \frac{\frac{1}{2}-1}{1-0} = -\frac{1}{2}$$

V zapisu polinoma nastopajo koeficienti, ki so zapisani na zgornji diagonali tabele, torej je interpolacijski polinom v Newtonovi obliki enak

$$\begin{aligned} p(x) &= 4 - 4(x-0) + 4x^2 - 2x^3 + 1x^3(x-1) - \frac{1}{2}x^3(x-1)^2 \\ &= 4 - 4x + 4x^2 - 2x^3 + x^3(x-1) - \frac{1}{2}x^3(x-1)^2. \end{aligned}$$

Ocenimo še napako. Velja

$$f(x) - p(x) = [0,0,0,1,1,1,x]f \cdot x^3(x-1)^3 = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\, x^3(x-1)^3,$$

kjer je $\xi \in [0,1]$. Maksimum funkcije $x^3(x-1)^3$ je na $[0,1]$ dosežen pri

$$\begin{aligned} 3x^2(x-1)^3 + 3x^3(x-1)^2 &= 0, \\ 3x^2(x-1)^2(2x-1) &= 0, \\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

torej pri $x = \frac{1}{2}$. Zato velja

$$|x^3(x-1)^3| \leq \left| \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2} - 1\right)^3 \right| = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64} \text{ za } x \in [0,1].$$

Izračunajmo še odvod,

$$\begin{aligned} f''(x) &= 8(1+x)^{-3}, \\ f'''(x) &= -24(1+x)^{-4}, \\ f^{(4)}(x) &= 96(1+x)^{-5}, \\ f^{(5)}(x) &= -480(1+x)^{-6}, \\ f^{(6)}(x) &= 2880(1+x)^{-7}. \end{aligned}$$

Funkcija $f^{(6)}(x)$ doseže maksimum na intervalu [0,1] pri $x = 0$. Tam ima vrednost 2880. Zdaj ocenimo

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{2880}{720} \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{16}.$$

Poglavje 11

Bézierove krivulje

Bézierova krivulja stopnje n je določena z $n+1$ kontrolnimi točkami, ki jih označimo s $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Definirana je kot

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_i^n(t), \ 0 \leq t \leq 1,$$

kjer so

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Bernsteinovi polinomi.
Zlepek dveh Bézierovih krivulj, danih s kontrolnimi točkami $P_0, P_1, \ldots, P_n$ in $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$, je zvezen, če velja $Q_0 = P_n$. Zlepek je G^1 zvezen (geometrijsko zvezen reda 1), če točka P_n leži na daljici med P_{n-1} in Q_1.
Točke na Bézierovi krivulji lahko računamo s pomočjo *de Casteljauovega algoritma.*
Algoritem (de Casteljau):
podatki: $P_0, P_1, \ldots, P_n$, in t

$i = 0, 1, \ldots, n$
    $b_i^0 = P_i$
$r = 1, 2, \ldots, n$
    $i = 0, 1, \ldots, n-r$
        $b_i^r(t) = (1-t) b_i^{r-1}(t) + t\, b_{i+1}^{r-1}(t)$,

Vrednost $b_0^n(t) = p(t)$ je točka na Bézierovi krivulji.

11.1 Naloge

1. Zapišite enačbe za linearno, kvadratično in kubično Bézierovo krivuljo.

Rešitev. Najprej zapišimo enačbo linearne Bézierove krivulje ($n = 1$):

$$p(t) = \sum_{i=0}^{1} P_i B_i^1(t).$$

Podani morata biti dve kontrolni točki P_0 in P_1. Izračunajmo Bernsteinove polinome,

$$\begin{aligned}
B_0^1(t) &= \binom{1}{0} t^0 (1-t)^{1-0} = 1 - t, \\
B_1^1(t) &= \binom{1}{1} t^1 (1-t)^{1-1} = t.
\end{aligned}$$

Torej je linearna Bézierova krivulja oblike

$$p(t) = P_0(1-t) + P_1\, t.$$

Oglejmo si enačbo kvadratične Bézierove krivulje ($n = 2$). Enačba je oblike

$$p(t) = \sum_{i=0}^{2} P_i B_i^2(t).$$

Dane morajo biti tri kontrolne točke P_0, P_1, P_2, Bernsteinovi polinomi pa so enaki

$$\begin{aligned}
B_0^2(t) &= \binom{2}{0} t^0 (1-t)^{2-0} = (1-t)^2, \\
B_1^2(t) &= \binom{2}{1} t^1 (1-t)^{2-1} = 2t(1-t), \\
B_2^2(t) &= \binom{2}{2} t^2 (1-t)^{2-2} = t^2.
\end{aligned}$$

Enačba kvadratične Bézierove krivulje je torej

$$p(t) = P_0(1-t)^2 + P_1 \cdot 2t(1-t) + P_2 t^2. \tag{11.1}$$

Kubična Bézierova krivulja ($n = 3$) je oblike

$$p(t) = \sum_{i=0}^{3} P_i B_i^3(t).$$

Dane morajo biti štiri kontrolne točke, Bernsteinovi polinomi pa so

$$\begin{aligned}
B_0^3(t) &= \binom{3}{0} t^0(1-t)^{3-0} = (1-t)^3, \\
B_1^3(t) &= \binom{3}{1} t^1(1-t)^{3-1} = 3t(1-t)^2, \\
B_2^3(t) &= \binom{3}{2} t^2(1-t)^{3-2} = 3t^2(1-t), \\
B_3^3(t) &= \binom{3}{3} t^3(1-t)^{3-3} = t^3.
\end{aligned}$$

Kubična Bézierova krivulja je oblike

$$p(t) = P_0(1-t)^3 + P_1 \cdot 3t(1-t)^2 + P_2 \cdot 3t^2(1-t) + P_3 t^3. \tag{11.2}$$

2. Pokažite, da ima Bernsteinov polinom $B_i^n(t)$ maksimum v točki $t = \frac{i}{n}$. Kakšna je vrednost polinoma v maksimumu?

   Rešitev. Najprej si oglejmo primer, ko $i \neq 0, i \neq n$, saj v tem primeru Bernsteinov polinom doseže maksimum v stacionarni točki (v točkah $t = 0$ in $t = 1$ je enak 0, za $0 < t < 1$ pa je pozitiven). Odvajajmo Bernsteinov polinom in poiščimo ničle odvoda

$$\begin{aligned}
\left(B_i^n(t)\right)' = \binom{n}{i} \left(it^{i-1}(1-t)^{n-i} - t^i(n-i)(1-t)^{n-i-1}\right)&, \\
t^{i-1}(1-t)^{n-i-1}\left(i(1-t) - (n-i)t\right) &= 0, \\
i(1-t) - (n-i)t &= 0, \\
i - it - nt + it &= 0, \\
t &= \frac{i}{n}.
\end{aligned}$$

   Vedno velja $B_i^n(t) \leq 1$ za $0 \leq t \leq 1$. Zato polinom $B_0^n(t)$ doseže maksimum v $t = 0$, saj je $B_0^n(0) = 1$, podobno polinom $B_n^n(t)$ maksimum doseže v $t = 1$. S tem smo dokazali, da je maksimum dosežen v $t = \frac{i}{n}$. V maksimumu je vrednost Bernsteinovega polinoma enaka

$$\begin{aligned}
B_i^n\left(\frac{i}{n}\right) &= \binom{n}{i}\left(\frac{i}{n}\right)^i \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i} \frac{i^i}{n^i} \frac{(n-i)^{n-i}}{n^{n-i}} \\
&= \binom{n}{i} \frac{i^i(n-i)^{n-i}}{n^n}.
\end{aligned}$$

3. Zapišite Bézierovo krivuljo, ki je podana s kontrolnimi točkami

$$P_0 = [2,2]^T,\ P_1 = \left[1, \frac{3}{2}\right]^T,\ P_2 = \left[\frac{7}{2}, 0\right]^T,\ P_3 = [4,1]^T.$$

Rešitev. Iz podatkov razberemo, da gre za kubično Bézierovo krivuljo ($n = 3$), zato uporabimo enačbo (11.2). Vstavimo dane točke,

$$\begin{aligned} p(t) &= [2,2]^T(1-t)^3 + \left[1, \frac{3}{2}\right]^T 3t(1-t)^2 + \left[\frac{7}{2}, 0\right]^T 3t^2(1-t) + [4,1]^T t^3 \\ &= \begin{bmatrix} 2(1-3t+3t^2-t^3) + 1 \cdot 3t(1-2t+t^2) + \frac{7}{2} \cdot 3t^2(1-t) + 4t^3 \\ 2(1-3t+3t^2-t^3) + \frac{3}{2} \cdot 3t(1-2t+t^2) + 0 \cdot 3t^2(1-t) + 1 \cdot t^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 - 3t + 10.5t^2 - 5.5t^3 \\ 2 - 1.5t - 3t^2 + 3.5t^3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. Poiščite pogoj za kontrolne točke kubične Bézierove krivulje, da bo krivulja stopnje 2.

Rešitev. Spet uporabimo enačbo (11.2). Hočemo, da so koeficienti pri kubičnih členih enaki 0, torej

$$\begin{aligned} p(t) &= P_0(1-3t+3t^2-t^3) + P_1 \cdot 3t(1-2t+t^2) + \\ &\quad + P_2 \cdot 3t^2(1-t) + P_3 t^3, \\ -P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3 &= 0, \\ P_3 - P_0 &= 3(P_2 - P_1). \end{aligned}$$

5. Dani sta začetna in končna kontrolna točka P_0 in P_3 kubične Bézierove krivulje in tangenti d_0 in d_3 v teh točkah. Poiščite ostale kontrolne točke Bézierove krivulje, da bo veljalo

$$\begin{aligned} p(0) &= P_0, \\ p(1) &= P_3, \\ p'(0) &= d_0, \\ p'(1) &= d_3. \end{aligned}$$

Rešitev. Iz enačbe (11.2) vidimo, da bo vedno veljalo $p(0) = P_0$ in $p(1) = P_3$. Odvajajmo enačbo (11.2) in zapišimo pogoje,

$$\begin{aligned} p'(t) &= -P_0 \cdot 3(1-t)^2 + 3P_1((1-t)^2 - t \cdot 2(1-t)) + \\ &\quad + 3P_2(2t(1-t) - t^2) + 3P_3 t^2, \\ p'(0) &= -P_0 \cdot 3 + 3P_1 = d_0, \\ p'(1) &= -3P_2 + 3P_3 = d_3. \end{aligned}$$

Torej mora biti

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{3}d_0 \text{ in } P_2 = P_3 - \frac{1}{3}d_3.$$

6. Dane so kontrolne točke $P_3 = Q_0 = [6, -1]^T, Q_1 = [7, 0]^T$ dveh sosednjih Bézierovih krivulj. Kje mora ležati točka P_2, da bo zlepek krivulj G^1 zvezen?

   Rešitev. Vemo, da mora P_2 ležati na isti premici kot P_3 in Q_1, tj. na premici $y = x - 7$. Če označimo koordinati točke $P_2 = [a, b]^T$, mora torej veljati
   $$b = a - 7.$$
   Paziti moramo še na to, da si bodo kontrolne točke sledile v pravilnem vrstnem redu - če se premikamo po premici, mora biti točka $P_3 = Q_0$ med P_2 in Q_1, torej mora biti $a < 6$.

7. V splošnem kvadratična Bézierova krivulja poteka skozi prvo in zadnjo kontrolno točko, ne pa tudi skozi vmesno. Če so kontrolne točke P_0, P_1 in P_2 kolinearne, se zdi, da bo krivulja premica in da bo potekala tudi skozi notranjo točko. Ali je to res?

   Rešitev. Če so točke kolinearne, lahko eno točko izrazimo kot linearno kombinacijo drugih dveh. Predpostavimo, da velja
   $$P_1 = (1 - \alpha)P_0 + \alpha P_2 \text{ za nek } \alpha \in \mathbb{R}.$$
   Splošna oblika Bézierove krivulje, dane s tremi kontrolnimi točkami (enačba (11.1)), se poenostavi v
   $$\begin{aligned} p(t) &= P_0(1-t)^2 + ((1-\alpha)P_0 + \alpha P_2) \cdot 2t(1-t) + P_2t^2 \\ &= P_0 + P_0(-t^2 - 2\alpha t + 2\alpha t^2) + P_2(t^2 + 2\alpha t - 2\alpha t^2) \\ &= P_0 + (P_2 - P_0)(t^2 + 2\alpha t - 2\alpha t^2) \\ &= P_0 + (P_2 - P_0)s, \end{aligned}$$
   kjer je s nov parameter. Zadnja enačba je reprezentacija premice skozi točki P_0 in P_2, torej je Bézierova krivulja geometrijsko kar premica.

8. Dana je parametrična polinomska krivulja
   $$p(t) = \begin{bmatrix} 1 + t + t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}, \ 0 \leq t \leq 1.$$
   Zapišite jo v Bézierovi obliki.

Rešitev. Krivulja je stopnje 3, torej iščemo 4 kontrolne točke. Vemo, da gre krivulja skozi robni točki, torej je

$$P_0 = p(0) = [1, 0]^T,\ P_3 = p(1) = [3, 1]^T.$$

Iščemo še točki $P_1 = [x_1, y_1]^T,\ P_2 = [x_2, y_2]^T$. To vstavimo v splošno enačbo kubične Bézierove krivulje (11.2),

$$\begin{gathered}(1-t)^3 + x_1 \cdot 3t(1-t)^2 + x_2 \cdot 3t^2(1-t) + 3t^3 = 1 + t + t^2,\\ y_1 \cdot 3t(1-2t+t^2) + y_2(3t^2 - 3t^3) + t^3 = t^3\end{gathered}$$

in rešimo sistem:

$$\begin{aligned}\text{prva komponenta:}&\\ t^3 &: -1 + 3x_1 - 3x_2 + 3 = 0,\\ t^2 &: 3 - 6x_1 + 3x_2 = 1,\\ t &: -3 + 3x_1 = 1,\\ 1 &: 1 = 1,\\ \text{druga komponenta:}&\\ t^3 &: 3y_1 - 3y_2 + 1 = 1,\\ t^2 &: -6y_1 + 3y_2 = 0,\\ t &: 3y_1 = 0,\\ 1 &: 0 = 0.\end{aligned}$$

Rešitve so

$$x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = 2,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0.$$

Iskane kontrolne točke so torej

$$P_0 = [1, 0]^T,\ P_1 = [\frac{4}{3}, 0]^T,\ P_2 = [2, 0]^T,\ P_3 = [3, 1]^T.$$

9. Dano Bézierovo krivuljo, določeno s kontrolnimi točkami $P_0, P_1, \ldots, P_n$, bi radi zapisali kot polinom višje stopnje. Pokažite, da morajo biti kontrolne točke $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n+1}$ nove Bézierove krivulje enake

$$Q_i = \alpha_i P_{i-1} + (1 - \alpha_i)P_i,\ \alpha_i = \frac{i}{n+1},\ i = 0, 1, \ldots, n+1. \qquad (11.3)$$

Namig: Najprej pokažite, da velja

$$
\begin{aligned}
(1-t)B_i^n(t) &= \frac{n+1-i}{n+1}\, B_i^{n+1}(t),\\
tB_i^n(t) &= \frac{i+1}{n+1}\, B_{i+1}^{n+1}(t),\\
B_i^n(t) &= \frac{n+1-i}{n+1}\, B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1}\, B_{i+1}^{n+1}(t).
\end{aligned}
$$

Rešitev. Najprej pokažimo, da veljajo enačbe iz namiga,

$$
\begin{aligned}
\frac{n+1-i}{n+1}\, B_i^{n+1}(t) &= \frac{n+1-i}{n+1}\binom{n+1}{i} t^i(1-t)^{n+1-i}\\
&= \frac{n+1-i}{n+1}\ \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}\ t^i(1-t)^{n+1-i}\\
&= \frac{n!}{i!(n-i)!}\ t^i(1-t)^{n-i}(1-t)\\
&= (1-t)B_i^n(t),\\
\frac{i+1}{n+1}\, B_{i+1}^{n+1}(t) &= \frac{i+1}{n+1}\binom{n+1}{i+1} t^{i+1}(1-t)^{n+1-i-1}\\
&= \frac{i+1}{n+1}\ \frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!}\ t^{i+1}(1-t)^{n-i}\\
&= \frac{n!}{i!(n-i)!}\ t\,t^i(1-t)^{n-i}\\
&= tB_i^n(t),\\
\frac{n+1-i}{n+1}\, B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1}\, B_{i+1}^{n+1}(t) &= (1-t)B_i^n(t) + tB_i^n(t)\\
&= B_i^n(t).
\end{aligned}
$$

Zapišimo Bézierovo krivuljo z uporabo zadnje enačbe iz namiga,

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \sum_{i=0}^{n} P_i B_i^n(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} P_i \left(\frac{n+1-i}{n+1} \, B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1} \, B_{i+1}^{n+1}(t) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} P_i \, \frac{n+1-i}{n+1} \, B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^{n} P_i \, \frac{i+1}{n+1} \, B_{i+1}^{n+1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} P_i \, \frac{n+1-i}{n+1} \, B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^{n+1} P_{i-1} \, \frac{i}{n+1} \, B_i^{n+1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \left(\frac{n+1-i}{n+1} \, P_i + \frac{i}{n+1} \, P_{i-1} \right) B_i^{n+1}(t).
\end{aligned}
$$

Če označimo $\alpha_i = \frac{i}{n+1}$, je torej

$$
p(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \left(\underbrace{(1-\alpha_i) P_i + \alpha_i P_{i-1}}_{Q_i} \right) B_i^{n+1}(t),
$$

kar smo želeli dokazati.

10. Zvišajte stopnjo Bézierovi krivulji, dani s kontrolnimi točkami

$$
P_0 = [0,0]^T, \; P_1 = [1,2]^T, \; P_2 = [3,2]^T, \; P_3 = [2,0]^T.
$$

Zapišite obe krivulji.

Rešitev. Najprej zapišimo dano kubično Bézierovo krivuljo, pri tem uporabimo enačbo (11.2),

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \begin{bmatrix} 0 + 3t(1-t)^2 + 3 \cdot 3t^2(1-t) + 2t^3 \\ 0 + 2 \cdot 3t(1-t)^2 + 2 \cdot 3t^2(1-t) + 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4t^3 + 3t^2 + 3t \\ -6t^2 + 6t \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Iz enačbe (11.3) izračunajmo kontrolne točke za krivuljo višje stopnje,

$$\begin{aligned}
Q_0 &= P_0 = [0,0]^T,\\
Q_1 &= \frac{1}{4}P_0 + \frac{3}{4}P_1 = \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]^T,\\
Q_2 &= \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 = [2,2]^T,\\
Q_3 &= \frac{3}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3 = \left[\frac{11}{4}, \frac{3}{2}\right]^T,\\
Q_4 &= P_3 = [2,0]^T.
\end{aligned}$$

Zapišimo še novo krivuljo,

$$\begin{aligned}
p(t) &= Q_0(1-t)^4 + Q_1 \cdot 4t(1-t)^3 + Q_2 \cdot 6t^2(1-t)^2 + Q_3 \cdot 4t^3(1-t) + Q_4t^4\\
&= \begin{bmatrix} -4t^3 + 3t^2 + 3t \\ -6t^2 + 6t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vidimo, da sta krivulji enaki. Višanje stopnje uporabimo, kadar želimo večjo fleksibilnost in več svobode pri kasnejšem oblikovanju.

11. Kvadratni Bézierovi krivulji, definirani s kontrolnimi točkami P_0, P_1 in P_2, dvakrat povišajte stopnjo in zapišite nove kontrolne točke.

Rešitev. Uporabimo rezultat (11.3) za $n = 2$, da dobimo nove kontrolne točke

$$\begin{aligned}
Q_0 &= P_0,\\
Q_1 &= \frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_1,\\
Q_2 &= \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2,\\
Q_3 &= P_2.
\end{aligned}$$

Še enkrat uporabimo (11.3), tokrat za $n = 3$, in rezultat so točke

$$\begin{aligned}
R_0 &= Q_0 = P_0,\\
R_1 &= \frac{1}{4}Q_0 + \frac{3}{4}Q_1 = \frac{1}{4}P_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_1\right) = \frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}P_1,\\
R_2 &= \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{2}Q_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2\right) = \frac{1}{6}P_0 + \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{6}P_2,\\
R_3 &= \frac{3}{4}Q_2 + \frac{1}{4}Q_3 = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2\right) + \frac{1}{4}P_2 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2,\\
R_4 &= Q_3 = P_2.
\end{aligned}$$

12. Dane so kontrolne točke

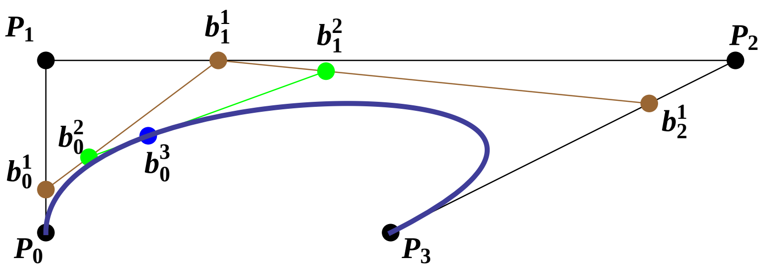
$$P_0 = [0, 0]^T,\ P_1 = [0, 2]^T,\ P_2 = [8, 2]^T,\ P_3 = [4, 0]^T.$$

S pomočjo de Casteljauovega algoritma izračunajte vrednost pripadajoče Bézierove krivulje pri $t = \frac{1}{4}$.

Rešitev. Vrednosti zapišimo v tabelo:

$b_0^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$			
$b_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$b_0^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$b_0^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}$	
$b_2^0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$	$b_1^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$b_1^2 = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} \\ \frac{15}{8} \end{bmatrix}$	$b_0^3 = \begin{bmatrix} \frac{19}{16} \\ \frac{9}{8} \end{bmatrix}$
$b_3^0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$	$b_2^1 = \begin{bmatrix} 7 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$		

Vrednost Bézierove krivulje pri $t = \frac{1}{4}$ je $\begin{bmatrix} \frac{19}{16} \\ \frac{9}{8} \end{bmatrix}$.



Slika 11.1: Skica delovanja de Casteljauovega algoritma.

Poglavje 12

Numerično odvajanje

Splošno pravilo za numerično odvajanje je oblike

$$f'(x_i) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i y_i}_{\text{pravilo}} + \underbrace{c f^{(m)}(\xi),}_{\text{napaka metode}} \quad x_0 \leq \xi \leq x_n,$$

kjer so točke $x_i = x_0 + ih$ ekvidistantne in $y_i = f(x_i)$. Koeficiente a_i določimo po metodi nedoločenih koeficientov. Najprej izberemo bazo prostora polinomov in koeficiente določimo tako, da je pravilo točno za polinome čim višjih stopenj. Napako določimo s pomočjo polinoma višje stopnje.
Pri numeričnem odvajanju sta pomembni dve vrsti napak - ena je napaka metode, ki jo lahko ocenimo z

$$|D_m| \leq |c| \max_{x_0 \leq x \leq x_n} \left| f^{(m)}(x) \right|,$$

druga napaka pa je neodstranljiva napaka D_n, do katere pride zato, ker namesto s točnimi vrednostmi $f(x_i)$ računamo s približki za točno vrednost $\widetilde{y}_i$. Predpostavimo, da velja

$$|f(x_i) - \widetilde{y}_i| \leq u,$$

kjer je u osnovna zaokrožitvena napaka. Skupna napaka metode D je omejena z

$$|D| \leq |D_m| + |D_n|.$$

Če poznamo oceni za $\max_{x_0 \leq x \leq x_n} \left| f^{(m)}(x) \right|$ in u, lahko določimo optimalni h, pri katerem bo skupna napaka najmanjša.

12.1 Naloge

1. Izpeljite formulo za numerično odvajanje

$$f'(x_0) = Ay_0 + By_1 + Cy_2 + Dy_3 + Ef^{(m)}(\xi).$$

Rešitev. Izberemo bazo $\{1, x - x_0, (x - x_0)^2, \dots\}$ in bazne funkcije vstavimo v formulo,

$$\begin{aligned} f = 1:\ & 0 = A + B + C + D, \\ f = x - x_0:\ & 1 = A \cdot 0 + Bh + C \cdot 2h + D \cdot 3h, \\ f = (x - x_0)^2:\ 2(x - x_0)\Big|_{x=x_0} & = 0 = A \cdot 0 + B \cdot h^2 + C \cdot (2h)^2 + D \cdot (3h)^2, \\ f = (x - x_0)^3:\ 3(x - x_0)^2\Big|_{x=x_0} & = 0 = A \cdot 0 + B \cdot h^3 + C \cdot (2h)^3 + D \cdot (3h)^3. \end{aligned}$$

Zapišimo sistem v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in ga rešimo,

$$A = -\frac{11}{6h},\ B = \frac{3}{h},\ C = -\frac{3}{2h},\ D = \frac{1}{3h}.$$

Zdaj si oglejmo še napako. V pravilo vstavimo $f = (x - x_0)^4$:

$$\begin{aligned} 4(x - x_0)^3\Big|_{x=x_0} & = 0 = A \cdot 0 + B \cdot h^4 + C \cdot (2h)^4 + D \cdot (3h)^4 + E \cdot 4!, \\ 0 & = 3h^3 - 3 \cdot (2h)^3 + 1 \cdot (3h)^3 + 4!E, \\ -6h^3 & = 24E, \\ E & = -\frac{1}{4}h^3. \end{aligned}$$

Vidimo še, da je $m = 4$, saj za polinome stopnje 4 pravilo ni več natančno. Pravilo je oblike

$$f'(x_0) = -\frac{11}{6h}\, y_0 + \frac{3}{h}\, y_1 - \frac{3}{2h}\, y_2 + \frac{1}{3h}\, y_3 - \frac{1}{4}h^3 f^{(4)}(\xi).$$

2. Izpeljite formulo za numerično odvajanje

$$f'(x_2) = Ay_0 + By_1 + Cy_2 + Dy_3 + Ey_4 + Ff^{(m)}(\xi).$$

Rešitev. Izberemo bazo $\{1, x - x_2, (x - x_2)^2, \dots\}$ in bazne funkcije vstavimo v formulo,

$$\begin{aligned}
f = 1 :&\ \ 0 = A + B + C + D + E,\\
f = x - x_2 :&\ \ 1 = A \cdot (-2h) + B \cdot (-h) + D \cdot h + E \cdot 2h,\\
f = (x - x_2)^2 :&\ \ 0 = A \cdot (-2h)^2 + B \cdot (-h)^2 + D \cdot h^2 + E \cdot (2h)^2,\\
f = (x - x_2)^3 :&\ \ 0 = A \cdot (-2h)^3 + B \cdot (-h)^3 + D \cdot h^3 + E \cdot (2h)^3,\\
f = (x - x_2)^4 :&\ \ 0 = A \cdot (-2h)^4 + B \cdot (-h)^4 + D \cdot h^4 + E \cdot (2h)^4.
\end{aligned}$$

Zapišimo sistem v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 16 & 1 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in ga rešimo,

$$A = \frac{1}{12h},\ B = -\frac{2}{3h},\ C = 0,\ D = \frac{2}{3h},\ E = -\frac{1}{12h}.$$

Torej je $m \geq 5$. Zdaj si oglejmo še napako, v pravilo vstavimo $f = (x - x_2)^5$:

$$\begin{aligned}
0 &= A \cdot (-2h)^5 + B \cdot (-h)^5 + D \cdot h^5 + E \cdot (2h)^5 + F \cdot 5!,\\
-F \cdot 5! &= \frac{1}{12h}(-32h^5) + \left(-\frac{2}{3h}\right)(-h^5) + \frac{2}{3h}h^5 + \left(-\frac{1}{12h}\right)32h^5,\\
-F \cdot 5! &= -\frac{8}{3}h^4 + \frac{2}{3}h^4 + \frac{2}{3}h^4 - \frac{8}{3}h^4,\\
F &= \frac{h^4}{30}.
\end{aligned}$$

Vidimo, da je $m = 5$. Pravilo je oblike

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h}\, y_0 - \frac{2}{3h}\, y_1 + \frac{2}{3h}\, y_3 - \frac{1}{12h}\, y_4 + \frac{1}{30}h^4 f^{(5)}(\xi).$$

3. Odvod funkcije $f(x) = e^x$ v točki $x = 0$ računate numerično po pravilu

$$f'(x_1) = \frac{y_2 - y_0}{2h} - \frac{1}{6}h^2 f^{(3)}(\xi).$$

Uporabite $x_0 = -h,\ x_1 = 0,\ x_2 = h,\ u = 2 \cdot 10^{-16}$ in določite optimalni h, pri katerem bo skupna napaka najmanjša.

Rešitev. Najprej ocenimo napako metode:

$$D_m = -\frac{1}{6}h^2 f^{(3)}(\xi).$$

Vzeli bomo $h < 1$, zato lahko ocenimo,

$$|D_m| \leq \frac{h^2}{6} \max_{-h\leq x\leq h} \left|e^x\right| \leq \frac{eh^2}{6}.$$

Neodstranljivo napako ocenimo z

$$|D_n| \leq \frac{u+u}{2h} = \frac{u}{h},$$

kjer je $u = 2 \cdot 10^{-16}$ osnovna zaokrožitvena napaka. Ocena za skupno napako metode je torej

$$|D| \leq |D_m| + |D_n| \leq \frac{eh^2}{6} + \frac{u}{h}.$$

Optimalni h je minimum zgornje funkcije. Odvajamo,

$$\begin{aligned}
\frac{e}{6} \cdot 2h - \frac{u}{h^2} &= 0, \\
\frac{e}{3}h^3 - u &= 0, \\
h^3 &= \frac{3u}{e}, \\
h &= \sqrt[3]{\frac{3u}{e}} \doteq 6 \cdot 10^{-6}.
\end{aligned}$$

V spodnji tabeli so zapisani rezultati, ki jih vrne Octave:

h	$f'(0)$	skupna napaka
10^{-1}	1.001667500198441	-0.001667500198441
10^{-2}	1.000016666749992	-0.000016666749992
10^{-3}	1.000000166666681	-0.000000166666681
10^{-4}	1.000000001666890	-0.000000001666890
10^{-5}	1.000000000012103	-0.000000000012103
10^{-6}	0.999999999973245	0.000000000026755
10^{-7}	0.999999999473644	0.000000000526356
10^{-8}	0.999999993922529	0.000000006077471
10^{-9}	1.000000027229220	-0.000000027229220
10^{-10}	1.000000082740371	-0.000000082740371

Rezultati kažejo, da smo dobro ocenili optimalen h.

Poglavje 13

Numerična integracija

Numerično računamo vrednost integrala

$$Sf = \int_a^b f(x)dx.$$

Označimo

$$Sf = \underbrace{Ff}_{\text{približek za integral}} + \underbrace{Rf}_{\text{napaka}}.$$

Funkcijo f aproksimiramo z interpolacijskim polinomom p stopnje n v Lagrangeovi obliki in izpeljemo pravilo

$$Ff = \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \ell_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i).$$

Koeficientom a_i pravimo *uteži*, vrednostim x_i pa *vozli* integracijske formule. Če vozle x_i izbiramo ekvidistantno, pravilu rečemo *Newton-Cotesovo pravilo.* Pri *zaprtem* pravilu uporabimo tudi vrednosti v robnih točkah x_0 in x_n, pri *odprtem* pa le vrednosti v notranjih vozlih.
Integracijsko pravilo je *reda m*, če je

$$Rx^j = 0,\ j = 0, 1, \ldots, m,\ Rx^{m+1} \neq 0,$$

torej če je napaka pravila enaka 0 za vse polinome stopnje $\leq m$.

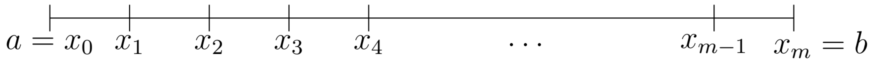
13.1 Sestavljena pravila

Sestavljeno pravilo dobimo tako, da interval $[a, b]$ ekvidistantno razdelimo na m podintervalov in na vsakem podintervalu uporabimo osnovno pravilo.

Trapezno pravilo za integracijo je

$$Sf = \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + f(x_1)\Big) - \frac{1}{12}h^3 f''(\xi),\ x_0 \le \xi \le x_1. \tag{13.1}$$

Pri izpeljavi sestavljenega trapeznega pravila na ekvidistantnih točkah $x_j = x_0 + jh$ si pomagamo s sliko 13.1.



Slika 13.1: Izpeljava sestavljenega trapeznega pravila.

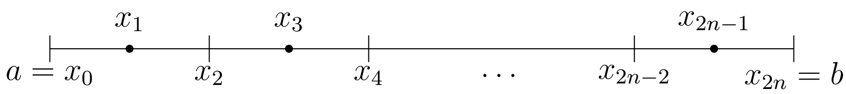
Sestavljeno trapezno pravilo je

$$\begin{aligned} Sf &= T_h f + R_h f, \\ T_h f &= \sum_{j=1}^{m} \frac{h}{2}\Big(f(x_{j-1}) - f(x_j)\Big) \\ &= \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)\Big), \\ R_h f &= -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f^{(2)}(\xi),\ a \le \xi \le b. \end{aligned}$$

Osnovno Simpsonovo pravilo za integracijo je

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\Big) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi),\ \xi \in [x_0, x_2],$$

pri izpeljavi sestavljenega si pomagamo s sliko 13.2.



Slika 13.2: Izpeljava sestavljenega pravila.

Sestavljeno Simpsonovo pravilo je

$$\begin{aligned} Sf = \int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n})\Big) - \\ - \frac{h^4(x_{2n} - x_0)}{180} f^{(4)}(\xi),\ \xi \in [x_0, x_{2n}]. \end{aligned} \tag{13.2}$$

13.2 Rombergova ekstrapolacija

Natančnost trapeznega pravila lahko povečamo z Rombergovo ekstrapolacijo. Zapišimo trapezno pravilo za koraka h in $\frac{h}{2}$,

$$Sf = T_h f + \sum_{k=1}^{\infty} c_k h^{2k},$$
$$Sf = T_{\frac{h}{2}} f + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{h}{2}\right)^{2k}.$$

Opazimo, da v napaki lahko uničimo člen pri h^2. Drugo enačbo množimo s 4 in dobimo

$$\begin{aligned} 4\,Sf &= 4\,T_{\frac{h}{2}} f + 4 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{h^{2k}}{2^{2k}} \\ &= 4\,T_{\frac{h}{2}} f + c_1 h^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \widetilde{c}_k h^{2k}, \\ 4\,Sf - Sf &= 4\,T_{\frac{h}{2}} f - T_h f + \sum_{k=2}^{\infty} \widetilde{c}_{k,1} h^{2k}. \end{aligned}$$

Po enem koraku Rombergove ekstrapolacije torej dobimo

$$Sf = \underbrace{\frac{4T_{\frac{h}{2}} f - T_h f}{3}}_{T^1_{\frac{h}{2}}} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k,1} h^{2k}$$

in red napake je h^4. V splošnem velja

$$T^j_{h/2^r} f = \frac{2^{2j}\, T^{j-1}_{h/2^r} f - T^{j-1}_{h/(2^{r-1})} f}{2^{2j} - 1}.$$

V tabeli 13.1 je zapisana shema dveh korakov Rombergove ekstrapolacije trapeznega pravila.

13.3 Monte Carlo integracija

Računamo integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$, kjer vemo, da za $x \in [a,b]$ velja $0 \leq f(x) \leq h$. Naj bo $V = (b-a)\,h$. Naključno izberemo N točk x_i iz domene $[a,b]$. Integral $I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{V}\int_a^b f(x)V\,dx$ lahko gledamo tudi kot matematično upanje funkcije $g(x) = f(x)V$ za slučajno spremenljivko x enakomerno porazdeljeno na domeni $[a,b]$.

red napake / korak	$\mathcal{O}(h^2)$	$\mathcal{O}(h^4)$	$\mathcal{O}(h^6)$
h	$T_h f$		
		$T^1_{\frac{h}{2}} f = \frac{1}{3}(4\,T_{\frac{h}{2}} f - T_h f)$	
$\frac{h}{2}$	$T_{\frac{h}{2}} f$		$T^2_{\frac{h}{4}} f = \frac{1}{15}(16\,T^1_{\frac{h}{4}} f - T^1_{\frac{h}{2}} f)$
		$T^1_{\frac{h}{4}} f = \frac{1}{3}(4\,T_{\frac{h}{4}} f - T_{\frac{h}{2}} f)$	
$\frac{h}{4}$	$T_{\frac{h}{4}} f$		

Tabela 13.1: Shema izračuna po Rombergovi ekstrapolaciji.

Potem je

$$I \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(x_i) = V \cdot \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

približek za I.

To je ideja metode Monte-Carlo, ki jo lahko zelo preprosto posplošimo na več dimenzij in z njo na preprost način izračunamo približke za integral, kjer bi druge metode zahtevale več dela.

13.4 Naloge

1. Izpeljite zaprto Newton-Cotesovo pravilo na štirih točkah po metodi nedoločenih koeficientov. Vrednost prve uteži preverite še preko integracije Lagrangeevega baznega polinoma.

   Rešitev. Pravilo bo oblike

   $$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2) + Df(x_3) + Ef^{(m)}(\xi).$$

   Izberemo bazo $\{1, x - x_0, (x - x_0)^2, \dots\}$ in vstavimo bazne funkcije v pravilo, tako da bo točno za polinome čim višjih stopenj. Uporabimo novo spremenljivko $x = x_0 + th,\ dx = hdt$,

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_3} 1dx &= x_3 - x_0 = 3h, \\
\int_{x_0}^{x_3} 1dx &= A + B + C + D, \\
\int_{x_0}^{x_3} (x - x_0)dx &= \int_0^3 th^2 dt = h^2 \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^3 = \frac{9}{2}h^2, \\
\int_{x_0}^{x_3} (x - x_0)dx &= A \cdot 0 + B \cdot h + C \cdot 2h + D \cdot 3h, \\
\int_{x_0}^{x_3} (x - x_0)^2 dx &= \int_0^3 (th)^2 h\ dt = h^3 \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^3 = 9h^3, \\
\int_{x_0}^{x_3} (x - x_0)^2 dx &= A \cdot 0 + B \cdot h^2 + C \cdot (2h)^2 + D \cdot (3h)^2, \\
\int_{x_0}^{x_3} (x - x_0)^3 dx &= \int_0^3 (th)^3 h\ dt = h^4 \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^3 = \frac{81}{4}h^4, \\
\int_{x_0}^{x_3} (x - x_0)^3 dx &= A \cdot 0 + B \cdot h^3 + C \cdot (2h)^3 + D \cdot (3h)^3.
\end{aligned}
$$

Zapišimo sistem enačb

$$
\begin{aligned}
3h &= A + B + C + D, \\
\frac{9}{2}h &= B + 2C + 3D, \\
9h &= B + 4C + 9D, \\
\frac{81h}{4} &= B + 8C + 27D,
\end{aligned}
$$

in ga rešimo

$$
A = D = \frac{3}{8}h,\ B = C = \frac{9}{8}h.
$$

Izračunajmo še napako,

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_3} (x - x_0)^4 dx &= \int_0^3 (ht)^4 h\ dt = h^5 \left.\frac{t^5}{5}\right|_0^3 = \frac{243h^5}{5}, \\
\int_{x_0}^{x_3} (x - x_0)^4 dx &= A \cdot 0 + B \cdot h^4 + C \cdot (2h)^4 + D \cdot (3h)^4 + E \cdot 4!, \\
\frac{243}{5}h^5 &= \frac{9}{8}h^5 + 16h^4 \cdot \frac{9}{8}h + 81h^4 \cdot \frac{3}{8}h + 24E, \\
E &= -\frac{3}{80}h^5.
\end{aligned}
$$

Pravilo je oblike

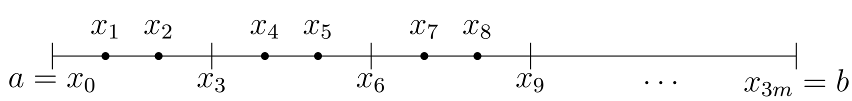
$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3}{8}h\Big(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\Big) - \frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi).$$

Preverimo še vrednost prve uteži,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_{x_0}^{x_3} \ell_0(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}dx \\
&= \int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(-h)(-2h)(-3h)}dx \\
&= -\frac{1}{6h^3}\int_0^3 (-h+th)(-2h+th)(-3h+th)h\; dt \\
&= -\frac{1}{6h^3}\,h^4\int_0^3 (t-1)(t-2)(t-3)dt \\
&= -\frac{h}{6}\int_0^3 (t^3-3t^2+2t-3t^2+9t-6)dt \\
&= -\frac{h}{6}\left[\frac{t^4}{4} - \frac{6t^3}{3} + \frac{11t^2}{2} - 6t\right]_0^3 \\
&= \frac{3}{8}h.
\end{aligned}$$

2. Izpeljite sestavljeno pravilo, ki ga dobite iz pravila, ki je rešitev naloge 1.

Rešitev. Narišimo skico intervala,



Slika 13.3: Izpeljava sestavljenega pravila.

Sestavljeno pravilo dobimo tako, da na podintervalih $[x_{3i-3}, x_{3i}]$, $i =$

$1, 2, \ldots, m$, uporabimo osnovno pravilo, torej

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{3i-3}}^{3i} f(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{3}{8} h\Big(f(x_{3i-3}) + 3f(x_{3i-2}) + 3f(x_{3i-1}) + f(x_{3i})\Big) + \\
&+ \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \left(-\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi_i)\right)}_{\text{napaka } Rf},\ \xi_i \in [x_{3i-3}, x_{3i}].
\end{aligned}$$

Ocenimo napako sestavljenega pravila,

$$\begin{aligned}
m \min_{a \le \xi \le b} f^{(4)}(\xi) \le \sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i) \le m \max_{a \le \xi \le b} f^{(4)}(\xi) \\
\Rightarrow \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i) = f^{(4)}(\eta),\ \eta \in [a, b],
\end{aligned}$$

zato je

$$\begin{aligned}
Rf &= -\frac{3}{80} h^5 \cdot m f^{(4)}(\eta) \\
&= -\frac{3}{80} h^5 \cdot \frac{b-a}{3h} f^{(4)}(\eta) \\
&= -\frac{b-a}{80} h^4 f^{(4)}(\eta).
\end{aligned}$$

3. Določite konstante a, b, c, d, e in m v integracijskem pravilu

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h\Big(af(x_0) + bf(x_1)\Big) + h^2\Big(cf'(x_0) + df'(x_1)\Big) + ef^{(m)}(\xi)$$

in izpeljite sestavljeno pravilo, ki ga iz tega pravila dobimo.

Rešitev. Izberemo bazo $\{1, x - x_0, (x - x_0)^2, \ldots\}$ in bazne funkcije vstavimo v pravilo,

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} 1dx &= x_1 - x_0 = h, \\
\int_{x_0}^{x_1} 1dx &= h(a+b), \\
\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)dx &= \left.\frac{(x-x_0)^2}{2}\right|_{x_0}^{x_1} = \frac{h^2}{2}, \\
\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)dx &= h(a\cdot 0 + b\cdot h) + h^2(c\cdot 1 + d\cdot 1), \\
\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^2dx &= \left.\frac{(x-x_0)^3}{3}\right|_{x_0}^{x_1} = \frac{h^3}{3}, \\
\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^2dx &= h(a\cdot 0 + b\cdot h^2) + h^2(c\cdot 2\cdot 0 + d\cdot 2h), \\
\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^3dx &= \left.\frac{(x-x_0)^4}{4}\right|_{x_0}^{x_1} = \frac{h^4}{4}, \\
\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^3dx &= h(a\cdot 0 + b\cdot h^3) + h^2(c\cdot 3\cdot 0 + d\cdot 3h^2).
\end{aligned}
$$

Rešimo sistem

$$
\begin{aligned}
a+b &= 1, \\
b+c+d &= \frac{1}{2}, \\
b+2d &= \frac{1}{3}, \\
b+3d &= \frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

in dobimo

$$a = b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{12},\ d = -\frac{1}{12}.$$

Izpeljimo še napako,

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)^4dx &= \left.\frac{(x-x_0)^5}{5}\right|_{x_0}^{x_1} = \frac{h^5}{5},\\
\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)^4dx &= h(a\cdot 0 + b\cdot h^4) + h^2(c\cdot 0 + d\cdot 4h^3) + e\cdot 4!,\\
\frac{h^5}{5} &= \frac{1}{2}h^5 + 4h^5\left(-\frac{1}{12}\right) + 24e,\\
h^5\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) &= 24e,\\
e &= \frac{1}{720}h^5.
\end{aligned}
$$

Osnovno pravilo je oblike

$$
\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{1}{2}h\Big(f(x_0)+f(x_1)\Big)+\frac{1}{12}h^2\Big(f'(x_0)-f'(x_1)\Big)+\frac{1}{720}h^5f^{(4)}(\xi).
$$

Izpeljimo še sestavljeno pravilo,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\\
&= \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2}h\Big(f(x_{i-1})+f(x_i)\Big) + \frac{1}{12}h^2\Big(f'(x_{i-1})-f'(x_i)\Big)\right) +\\
&+ \sum_{i=1}^m \frac{1}{720}h^5f^{(4)}(\xi_i),\ \xi_i\in[x_{i-1},x_i].
\end{aligned}
$$

Uporabimo $h=\frac{b-a}{m}$ in sestavljeno pravilo je

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{2}h\Big(f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{m-1})+f(x_m)\Big)+\\
&+\frac{h^2}{12}\Big(f'(x_0)-f'(x_m)\Big)+\frac{1}{720}h^5mf^{(4)}(\eta)\\
&= \frac{1}{2}h\Big(f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{m-1})+f(x_m)\Big)+\\
&+\frac{h^2}{12}\Big(f'(x_0)-f'(x_m)\Big)+\frac{1}{720}h^4(b-a)f^{(4)}(\eta),\ \eta\in[a,b].
\end{aligned}
$$

4. Uporabite trapezno pravilo za izračun vrednosti integrala

$$
\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx
$$

in ocenite napako. Uporabite $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

Rešitev. Najprej rešimo za $h = 1$. Uporabimo enačbo (13.1) za

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ f(x) = \frac{1}{1+x},$$

torej

$$\begin{aligned} T_1 f &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+1}\right) = \frac{3}{4} = 0.75, \\ |Rf| &= \left|-\frac{1}{12} \cdot 1 \cdot f''(\xi)\right|,\ 0 \le \xi \le 1. \end{aligned}$$

Izračunajmo drugi odvod in ga ocenimo,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(1+x)^{-2}, \\ f''(x) &= 2(1+x)^{-3}, \\ \max_{0 \le x \le 1} |f''(x)| &= 2. \end{aligned}$$

Torej je ocena za napako

$$|Rf| \le \frac{1}{12} \cdot 2 = \frac{1}{6} \doteq 0.166667.$$

Za $h = \frac{1}{2}$ uporabimo sestavljeno trapezno pravilo za

$$m = 2,\ h = \frac{1}{2},\ x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1,$$

torej

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{2}} f &= \frac{1}{2} T_1 f + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{17}{24} \doteq 0.708333, \\ |R_h f| &\le \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 \\ &= \frac{1}{24} \doteq 0.0416667. \end{aligned}$$

Za $h = \frac{1}{4}$ uporabimo sestavljeno trapezno pravilo za

$$m = 4,\ h = \frac{1}{4},\ x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1,$$

torej

$$
\begin{aligned}
T_{\frac{1}{4}}f &= \frac{1}{2}T_{\frac{1}{2}}f + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}} + \frac{1}{1+\frac{3}{4}}\right) \\
&= \frac{1171}{1680} \doteq 0.697024, \\
|Rf| &\leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 2 \\
&= \frac{1}{96} \doteq 0.0104167
\end{aligned}
$$

Primerjajmo rezultate s točno rešitvijo 0.693147,

h	numerična rešitev	ocena napake	napaka
1	0.750000	0.1666667	-0.0568528
$\frac{1}{2}$	0.708333	0.0416667	-0.0151862
$\frac{1}{4}$	0.697024	0.0104167	-0.0038766

5. Z Rombergovo ekstrapolacijo trapezne metode izračunajte

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx.
$$

Naredite dva koraka, začetni korak naj bo $h = \frac{\pi}{4}$.

Rešitev. Najprej izračunajmo numerično vrednost integrala po trapeznem pravilu za h, $\frac{h}{2}$, $\frac{h}{4}$,

$$
\begin{aligned}
T_h f &= \frac{\pi}{8}\left(\sin 0 + 2\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 0.948059, \\
T_{\frac{h}{2}} f &= \frac{1}{2}T_h f + \frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}\right) = 0.987116, \\
T_{\frac{h}{4}} f &= \frac{1}{2}T_{\frac{h}{2}} f + \frac{\pi}{16}\left(\sin\frac{\pi}{16} + \sin\frac{3\pi}{16} + \sin\frac{5\pi}{16} + \sin\frac{7\pi}{16}\right) = 0.996785.
\end{aligned}
$$

Dobljene vrednosti uporabimo v shemi Rombergove ekstrapolacije (tabela 13.1):

korak \ red napake	$\mathcal{O}(h^2)$	$\mathcal{O}(h^4)$	$\mathcal{O}(h^6)$
h	0.948059		
$\frac{h}{2}$	0.987116	1.00013	1
$\frac{h}{4}$	0.996785	1.00001	

Vidimo, da se vrednosti približujejo k točni vrednosti integrala, ki je 1.

6. Pokažite, da nam en korak Rombergove ekstrapolacije trapeznega pravila vrne Simpsonovo pravilo.

   Rešitev. Zapišimo sestavljeno trapezno pravilo za koraka $2h$ in h

$$\begin{aligned} T_{2h}f &= \frac{2h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n})\right), \\ T_h f &= \frac{1}{2}T_{2h}f + h\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}), \end{aligned}$$

   in naredimo korak Rombergove ekstrapolacije

$$\begin{aligned} T_h^1 f &= \frac{4T_h f - T_{2h}f}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left(2T_{2h}f + 4h\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) - T_{2h}f\right) \\ &= \frac{1}{3}h\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})\right), \end{aligned}$$

   kar je ravno sestavljeno Simpsonovo pravilo (enačba (13.2)).

7. S pomočjo Monte-Carlo metode izračunajte integral

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{1+x+2y+3z}.$$

   Za N vzemite 1000, 5000, 10000.

   Rešitev. S programom v Octaveu dobimo približke

$N = 1000$	$N = 5000$	$N = 10000$
0.2722	0.2729	0.2716
0.2755	0.2741	0.2724
0.2730	0.2716	0.2720
0.2724	0.2746	0.2726
0.2719	0.2714	0.2724

   ki so blizu točni vrednosti integrala 0.272534.

Poglavje 14

Numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb

14.1 Začetni problemi - enokoračne metode

Rešujemo navadno diferencialno enačbo prvega reda

$$y' = f(x, y),\ a \leq x \leq b,\ y(a) = \alpha.$$

Interval ekvidistantno razdelimo na n delov in vpeljemo oznake

$$x_i = a + ih,\ i = 0, 1, \ldots, n,\ y_i \approx y(x_i).$$

Eksplicitna Eulerjeva metoda za reševanje navadnih diferencialnih enačb je

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),\ i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{14.1}$$

Implicitna Eulerjeva metoda za reševanje navadnih diferencialnih enačb je

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{14.2}$$

Začetne probleme lahko rešujemo z *razvojem v Taylorjevo vrsto.* Razvoj v Taylorjevo vrsto do reda 4 je enak

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!}y^{(5)}(\xi), \tag{14.3}$$

kjer je $\xi \in [x, x+h]$. Uporabimo izražave

$$y' = f, \quad y'' = f_x + f_y f, \ldots$$

v (14.3). Funkcije izračunamo v x_i. Približek za rešitev diferencialne enačbe dobimo kot

$$y_{i+1} = y_i + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \frac{h^3}{3!}y''' + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}. \tag{14.4}$$

Runge-Kutta metoda reda 4 je oblike

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf\Big(x_i, y_i\Big),\\
k_2 &= hf\Big(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\Big),\\
k_3 &= hf\Big(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\Big),\\
k_4 &= hf\Big(x_i + h, y_i + k_3\Big),\\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}\Big(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\Big).
\end{aligned} \tag{14.5}$$

14.2 Začetni problemi - večkoračne metode

Zaradi lažjega pisanja označimo $f_i = f(x_i, y_i)$. *Adams-Bashforthova metoda 4. reda* je štirikoračna metoda oblike

$$\begin{aligned}
y_0 = \alpha_0,\ y_1 &= \alpha_1,\ y_2 = \alpha_2,\ y_3 = \alpha_3,\\
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{24}\Big(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\Big).
\end{aligned} \tag{14.6}$$

Adams-Moultonova metoda reda 4 pa je trikoračna metoda oblike

$$\begin{aligned}
y_0 = \alpha_0,\ y_1 &= \alpha_1,\ y_2 = \alpha_2,\\
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{24}\Big(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\Big).
\end{aligned}$$

Milneova prediktor-korektor metoda je oblike

$$\begin{aligned}
y_i^{(P)} &= y_{i-4} + \frac{4h}{3}\Big(2f_{i-1} - f_{i-2} + 2f_{i-3}\Big),\\
y_i^{(K)} &= y_{i-2} + \frac{h}{3}\Big(f_i^{(P)} + 4f_{i-1} + f_{i-2}\Big),
\end{aligned} \tag{14.7}$$

kjer je $f_i^{(P)} = f\Big(x_i, y_i^{(P)}\Big)$.

14.3 Enačbe višjega reda

Enačbo drugega reda oblike

$$y'' = f(x, y, y'),\ y(a) = \alpha,\ y'(a) = \beta,$$

prevedemo na sistem diferencialnih enačb prvega reda

$$\begin{aligned} y' &= z,\ y'' = z' = f(x, y, z), \\ y(a) &= \alpha,\ z(a) = \beta, \end{aligned}$$

ki ga lahko zapišemo v vektorski obliki

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = F\left(x, \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}\right),\ \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix},$$

kjer je

$$F\left(x, \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z \\ f(x, y, z) \end{bmatrix} \text{ in } y_0 = y(a), z_0 = z(a).$$

Sistem nato rešujemo npr. z Runge-Kutta metodo reda 4

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix} &= hF\big(x_0, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}\big), \\
\begin{bmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix} &= hF\big(x_0 + \frac{1}{2}h, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix}\big), \\
\begin{bmatrix} k_3 \\ \ell_3 \end{bmatrix} &= hF\big(x_0 + \frac{1}{2}h, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix}\big), \\
\begin{bmatrix} k_4 \\ \ell_4 \end{bmatrix} &= hF\big(x_0 + h, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_3 \\ \ell_3 \end{bmatrix}\big), \\
\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} k_3 \\ \ell_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} k_4 \\ \ell_4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

14.4 Robni problemi

Pri *diferenčni metodi* odvode zamenjamo z diferencami, tj. z aproksimacijami za odvod. Interval $[a, b]$, na katerem iščemo rešitev diferencialne enačbe, razdelimo na n delov, torej

$$x_0 = a,\ x_i = x_0 + ih,\ i = 0, 1, \ldots, n,\ h = \frac{b-a}{n}.$$

Prvi odvod aproksimiramo z

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},$$

drugega pa z

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

S *strelsko metodo* rešujemo robni problem oblike

$$\begin{gathered} y'' = f(x, y, y'), \\ y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta. \end{gathered}$$

Problem prevedemo na reševanje začetnega problema

$$\begin{gathered} y'' = f(x, y, y'), \\ y(a) = \alpha,\ y'(a) = v, \end{gathered}$$

katerega rešitev je funkcija $y(x, v)$. Iščemo tak v^*, da je $y(b, v^*) = \beta$. Iščemo torej ničlo funkcije

$$E(v) = y(b, v) - \beta.$$

14.5 Naloge

1. Uporabite eksplicitno in implicitno Eulerjevo metodo pri reševanju začetnega problema

   $$y' = y - x^2 + 1,\ 0 \le x \le 2,\ y(0) = 0.5.$$

   Uporabite $h = 0.2$ in določite približek za $y(0.4)$.

   Rešitev. Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 0.2\,i$ in dobimo

   $$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h(y_i - x_i^2 + 1) \\ &= y_i + 0.2(y_i - 0.04\,i^2 + 1) \\ &= 1.2\,y_i - 0.008\,i^2 + 0.2. \end{aligned}$$

   Iščemo y_2. Dvakrat uporabimo zgornjo enačbo

   $$\begin{aligned} y_1 &= 1.2 \cdot 0.5 - 0.008 \cdot 0 + 0.2 = 0.8, \\ y_2 &= 1.2 \cdot 0.8 - 0.008 \cdot 1 + 0.2 = 1.152. \end{aligned}$$

   Iskani približek je torej $y(0.4) \doteq 1.152$.

Zdaj uporabimo še implicitno Eulerjevo metodo (enačba (14.2)),

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h(y_{i+1} - x_{i+1}^2 + 1) \\ &= y_i + 0.2(y_{i+1} - 0.04(i+1)^2 + 1) \\ y_{i+1} &= \frac{1}{0.8}(y_i - 0.008(i+1)^2 + 0.2). \end{aligned}$$

Iščemo y_2. Dvakrat uporabimo zgornjo enačbo

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.865, \\ y_2 &= 1.29125. \end{aligned}$$

Iskani približek je torej $y(0.4) \doteq 1.29125$.

2. Uporabite eksplicitno Eulerjevo metodo za numerično reševanje naslednjih začetnih problemov:

   (a)
   $$y' = xe^{3x} - 2y,\ 0 \leq x \leq 1,\ y(0) = 0,\ h = 0.5.$$

   (b) Narišite približek za rešitev diferencialne enačbe
   $$y' = 1 + (x-y)^2,\ 2 \leq x \leq 3,\ y(2) = 1,\ h = 0.5.$$

   (c)
   $$y' = 1 + \frac{y}{x},\ 1 \leq x \leq 2,\ y(1) = 2,\ h = 0.25.$$

   (d)
   $$y' = \cos 2x + \sin 3x,\ 0 \leq x \leq 1,\ y(0) = 1,\ h = 0.25.$$

   (e) Zapišite približka y_1 in y_2 pri reševanju
   $$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2,\ 1 \leq x \leq 2,\ y(1) = 1,\ h = 0.1.$$

   (f) Zapišite približka y_1 in y_2 pri reševanju
   $$y' = -(y+1)(y+3),\ 0 \leq x \leq 2,\ y(0) = -2,\ h = 0.2.$$

   (g) Zapišite približka y_1 in y_2 pri reševanju
   $$y' = -5y + 5x^2 + 2x,\ 0 \leq x \leq 1,\ y(0) = \frac{1}{3},\ h = 0.1.$$

Rešitev.

(a) Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 0.5i$ in dobimo

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h(x_i e^{3x_i} - 2y_i) \\ &= y_i + 0.5(x_i e^{3x_i} - 2y_i) \\ &= 0.5 x_i e^{3x_i}. \end{aligned}$$

Iščemo y_1 in y_2. Dvakrat uporabimo zgornjo enačbo

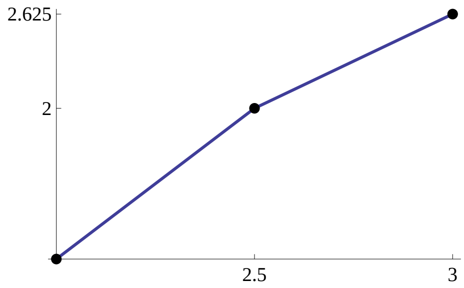
$$\begin{aligned} y_1 &= 0.5 \cdot 0 = 0, \\ y_2 &= 0.5 \cdot 0.5 \cdot e^{1.5} = 1.120. \end{aligned}$$

(b) Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 2 + 0.5i$ in dobimo

$$y_{i+1} = y_i + 0.5 \cdot (1 + (x_i - y_i)^2).$$

Iščemo y_1 in y_2. Dvakrat uporabimo zgornjo enačbo

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + 0.5 \cdot (1 + (2-1)^2) = 2, \\ y_2 &= 2 + 0.5 \cdot (1 + (2.5-2)^2) = 2.625. \end{aligned}$$



Slika 14.1: Numerična rešitev enačbe.

(c) Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 1 + 0.25i$ in dobimo

$$y_{i+1} = y_i + 0.25 \cdot \left(1 + \frac{y_i}{x_i}\right).$$

Iščemo y_1, y_2, y_3, y_4. Štirikrat uporabimo zgornjo enačbo

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 + 0.25 \cdot \left(1 + \frac{2}{1}\right) = 2.75, \\ y_2 &= 2.75 + 0.25 \cdot \left(1 + \frac{2.75}{1.25}\right) = 3.55, \\ y_3 &= 3.55 + 0.25 \cdot \left(1 + \frac{3.55}{1.5}\right) = 4.3917, \\ y_4 &= 4.3917 + 0.25 \cdot \left(1 + \frac{4.3917}{1.75}\right) = 5.2690. \end{aligned}$$

(d) Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 0.25i$ in dobimo

$$y_{i+1} = y_i + 0.25 \cdot (\cos 2x_i + \sin 3x_i).$$

Iščemo y_1, y_2, y_3, y_4. Štirikrat uporabimo zgornjo enačbo

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + 0.25 \cdot (\cos 0 + \sin 0) = 1.25,\\
y_2 &= 1.25 + 0.25 \cdot (\cos 0.5 + \sin 0.75) = 1.63981,\\
y_3 &= 1.63981 + 0.25 \cdot (\cos 1 + \sin 1.5) = 2.02426,\\
y_4 &= 2.02426 + 0.25 \cdot (\cos 1.5 + \sin 2.25) = 2.23646.
\end{aligned}$$

(e) Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 1 + 0.1i$ in dobimo

$$y_{i+1} = y_i + 0.1 \cdot \left(\frac{y_i}{x_i} - \left(\frac{y_i}{x_i}\right)^2\right).$$

Iščemo y_1 in y_2. Dvakrat uporabimo zgornjo enačbo

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + 0.1 \cdot \left(\frac{1}{1} - \left(\frac{1}{1}\right)^2\right) = 1,\\
y_2 &= 1 + 0.1 \cdot \left(\frac{1}{1.1} - \left(\frac{1}{1.1}\right)^2\right) = 1.0083.
\end{aligned}$$

(f) Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 0.2i$ in dobimo

$$y_{i+1} = y_i + 0.2 \cdot (-(y_i + 1)(y_i + 3)).$$

Iščemo y_1 in y_2. Dvakrat uporabimo zgornjo enačbo

$$\begin{aligned}
y_1 &= -2 - 0.2 \cdot (-2 + 1)(-2 + 3) = -1.8,\\
y_2 &= -1.8 - 0.2 \cdot (-1.8 + 1)(-1.8 + 3) = -1.608.
\end{aligned}$$

(g) Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 0.1i$ in dobimo

$$y_{i+1} = y_i + 0.1 \cdot (-5y_i + 5x_i^2 + 2x_i)$$

Iščemo y_1 in y_2. Dvakrat uporabimo zgornjo enačbo

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{3} + 0.1 \cdot (-5 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = \frac{1}{6},\\
y_2 &= \frac{1}{6} + 0.1 \cdot (-5 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot 0.01 + 2 \cdot 0.1) = 0.108333.
\end{aligned}$$

3. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto do reda 4 poiščite numerično rešitev $y_1 \approx y(0.1)$ enačbe

$$y' = x^2 + y^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ y(0) = 1.$$

Rešitev. Najprej izračunajmo odvode in njihove vrednosti,

$$\begin{aligned} y' = x^2 + y^2 &\Rightarrow y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1, \\ y'' = 2x + 2yy' &\Rightarrow y''(0) = 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2, \\ y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy'' &\Rightarrow y'''(0) = 2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8, \\ y^{(4)} = 6y'y'' + 2yy''' &\Rightarrow y^{(4)}(0) = 6 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 8 = 28. \end{aligned}$$

Zdaj upoštevajmo $h = 0.1$ in $y(0) = 1$ in vstavimo v enačbo (14.4)

$$y_1 = 1 + 0.1 \cdot 1 + \frac{0.1^2}{2} \cdot 2 + \frac{0.1^3}{3!} \cdot 8 + \frac{0.1^4}{4!} \cdot 28 = 1.11145.$$

4. Uporabite razvoj v Taylorjevo vrsto do reda 3 za reševanje začetnega problema

$$y' = y - x^2 + 1,\ 0 \leq x \leq 2,\ y(0) = 0.5,\ h = 0.25.$$

Poiščite približek za $y(0.5)$.

Rešitev. Najprej izračunajmo odvode in njihove vrednosti v $x = 0$,

$$\begin{aligned} y' = y - x^2 + 1 &\Rightarrow y'(0) = 0.5 - 0^2 + 1 = 1.5, \\ y'' = y' - 2x &\Rightarrow y''(0) = 1.5 - 2 \cdot 0 = 1.5, \\ y''' = y'' - 2 &\Rightarrow y'''(0) = 1.5 - 2 = -0.5. \end{aligned}$$

Zdaj upoštevajmo $h = 0.25$ in $y(0) = 0.5$ in vstavimo v enačbo (14.4) (do reda 3)

$$y_1 = 0.5 + 0.25 \cdot 1.5 + \frac{0.25^2}{2} \cdot 1.5 + \frac{0.25^3}{3!} \cdot (-0.5) = 0.9205729.$$

Iščemo približek za $y(0.5)$, torej y_2. Izračunajmo približke za vrednosti odvodov v $x = 0.25$,

$$\begin{aligned} y'(0.25) &= 0.9205729 - 0.25^2 + 1 = 1.8580729, \\ y''(0.25) &= 1.8580729 - 2 \cdot 0.25 = 1.3580729, \\ y'''(0.25) &= 1.3580729 - 2 = -0.641927. \end{aligned}$$

Rezultate vstavimo v enačbo (14.4) (do reda 3) in dobimo iskani približek

$$
\begin{aligned}
y_2 &= 0.9205729 + 0.25 \cdot 1.8580729 + \frac{0.25^2}{2} \cdot 1.3580729 + \frac{0.25^3}{3!} \cdot (-0.641927) \\
&= 1.425859.
\end{aligned}
$$

5. Za reševanje enačb iz naloge 2 uporabite razvoj v Taylorjevo vrsto do reda 3. Poiščite približek za y_1.

   Rešitev. Uporabimo enak postopek kot v nalogi 4.

   (a) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

   $$
   \begin{aligned}
   y' &= xe^{3x} - 2y \Rightarrow y'(0) = 0, \\
   y'' &= e^{3x} + 3xe^{3x} - 2y' \Rightarrow y''(0) = 1, \\
   y''' &= 6e^{3x} + 9xe^{3x} - 2y'' \Rightarrow y'''(0) = 4.
   \end{aligned}
   $$

   Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 0.2083333$.

   (b) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

   $$
   \begin{aligned}
   y' &= 1 + (x-y)^2 \Rightarrow y'(2) = 2, \\
   y'' &= 2(x-y)(1-y') \Rightarrow y''(2) = -2, \\
   y''' &= 2(1-y')^2 + 2(x-y)(-y'') \Rightarrow y'''(2) = 6.
   \end{aligned}
   $$

   Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 1.875$.

   (c) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

   $$
   \begin{aligned}
   y' &= 1 + \frac{y}{x} \Rightarrow y'(1) = 3, \\
   y'' &= \frac{y'x - y}{x^2} \Rightarrow y''(1) = 1, \\
   y''' &= \frac{x^2 y'' - 2(xy' - y)}{x^3} \Rightarrow y'''(1) = -1.
   \end{aligned}
   $$

   Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 2.7786458$.

   (d) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

   $$
   \begin{aligned}
   y' &= \cos 2x + \sin 3x \Rightarrow y'(0) = 1, \\
   y'' &= -2\sin 2x + 3\cos 3x \Rightarrow y''(0) = 3, \\
   y''' &= -4\cos 2x - 9\sin 3x \Rightarrow y'''(0) = -4.
   \end{aligned}
   $$

   Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 1.333333$.

(e) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \Rightarrow y'(1) = 0, \\
y'' &= \frac{y'x - y}{x^2} - \frac{2y(y'x - y)}{x^3} \Rightarrow y''(1) = 1, \\
y''' &= \frac{y''x^2 - 2x(y'x - y)}{x^4} - \\
&- \frac{(2y'(y'x - y) + 2yy'')x^3 - 2y(y'x - y) \cdot 3x^2}{x^6} \Rightarrow y'''(1) = -5.
\end{aligned}$$

Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 1.004167$.

(f) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

$$\begin{aligned}
y' &= -(y + 1)(y + 3) \Rightarrow y'(0) = 1, \\
y'' &= -y'(2y + 4) \Rightarrow y''(0) = 0, \\
y''' &= -y''(2y + 4) - 2(y')^2 \Rightarrow y'''(0) = -2.
\end{aligned}$$

Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = -1.80267$.

(g) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

$$\begin{aligned}
y' &= -5y + 5x^2 + 2x \Rightarrow y'(0) = -\frac{5}{3}, \\
y'' &= -5y' + 10x + 2 \Rightarrow y''(0) = \frac{31}{3}, \\
y''' &= -5y'' + 10 \Rightarrow y'''(0) = -\frac{125}{3}.
\end{aligned}$$

Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 0.2113889$.

6. Uporabite razvoj v Taylorjevo vrsto do reda 3 in poiščite numerično rešitev naslednjih enačb v točki x_1:

   (a)
   $$y' = \sin x + e^{-x},\ 0 \leq x \leq 1,\ y(0) = 0,\ h = 0.5.$$

   (b)
   $$y' = \frac{1}{x}\left(y^2 + y\right),\ 1 \leq x \leq 3,\ y(1) = -2,\ h = 0.5.$$

   (c)
   $$y' = -xy + \frac{4x}{y},\ 0 \leq x \leq 1,\ y(0) = 1,\ h = 0.25.$$

(d)
$$y' = 1 + x\sin(xy),\ 0 \le x \le 2,\ y(0) = 0,\ h = 0.5.$$

(e)
$$y' = \frac{2}{x}y + x^2e^x,\ 1 \le x \le 2,\ y(1) = 0,\ h = 0.1.$$

Rešitev. Uporabimo enak postopek kot v nalogi 4.

(a) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

$$\begin{aligned} y' &= \sin x + e^{-x} \Rightarrow y'(0) = 1,\\ y'' &= \cos x - e^{-x} \Rightarrow y''(0) = 0,\\ y''' &= -\sin x + e^{-x} \Rightarrow y'''(0) = 1. \end{aligned}$$

Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 0.5208333$.

(b) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x}\left(y^2 + y\right) \Rightarrow y'(1) = 2,\\ y'' &= -\frac{1}{x^2}\left(y^2 + y\right) + \frac{1}{x}\left(2yy' + y'\right) \Rightarrow y''(1) = -8,\\ y''' &= \frac{2}{x^3}\left(y^2 + y\right) - \frac{2}{x^2}\left(2yy' + y'\right) +\\ &\quad + \frac{1}{x}\left(2(y')^2 + 2yy'' + y''\right) \Rightarrow y'''(1) = 48. \end{aligned}$$

Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = -1$.

(c) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

$$\begin{aligned} y' &= -xy + \frac{4x}{y} \Rightarrow y'(0) = 0,\\ y'' &= -y - xy' + \frac{4y - 4xy'}{y^2} \Rightarrow y''(0) = 3,\\ y''' &= -2y' - xy'' + \frac{-4xy''y - (4y - 4xy')\cdot 2y'}{y^3} \Rightarrow y'''(0) = 0. \end{aligned}$$

Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 1.09375$.

(d) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

$$\begin{aligned} y' &= 1 + x\sin(xy) \Rightarrow y'(0) = 1,\\ y'' &= \sin(xy) + x\cos(xy)(y + xy') \Rightarrow y''(0) = 0,\\ y''' &= 2\cos(xy)(y + xy') - x\sin(xy)(y + xy')^2 + x\cos(xy)(2y' + xy'')\\ &\Rightarrow y'''(0) = 0. \end{aligned}$$

Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 0.5$.

(e) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

$$y' = \frac{2}{x}y + x^2e^x \Rightarrow y'(1) = e,$$
$$y'' = -\frac{2}{x^2}y + \frac{2}{x}y' + (2x + x^2)e^x \Rightarrow y''(1) = 5e,$$
$$y''' = \frac{4}{x^3}y - \frac{4}{x^2}y' + \frac{2}{x}y'' + (2 + 4x + x^2)e^x \Rightarrow y'''(1) = 13e.$$

Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 0.345675$.

7. Za reševanje enačb iz naloge 2 uporabite Runge-Kutta metodo reda 4. Izračunajte y_1.

Rešitev.

(a) Uporabimo sistem (14.5) in dobimo

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.5f(0, 0) = 0.5(0 - 0) = 0,\\
k_2 &= 0.5f(0.25, 0) = 0.5(0.25e^{3\cdot 0.25} - 0) = 0.264625,\\
k_3 &= 0.5f(0.25, 0.264625/2) = 0.5(0.25e^{3\cdot 0.25} - 2\cdot 0.132313) = 0.132312,\\
k_4 &= 0.5f(0.5, 0.132312) = 0.5(0.5e^{3\cdot 0.5} - 2\cdot 0.132312) = 0.98811,\\
y_1 &= 0 + \frac{1}{6}(0 + 2\cdot 0.264625 + 2\cdot 0.132313 + 0.98811) = 0.296997.
\end{aligned}$$

(b) Uporabimo sistem (14.5) in dobimo

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.5f(2, 1) = 0.5(1 + (2 - 1)^2) = 1,\\
k_2 &= 0.5f(2.25, 1.5) = 0.5(1 + (2.25 - 1.5)^2) = 0.78125,\\
k_3 &= 0.5f(2.25, 1.39063) = 0.5(1 + (2.25 - 1.39063)^2) = 0.869263,\\
k_4 &= 0.5f(2.5, 1.86926) = 0.5(1 + (2.5 - 1.86926)^2) = 0.698915,\\
y_1 &= 1 + \frac{1}{6}(1 + 2\cdot 0.78125 + 2\cdot 0.869263 + 0.698915) = 1.83332.
\end{aligned}$$

(c) Uporabimo sistem (14.5) in dobimo

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.75,\\
k_2 &= 0.777778,\\
k_3 &= 0.780864,\\
k_4 &= 0.806173,\\
y_1 &= 2.77891.
\end{aligned}$$

(d) Uporabimo sistem (14.5) in dobimo

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 0.25, \\
k_2 &= 0.333796, \\
k_3 &= 0.333796, \\
k_4 &= 0.389805, \\
y_1 &= 1.32917.
\end{aligned}
$$

(e) Uporabimo sistem (14.5) in dobimo

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 0, \\
k_2 &= 0.00453515, \\
k_3 &= 0.00433929, \\
k_4 &= 0.00794015, \\
y_1 &= 1.00428.
\end{aligned}
$$

(f) Uporabimo sistem (14.5) in dobimo

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 0.2, \\
k_2 &= 0.198, \\
k_3 &= 0.19804, \\
k_4 &= 0.192156, \\
y_1 &= -1.80263.
\end{aligned}
$$

(g) Uporabimo sistem (14.5) in dobimo

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -0.166667, \\
k_2 &= -0.11375, \\
k_3 &= -0.126979, \\
k_4 &= -0.0781771, \\
y_1 &= 0.212283.
\end{aligned}
$$

8. Z Adams-Bashforthovo metodo reda 4 poiščite numerični približek za $y(2)$, kjer je $y(x)$ rešitev enačbe

$$y' = y - x^2 + 1,\ 0 \leq x \leq 2,\ y(0) = 0.5,$$

in $h = 0.5$.

Rešitev. Najprej uporabimo Runge-Kutta metodo reda 4, da dobimo 4 začetne približke, ki jih potrebujemo pri Adams-Bashforthovi metodi,

$$y_0 = 0.5,\ y_1 = 1.42513,\ y_2 = 2.6396,\ y_3 = 4.00681.$$

Zdaj uporabimo enačbo (14.6) in dobimo približek

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + \frac{0.5}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0) \\ &= 4.00681 + \frac{0.5}{24}(55 \cdot 2.75681 - 59 \cdot 2.6396 + 37 \cdot 2.17513 - 9 \cdot 1.5) \\ &= 5.31657. \end{aligned}$$

9. Uporabite Milneovo prediktor-korektor metodo za reševanje začetnega problema

$$y' = -xy^2,\ y(0) = 2,$$

in poiščite numerični približek za y_4, če je $h = 0.2$.

Rešitev. Najprej uporabimo Runge-Kutta metodo reda 4, da dobimo začetne približke, ki jih potrebujemo za Milneovo metodo,

$$y_0 = 2,\ y_1 = 1.92307,\ y_2 = 1.72411,\ y_3 = 1.47056.$$

Zdaj uporabimo prediktor iz metode (14.7)

$$y_4^{(P)} = y_0 + \frac{4h}{3}(2f_3 - f_2 + 2f_1) = 1.23058.$$

Izračunano vrednost uporabimo v korektorju in dobimo

$$y_4^{(K)} = y_2 + \frac{h}{3}(f_4^{(P)} + 4f_3 + f_2) = 1.21807.$$

10. Prevedite reševanje začetnega problema

$$y'' - y'y^2 + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

na reševanje sistema navadnih diferencialnih enačb prvega reda in uporabite Runge-Kutta metodo reda 4 za izračun y_1, če je $h = 0.2$.

Rešitev. Zapišimo enačbo v obliki sistema diferencialnih enačb prvega reda

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ zy^2 - y \end{bmatrix} = F(x, \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}),\ \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Runge-Kutta metodo reda 4,

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} z_0 \\ z_0 y_0^2 - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} z_0 + \frac{1}{2}\ell_1 \\ (z_0 + \frac{1}{2}\ell_1)(y_0 + \frac{1}{2}k_1)^2 - (y_0 + \frac{1}{2}k_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.22 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ \ell_3 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} z_0 + \frac{1}{2}\ell_2 \\ (z_0 + \frac{1}{2}\ell_2)(y_0 + \frac{1}{2}k_2)^2 - (y_0 + \frac{1}{2}k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.022 \\ -0.219562 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k_4 \\ \ell_4 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} z_0 + \ell_3 \\ (z_0 + \ell_3)(y_0 + k_3)^2 - (y_0 + k_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0439124 \\ -0.237602 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} k_3 \\ \ell_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} k_4 \\ \ell_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.978681 \\ -0.219454 \end{bmatrix}.$$

Približek za vrednost rešitve v točki 0.2 je $y_1 = 0.978681$.

11. Prevedite reševanje začetnega problema

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2x}\sin x,\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = -0.4,\ y'(0) = -0.6$$

na reševanje sistema navadnih diferencialnih enačb prvega reda in uporabite Runge-Kutta metodo reda 4 za izračun y_1 pri $h = 0.1$.

Rešitev. Zapišimo enačbo v obliki sistema diferencialnih enačb prvega reda

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ 2z - 2y + e^{2x}\sin x \end{bmatrix} = F(x, \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}),\ \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ -0.6 \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Runge-Kutta metodo reda 4,

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.06 \\ -0.04 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.062 \\ -0.032476 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ \ell_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0616238 \\ -0.0315241 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k_4 \\ \ell_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.063152 \\ -0.021786 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} k_3 \\ \ell_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} k_4 \\ \ell_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4617333 \\ -0.6316312 \end{bmatrix}.$$

12. Z diferenčno metodo za $h = \frac{1}{2}$ rešite robni problem

$$\begin{aligned}(1+x^2)y'' + 2xy' - x^2y &= 1,\\ y(-1) = y(1) &= 0.\end{aligned}$$

Rešitev. Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$(1+x_i^2)\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + 2x_i\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - x_i^2 y_i = 1. \tag{14.8}$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$\begin{aligned}y_{i-1}(1+x_i^2 - x_ih) + y_i(-2(1+x_i^2) - h^2x_i^2) + y_{i+1}(1+x_i^2 + x_ih) = h^2,\\ y_0 = 0,\ y_n = 0.\end{aligned}$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix} -2(1+x_1^2) - h^2x_1^2 & 1+x_1^2+x_1h & & \\ 1+x_2^2 - x_2h & -2(1+x_2^2) - h^2x_2^2 & 1+x_2^2+x_2h & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1+x_{n-2}^2 + x_{n-2}h \\ & 1+x_{n-1}^2 - x_{n-1}h & -2(1+x_{n-1}^2) - h^2x_{n-1}^2 \end{bmatrix}.$$
$$\cdot\begin{bmatrix} y_1\ y_2\ \ldots\ y_{n-1}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} h^2\ h^2\ \ldots\ h^2\end{bmatrix}^T.$$

V našem primeru je $h = \frac{1}{2},\ x_i = -1+ih,\ i = 0,1,2,3,4,$ torej rešujemo sistem

$$\begin{bmatrix} -\frac{41}{16} & 1 & \\ 1 & -2 & 1 \\ & 1 & -\frac{41}{16}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}.$$

Rešitev je

$$[y_1, y_2, y_3]^T = [-0.24, -0.365, -0.24]^T.$$

13. Sestavite sistem linearnih enačb za reševanje robnega problema z diferenčno metodo pri danem koraku h :

(a)

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2},\ 1 \leq x \leq 2,\ y(1) = 1,\ y(2) = 2$$

(b)

$$y'' = 4(y-x),\ 0 \leq x \leq 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = 2$$

(c)

$$y'' = y' + 2y + \cos x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ y(0) = -0.3,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.1$$

(d)

$$y'' = -3y' + 2y + 2x + 3,\ 0 \leq x \leq 1,\ y(0) = 2,\ y(1) = 1$$

(e)

$$y'' = -\frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y - \frac{2}{x^2}\ln x,\ 1 \leq x \leq 2,\ y(1) = -\frac{1}{2},\ y(2) = \ln 2$$

(f)

$$y'' = -(x+1)y' + 2y + (1-x^2)e^{-x},\ 0 \leq x \leq 1,\ y(0) = -1,\ y(1) = 0$$

(g)

$$y'' = \frac{y'}{x} + \frac{3}{x^2}y + \frac{\ln x}{x} - 1,\ 1 \leq x \leq 2,\ y(1) = y(2) = 0$$

Rešitev.

(a) Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = -\frac{2}{x_i}\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \frac{2}{x_i^2}y_i + \frac{\sin(\ln x_i)}{x_i^2}.$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$\begin{aligned} x_i^2(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) &= -hx_i(y_{i+1} - y_{i-1}) + 2h^2 y_i + h^2\sin(\ln x_i), \\ y_{i-1}(x_i^2 - hx_i) + y_i(-2x_i^2 - 2h^2) + y_{i+1}(x_i^2 + hx_i) &= h^2\sin(\ln x_i), \\ y_0 = 1,\ y_n &= 2. \end{aligned}$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix} -2x_1^2 - 2h^2 & x_1^2 + hx_1 & & \\ x_2^2 - hx_2 & -2x_2^2 - 2h^2 & x_2^2 + hx_2 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x_{n-2}^2 + hx_{n-2} \\ & & x_{n-1}^2 - hx_{n-1} & -2x_{n-1}^2 - 2h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2\sin(\ln x_1) - (x_1^2 - hx_1) \\ h^2\sin(\ln x_2) \\ \vdots \\ h^2\sin(\ln x_{n-2}) \\ h^2\sin(\ln x_{n-1}) - 2(x_{n-1}^2 + hx_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

(b) Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = 4(y_i - x_i).$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$\begin{aligned} y_{i-1} + y_i(-2 - 4h^2) + y_{i+1} &= -4h^2 x_i, \\ y_0 = 0, y_n &= 2. \end{aligned}$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix} -2-4h^2 & 1 & & \\ 1 & -2-4h^2 & 1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & 1 & -2-4h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4h^2 x_1 \\ -4h^2 x_2 \\ \vdots \\ -4h^2 x_{n-2} \\ -4h^2 x_{n-1} - 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 2y_i + \cos x_i.$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$\begin{aligned} y_{i-1}(2+h) + y_i(-4 - 4h^2) + y_{i+1}(2-h) &= 2h^2 \cos x_i, \\ y_0 = -0.3, \quad y_n &= -0.1. \end{aligned}$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix} -4-4h^2 & 2-h & & \\ 2+h & -4-4h^2 & 2-h & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2-h \\ & 2+h & -4-4h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2h^2 \cos x_1 + 0.3(2+h) \\ 2h^2 \cos x_2 \\ \vdots \\ 2h^2 \cos x_{n-2} \\ 2h^2 \cos x_{n-1} + 0.1(2-h) \end{bmatrix}.$$

(d) Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}=-3\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+2y_i+2x_i+3.$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$y_{i-1}(2-3h)+y_i(-4-4h^2)+y_{i+1}(2+3h)=4h^2x_i+6h^2,$$
$$y_0=2,\quad y_n=1.$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix}-4-4h^2 & 2+3h & & \\ 2-3h & -4-4h^2 & 2+3h & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2+3h \\ & 2-3h & -4-4h^2 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_{n-1}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4h^2x_1+6h^2-2(2-3h)\\ 4h^2x_2+6h^2\\ \vdots\\ 4h^2x_{n-2}+6h^2\\ 4h^2x_{n-1}+6h^2-(2+3h)\end{bmatrix}.$$

(e) Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}=-\frac{4}{x_i}\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+\frac{2}{x_i^2}y_i-\frac{2}{x_i^2}\ln x_i.$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$y_{i-1}(x_i^2-2x_ih)+y_i(-2x_i^2-2h^2)+y_{i+1}(x_i^2+2x_ih)=-2h^2\ln x_i,$$
$$y_0=-\frac{1}{2},\quad y_n=\ln 2.$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix}-2x_1^2-2h^2 & x_1^2+2x_1h & & \\ x_2^2-2x_2h & -2x_2^2-2h^2 & x_2^2+2x_2h & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x_{n-2}^2+2x_{n-2}h \\ & x_{n-1}^2-2x_{n-1}h & -2x_{n-1}^2-2h^2 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_{n-1}\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}-2h^2\ln x_1+\frac{1}{2}(x_1^2-2x_1h)\\ -2h^2\ln x_2\\ \vdots\\ -2h^2\ln x_{n-2}\\ -2h^2\ln x_{n-1}-\ln 2(x_{n-1}^2+2x_{n-1}h)\end{bmatrix}.$$

(f) Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = -(x_i + 1)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 2y_i + (1 - x_i^2)e^{-x_i}.$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$y_{i-1}(2 - h(x_i + 1)) + y_i(-4 - 4h^2) + y_{i+1}(2 + h(x_i + 1)) = 2h^2(1 - x_i^2)e^{-x_i},$$
$$y_0 = -1, \quad y_n = 0.$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix} -4-4h^2 & 2+h(x_1+1) & & \\ 2-h(x_2+1) & -4-4h^2 & 2+h(x_2+1) & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2+h(x_{n-2}+1) \\ & & 2-h(x_{n-1}+1) & -4-4h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h^2(1-x_1^2)e^{-x_1} + 2 - h(x_1+1) \\ 2h^2(1-x_2^2)e^{-x_2} \\ \vdots \\ 2h^2(1-x_{n-2}^2)e^{-x_{n-2}} \\ 2h^2(1-x_{n-1}^2)e^{-x_{n-1}} \end{bmatrix}.$$

(g) Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{x_i}\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \frac{3}{x_i^2}y_i + \frac{\ln x_i}{x_i} - 1.$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$y_{i-1}(2x_i^2 + x_i h) + y_i(-4x_i^2 - 6h^2) + y_{i+1}(2x_i^2 - x_i h) = 2h^2 x_i \ln x_i - 2h^2 x_i^2,$$
$$y_0 = 0, \quad y_n = 0.$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix} -4x_1^2-6h^2 & 2x_1^2-x_1h & & \\ 2x_2^2+x_2h & -4x_2^2-6h^2 & 2x_2^2-x_2h & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2x_{n-2}^2-x_{n-2}h \\ & & 2x_{n-1}^2+x_{n-1}h & -4x_{n-1}^2-6h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h^2x_1\ln x_1 - 2h^2x_1^2 \\ 2h^2x_2\ln x_2 - 2h^2x_2^2 \\ \vdots \\ 2h^2x_{n-2}\ln x_{n-2} - 2h^2x_{n-2}^2 \\ 2h^2x_{n-1}\ln x_{n-1} - 2h^2x_{n-1}^2 \end{bmatrix}.$$

14. Robni problem

$$y'' = (y')^2 + y \sin x,\ y(0) = 1,\ y(1) = 2$$

rešite s strelsko metodo.

Rešitev. Najprej prevedimo problem na reševanje začetnega problema, ki ga bomo reševali z Runge-Kutta metodo reda 4,

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ z^2 + y \sin x \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix}.$$

Ta sistem rešimo za različne v. Želimo dobiti rešitev, pri kateri bo približek za $y(1)$ čim bližje 2. Rezultati, ki jih vrne Octave pri $h = 0.2$:

izbrani v	0	1	0.5	0.3	0.4	0.48
približek y_1	1.1724	18.9775	2.0477	1.6067	1.8039	1.9941
izbrani v	0.49	0.485	0.482	0.483	0.4823	0.4822
približek y_1	2.0206	2.0073	1.9994	2.0020	2.0001	1.9999

Torej je rešitev robnega problema rešitev začetnega problema za $v = 0.48225$. Običajno postopek izbire v delamo z bisekcijo, kjer določimo želeno natančnost.

15. Robni problem

$$y'' + e^{-xy} + \sin y' = 0,\ 1 \le x \le 2,\ y(1) = y(2) = 0$$

rešite s strelsko metodo.

Rešitev. Najprej prevedimo problem na reševanje začetnega problema, ki ga bomo reševali z Runge-Kutta metodo reda 4,

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ -e^{-xy} - \sin z \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}.$$

Ta sistem rešimo za različne v. Želimo dobiti rešitev, pri kateri bo približek za $y(2)$ čim bližje 0. Rezultati, ki jih vrne Octave pri $h = 0.2$:

izbrani v	0	1	0.5	0.8
približek y_1	-0.3316017	0.1546324	-0.0814838	0.06149417
izbrani v	0.7	0.6	0.65	0.67
približek y_1	0.0143007	-0.0333452	-0.00946340	0.00005610
izbrani v	0.66	0.665	0.669	0.6698
približek y_1	-0.0047013	-0.0023220	-0.000419430	-0.00003900

Torej je rešitev robnega problema rešitev začetnega problema za $v = 0.6698$.

Poglavje 15

Uporabljeni programi

Literatura

[1] spletna stran s programi

[2] manjka literatura,...